04

Сравнение методов интегрирования уравнений лучевых траекторий и их влияния на оценку профиля энерговыделения нижнегибридных волн в плазме токамака ФТ-2

© *Д.С. Новиков*[1,2], *Е.З. Гусаков*[1], *Н.В. Теплова*[1]

[1] ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dima.nowickow2013@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 июля 2026 г.
В окончательной редакции 7 сентября 2026 г.
Принято к публикации 7 сентября 2026 г.

Проведено сравнение трех методов численного интегрирования лучевых уравнений (классического метода Рунге–Кутты, того же метода с проекцией на многообразие нулевого гамильтониана и симплектического метода Гаусса–Лежандра) на примере расчета распространения и поглощения нижнегибридных волн в плазме токамака ФТ-2. Показано, что для единичных лучей проекционный и симплектический методы дают чрезвычайно близкие результаты, а метод без проекции ведет к вековому дрейфу гамильтониана и накоплению ошибки. Установлено, что систематического изменения профиля энерговыделения при переходе от классической схемы Рунге–Кутты к проекционной не наблюдается.

Ключевые слова: симплектические методы, геометрическая оптика, нижнегибридные волны, плазма токамака.

DOI: 10.61011/PJTF.2027.01.64123.20856

Нижнегибридные (НГ) волны широко применяются для неиндукционного поддержания тока и нагрева плазмы [1,2] в токамаках, что делает их важным элементом систем управляемого термоядерного синтеза. Создание и эффективное использование НГ-нагрева требуют надежного расчета распространения и поглощения высокочастотных (ВЧ) волн, для чего в подавляющем большинстве случаев используется метод лучевых траекторий (метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) [3]. Несмотря на широкое применение этого подхода, оценка влияния методов интегрирования лучевых уравнений на физические результаты расчета до сих пор не проводилась. Между тем гамильтонова природа лучевых уравнений делает предпочтительным применение специализированных (симплектических) методов, сохраняющих фазовый объем системы, первые интегралы движения [4]. В связи с этим целью настоящей работы является количественное сравнение трех методов численного интегрирования уравнений геометрической оптики: классического метода Рунге–Кутты [5], метода Рунге–Кутты с ортогональной проекцией на многообразие нулевого гамильтониана [4] и симплектического метода Гаусса–Лежандра [6]. Впервые исследуется влияние перехода от классической схемы Рунге–Кутты, не сохраняющей гамильтониан, к схеме с ортогональной проекцией на многообразие нулевого гамильтониана (т.е. к схеме, сохраняющей один из интегралов движения) на статистические и энергетические характеристики применительно к условиям реального эксперимента на токамаке ФТ-2.

Приближение геометрической оптики [3] позволяет находить асимптотические решения уравнений Максвелла в слабонеоднородной среде, где длина волны ВЧ-поля должна быть много меньше характерных размеров плазменной неоднородности. В рамках этого метода электрическое поле представляется в виде произведения медленно меняющейся амплитуды и экспоненты с быстроосциллирующей фазой

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{q}) \exp(i\mathcal{S}(\mathbf{q}) - i\omega t), \tag{1}$$

где ω, t — циклическая частота колебаний ВЧ-поля и время его распространения, $\mathbf{q}$ — пространственная координата, а $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ — функционал действия (эйконал), который определяется следующим выражением:

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \int^{\lambda(\mathbf{q})} \left[\left(\mathbf{N}(\lambda') \frac{d\mathbf{q}(\lambda')}{d\lambda'} \right) - \Lambda(\lambda') \mathcal{H}\big(\mathbf{q}(\lambda'), \mathbf{N}(\lambda')\big) \right] d\lambda'. \tag{2}$$

Здесь λ' — произвольный параметр интегрирования (время распространения, длина траектории и т.п.); $\Lambda(\lambda')$ — множитель Лагранжа, обеспечивающий равенство нулю гамильтониана системы $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{N}) = 0$; $\mathbf{N}$ — вектор рефракции. Низший порядок приближения геометрической оптики задает уравнения лучевых траекторий

$$\frac{d\mathbf{q}}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{N}} \Bigg/ \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{N}} \right|, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \Bigg/ \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{N}} \right|, \tag{3}$$

в которых переменной интегрирования s служит физическая длина.

Система уравнений (3) определяет траекторию луча и изменение показателя преломления вдоль нее. Представляя ВЧ-поле как ансамбль лучей с некоторыми начальными координатами $\mathbf{q}_0$ и показателями преломления $\mathbf{N}_0$, можно восстановить волновой фронт, решая (3). Учет поглощения ВЧ-мощности может быть произведен в следующем порядке приближения геометрической оптики, задающем уравнение переноса:

$$\frac{dP_{ray}}{ds} = -2\frac{\omega}{c}\mathrm{Im}N_\perp \frac{v_{gr\perp}}{|\mathbf{v}_{gr}|}P_{ray}, \qquad (4)$$

где $v_{gr\perp}$ и $\mathrm{Im}N_\perp$ — поперечная (по отношению к внешнему магнитному полю) компонента групповой скорости и мнимая часть поперечного показателя преломления ВЧ-волны соответственно, c — скорость света, P_{ray} — мощность ВЧ-поля.

Из (4) следует, что перенос мощности вдоль лучевой траектории определяется эволюцией мнимой части показателя преломления. Поскольку метод Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна предполагает, что среда является слабодиссипативной, мнимую часть поперечного показателя преломления можно найти по теории возмущений, разлагая дисперсионное соотношение в ряд по малому параметру:

$$\mathrm{Im}N_\perp = -\mathrm{Im}\mathscr{D}(\omega, \mathrm{Re}\mathbf{N}) \Big/ \frac{\partial \mathrm{Re}\mathscr{D}}{\partial N_\perp}. \qquad (5)$$

Требование существования нетривиального решения в виде (1) задает закон дисперсии среды с тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik}, определяющим ее электродинамические свойства. Этот закон имеет вид

$$\mathscr{D} = \det\left(N^2\left[\frac{N_i N_k}{N^2} - \delta_{ik}\right] + \varepsilon_{ik}\right), \qquad (6)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера, N_i — i-компонента вектора рефракции. Действительная часть (6) используется в качестве гамильтониана в уравнениях (3): $\mathscr{H} = \mathrm{Re}\mathscr{D}$.

Хорошо известное приближение холодной плазмы в большинстве случаев адекватно описывает распространение НГ-волн [7]. В таком приближении тензор диэлектрической проницаемости ε_{ik} в локальной системе координат (СК), связанной с внешним магнитным полем, имеет вид [8]:

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -ig & 0 \\ ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\varepsilon = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2},$$

$$g = -\sum_s \frac{\omega_{cs}}{\omega}\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2 - \omega_{cs}^2}, \qquad \eta = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}, \qquad (8)$$

суммирование проводится по всем сортам частиц; ω_{ps}^2 — квадрат плазменной частоты, а ω_{cs} — циклотронная частота.

В качестве глобальной естественно взять СК, связанную с магнитными поверхностями; переход от цилиндрической СК [9] к ней задается соотношениями

$$R(\rho, \theta) = R_0 + \Delta(\rho) + \rho\cos\theta - \rho\delta(\rho)\sin^2\theta,$$

$$\varphi = -\varphi,$$

$$Z(\rho, \theta) = \rho\lambda(\rho)\sin\theta. \qquad (9)$$

Здесь R_0 — большой радиус токамака; ρ, θ — метка магнитной поверхности и полоидальный угол соответственно; $\Delta(\rho)$, $\delta(\rho)$, $\lambda(\rho)$ — электродинамические моменты [10]: шафрановский сдвиг, треугольность и вытянутость.

Совокупность приведенных уравнений — система лучевых уравнений (3), уравнение переноса мощности (4), выражение для мнимой части показателя преломления (5) и дисперсионное соотношение с тензором диэлектрической проницаемости (7) — составляет математическую основу кода IRIS [9].

Для типичных параметров токамака ФТ-2 с использованием трех схем — двухстадийного симплектического метода Гаусса–Лежандра, классического пятистадийного метода Рунге–Кутты и того же метода Рунге–Кутты, но оснащенного ортогональной проекцией на многообразие — было рассчитано несколько лучевых траекторий, и в каждой точке вдоль них определялись значения дисперсионного соотношения и абсолютной ошибки в поперечном показателе преломления $\Delta N_\perp = \left|N_\perp^{Ray\ tracing} - N_\perp^{Dispersion\ relation}\right|$. При использовании классического метода Рунге–Кутты (Runge–Kutta without manifold projection, далее RK without MP) дисперсионное соотношение все дальше отходит от начального значения (рис. 1), т. е. происходит вековой дрейф гамильтониана. Кроме того, фиксируется накопление ошибки $\Delta N_\perp$ в поперечном показателе преломления $N_\perp$. Симплектический метод (Symplectic GL) свободен от этого недостатка, но требует значительных вычислительных затрат. Чтобы сохранить это преимущество при приемлемой скорости расчетов, классический метод Рунге–Кутты был дополнен ортогональной проекцией на каждом шаге интегрирования на многообразие нулевого гамильтониана. Такая проекционная схема (Runge–Kutta with manifold projection, далее RK with MP) выступает как эрзац-метод симплектическому, воспроизводя важное его свойство — отсутствие векового дрейфа гамильтониана. Результаты расчетов методом с проекцией согласуются (рис. 1 и 2) с данными симплектического интегрирования. Проекции лучевых траекторий на полоидальное сечение токамака, рассчитанные методом с проекцией и симплектическим методом, накладываются друг на друга, тогда как траектория, построенная классическим методом без проекции, расходится с первыми двумя. Кроме того, у последней

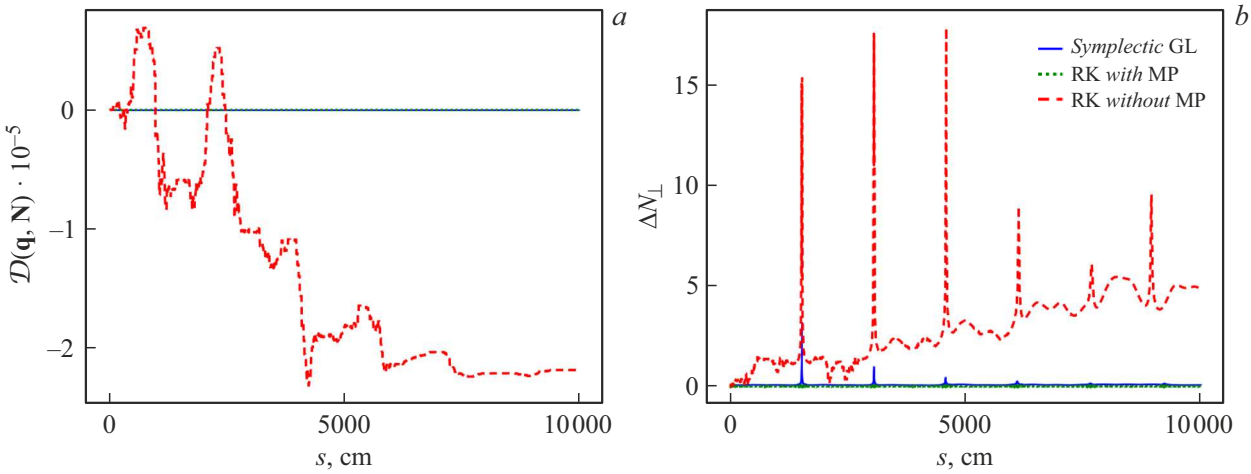


Рис. 1. Величина дисперсионного соотношения (a) и абсолютная ошибка в поперечном показателе преломления $N_\perp$ (b), полученные в процессе решения уравнений Гамильтона разными методами. Штриховая линия — классический метод Рунге–Кутты, пунктирная — тот же метод, но с ортогональной проекцией решения на многообразие $\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{N})=0$, сплошная — результат, полученный симплектическим методом Гаусса–Лежандра с шагом интегрирования $ds = 10^{-3}$ cm при прочих равных условиях.

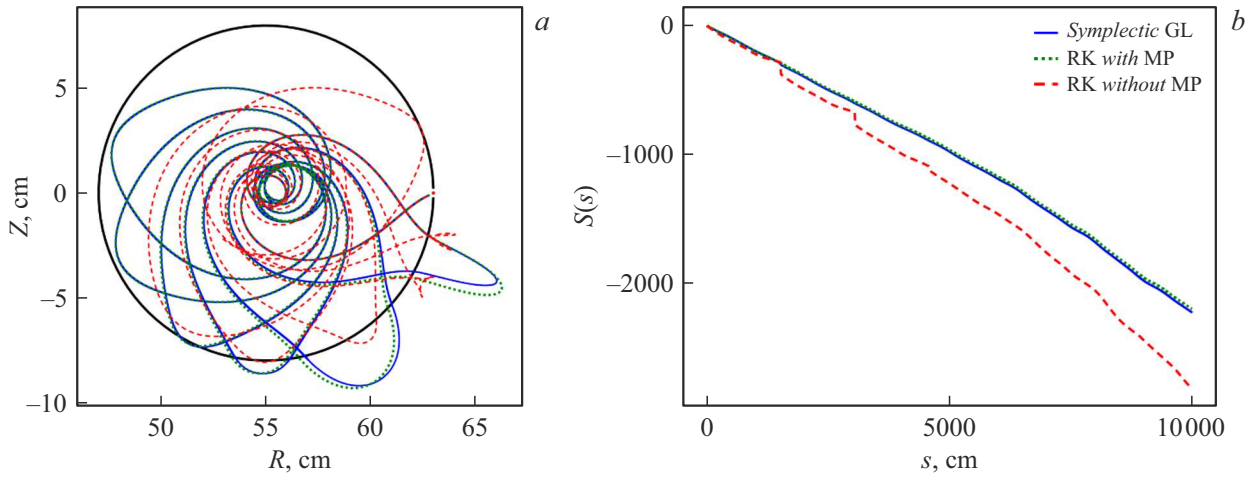


Рис. 2. Проекция лучевой траектории на полоиадальное сечение токамака ФТ-2 (a) и величина действия (b), полученные в процессе решения уравнений Гамильтона разными методами. Штриховая линия — классический метод Рунге–Кутты, пунктирная — тот же метод, но с ортогональной проекцией решения на многообразие $\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{N})=0$, сплошная — результат, полученный симплектическим методом Гаусса–Лежандра с шагом интегрирования $ds = 10^{-3}$ cm при прочих равных условиях. Темная окружность на части a — последняя замкнутая магнитная поверхность.

иная величина фазы (действия), что может негативно сказаться при восстановлении электрического поля по лучевым траекториям. Фазы, вычисленные симплектическим методом и методом с проекцией, накладываются друг на друга (рис. 2, b). Таким образом, результаты симплектического метода и метода с проекцией хорошо согласуются (не происходит накопления ошибки в поперечном показателе преломления, траектории в области удержания совпадают). В итоге для изучения влияния несохранения гамильтониана на профили энерговыделения и другие физические характеристики вместо симплектического метода, который оказывается крайне медленным, используется его быстрая альтернатива — метод Рунге–Кутты с ортогональной проекцией.

В качестве объекта для такого исследования был выбран эксперимент по генерации тока увлечения на токамаке ФТ-2. Параметры разряда [11]: тороидальное поле $B_0 = 2.2$ T, полный ток $I_{pl} = 30$ kA, большой радиус $R_0 = 0.55$ m, малый радиус $a = 0.08$ m; плазма преимущественно водородная с эффективным зарядом $Z_{eff} = 1.8$. Профили электронной температуры и плотности приведены в [9]. Электронная температура в центре плазменного шнура $T_{e0} = 498$ eV, плотность $n_{e0} = 1.7 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m}^{-3}$. Полная ВЧ-мощность, излучаемая антенной типа grill, составляла $P_{abs} = 200$ kW. Вертикальная высота волноводов составляет 0.14 m. Спектр излучения антенны на частоте $f_0 = 920$ MHz, рассчитанный кодом Grill3D [12], для наглядности разбит на

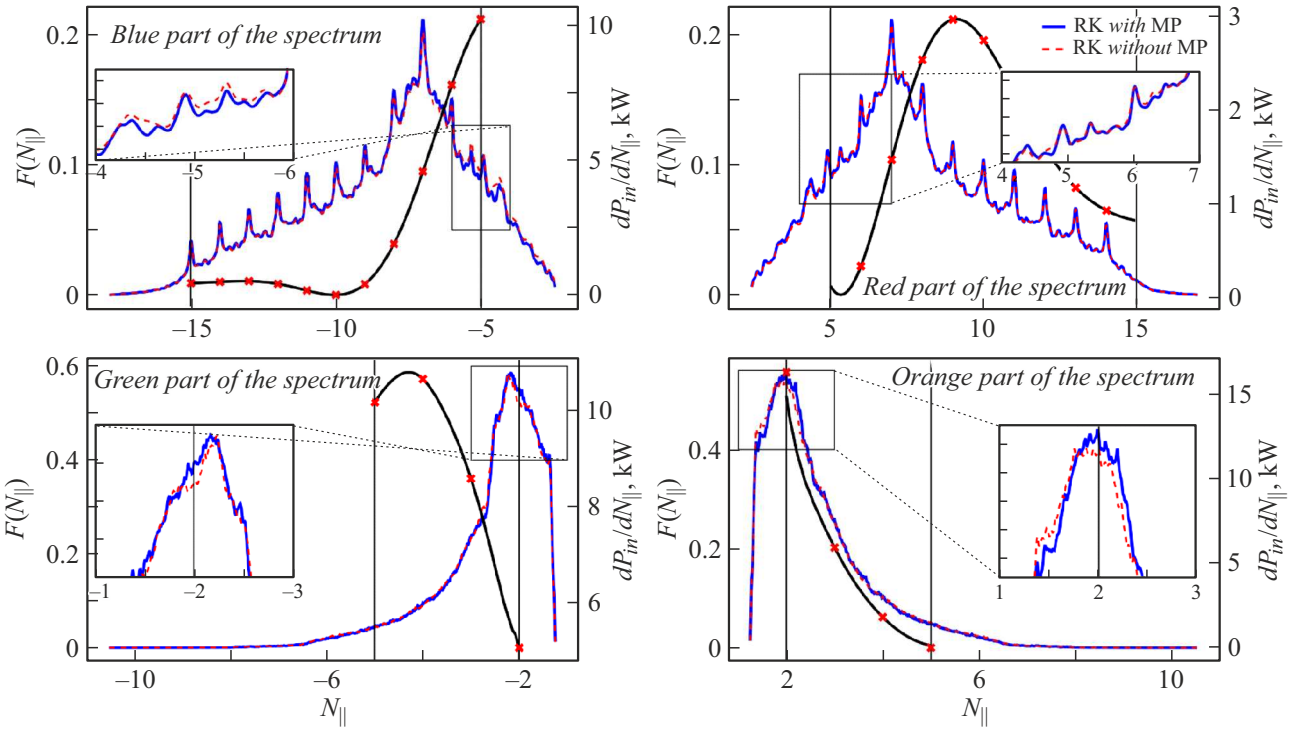


Рис. 3. Функция распределения (PDF) точек в фазовом пространстве и спектр излучения сфазированной двухволноводной антенны в зависимости от продольного показателя преломления для четырех спектральных областей: синей, красной, зеленой и оранжевой. Сплошной линией показана функция, полученная методом с проекцией (RK with MP), штриховой — без проекции (RK without MP). Сплошная линия с крестиками — спектр (крестиками изображены точки, вошедшие в расчет). Вертикальными отрезками отмечены границы спектральных областей в начальный момент интегрирования.

четыре области: синюю и красную ($|N_{||}| > 5$), зеленую и оранжевую ($1.2 < |N_{||}| \leqslant 5$) (вертикальные отрезки на рис. 3). Излучающая область разбивалась на 50 точек, из каждой выходило 27 лучей, отвечающих всему спектру НГ-грилла (многоканальная сфазированная антенная решетка). Критерий остановки расчета луча — поглощение ВЧ-мощности с точностью выше 99.9 %.

Для каждой спектральной области были рассчитаны функция распределения (probability density function, PDF) точек в фазовом пространстве и плотность поглощенной по механизму Ландау мощности. Поясним, что под функцией распределения здесь понимается количество точек, попавших в заданный интервал по продольному замедлению, отнесенное к ширине этого интервала и полному числу точек. Такая величина отражает статистические свойства системы и характеризует поведение не отдельных лучевых траекторий, а их ансамбля в целом. Сравнение PDF, рассчитанных разными численными схемами, дает возможность выявить систематические погрешности, которые проявляются как устойчивые различия в положении пиков, ширине распределения или общем виде функции. Из рис. 3 следует, что несохранение гамильтониана не вносит систематического вклада в эту характеристику: положения максимумов распределений практически не смещаются. Различие между методами проявляется в виде случайной ошибки — изменении формы отдельных участков кривых. Заметим, что наибольшие различия наблюдаются при низких значениях продольного показателя преломления. Это связано с тем, что лучи с малыми замедлениями являются слабозатухающими и обладают длинными траекториями. Однако эти различия в функциях распределения не обязательно ведут к заметным расхождениям в энергетических характеристиках. Чтобы проверить это, обратимся к профилям поглощенных мощностей.

Профили удельной поглощенной мощности, полученные с помощью проекционной и беспроекционной схем, визуально близки (рис. 4). Для синей области $P_{total} = 2.13 \cdot 10^4$ W обе схемы дают долю поглощенной по механизму Ландау мощности $P_{Landau}/P_{total} = 93.39\,\%$; для красной ($P_{total} = 1.62 \cdot 10^4$ W) — $P_{Landau}/P_{total} = 94.13\,\%$; в зеленой области ($P_{total} = 2.94 \cdot 10^4$ W) проекционная схема приводит к $P_{Landau}/P_{total} = 69.62\,\%$, а беспроекционная — к $P_{Landau}/P_{total} = 70.43\,\%$; наконец, в оранжевой ($P_{total} = 2.34 \cdot 10^4$ W) соответствующие доли составляют $P_{Landau}/P_{total} = 26.32$ и $27.03\,\%$. В среднем по всем интервалам различие между схемой, сохраняющей первый интеграл движения, и схемой, не сохраняющей его, по величине P_{Landau} не превышает 1 %, что указывает на слабое влияние численной ошибки, накапливающейся в беспроекционной схеме.

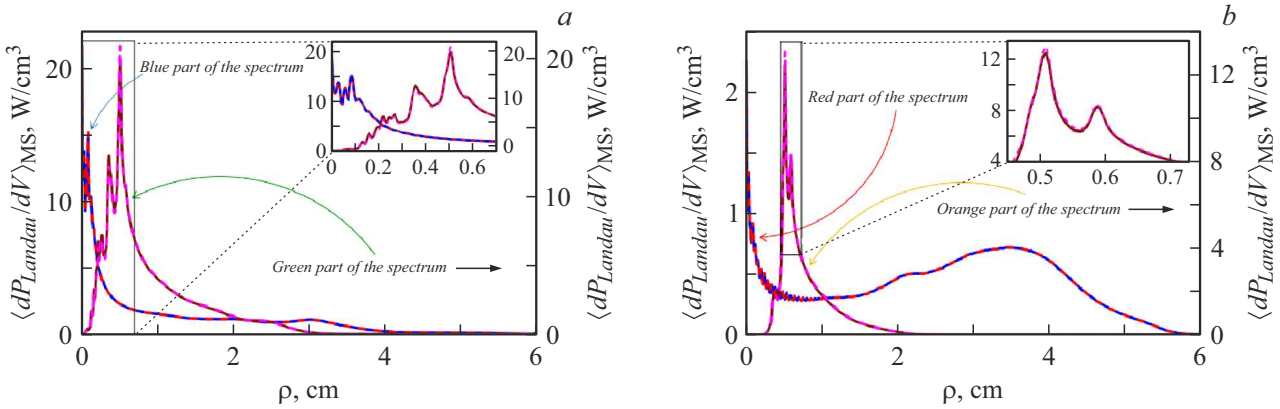


Рис. 4. Плотности поглощенной мощности по механизму Ландау, усредненные по магнитной поверхности, для синей и зеленой (*a*) и красной и оранжевой (*b*) областей спектра, полученные с помощью двух методов. Сплошные линии — метод с проекцией (RK with MP), штриховые — метод без проекции (RK without MP).

Таким образом, в работе проведено сравнение трех численных методов интегрирования лучевых уравнений: классического метода Рунге–Кутты, метода Рунге–Кутты с ортогональной проекцией на многообразие нулевого гамильтониана и симплектического метода Гаусса–Лежандра на примере расчета единичных лучей. Установлено, что классический метод Рунге–Кутты приводит к вековому дрейфу гамильтониана от истинного значения и накоплению численной ошибки, тогда как два других метода дают хорошо согласованные результаты. Поскольку симплектический метод сильно уступает в производительности, а результаты симплектического моделирования согласуются с результатами, полученными с использованием проекционной схемы, для анализа распространения и поглощения волн в условиях, требующих расчета большого числа лучевых траекторий со множеством спектральных компонент, использовались методы Рунге–Кутты с проекцией и без нее. Сравнение показало, что несохранение гамильтониана не вносит систематической ошибки и небольшие различия в функциях распределения по продольному показателю преломления, наблюдаемые между методами, сопровождаются столь же незначительными отличиями в профилях поглощенной мощности — наиболее важных с практической точки зрения характеристиках. В среднем различия в полной поглощенной мощности не превышают 1 %. Таким образом, в условиях существенной стохастизации лучевых траекторий НГ-волн [13], характерной для холодной плотной плазмы токамака ФТ-2, классический метод Рунге–Кутты обеспечивает приемлемую точность.

Финансирование работы

Данное исследование не получало внешнего финансирования.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] N.J. Fisch, Rev. Mod. Phys., **59** (1), 175 (1987). DOI: 10.1103/RevModPhys.59.175
[2] C. Gormezano, Plasma Phys. Control. Fusion, **28** (9A), 1365 (1986). DOI: 10.1088/0741-3335/28/9A/014
[3] Ю.А. Кравцов, Ю.И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред* (Наука, Новосибирск, 1980), с. 7–12. https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KravcovOrlov1980ru.pdf
[4] E. Hairer, G. Wanner, C. Lubich, *Geometric numerical integration* (Springer, Berlin–Heidelberg, 2002), p. 109–113, 167–208. DOI: 10.1007/3-540-30666-8
[5] J.C. Butcher, Math. Comput., **18** (85), 50 (1964). DOI: 10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9
[6] J.C. Butcher, *Encyclopedia of applied and computational mathematics* (Springer, Berlin–Heidelberg, 2015), vol. 2, p. 583–589. DOI: 10.1007/978-3-540-70529-1
[7] M. Brambilla, in *Heating in toroidal plasmas 1982*, ed. by C. Gormezano, G.G. Leotta, E. Sindoni (Pergamon, Oxford, 1982), vol. 2, p. 505–515. DOI: 10.1016/B978-1-4832-8428-6.50060-6
[8] M. Brambilla, *Kinetic theory of plasma waves: homogeneous plasmas* (Oxford University Press, N.Y., 1998), p. 164–174, 254–262. DOI: 10.1093/oso/9780198559566.001.0001
[9] Д.С. Новиков, *Численное моделирование лучевых траекторий электромагнитных волн промежуточного частотного диапазона в плазме токамака ФТ-2*, магистер. дис. (СПбПУ, СПб., 2026). DOI: 10.18720/SPBPU/3/2026/vr/vr26-4846
[10] Л.Е. Захаров, *Метод электродинамических моментов для расчета равновесия тороидальной плазмы*, препринт ИАЭ-4114/6 (Ин-т атомной энергии им. И.В. Курчатова, М., 1985). https://inis.iaea.org/records/xhqj0-fq077

[11] Д.С. Новиков, *Численное моделирование генерации тока увлечения с помощью волн промежуточного частотного диапазона в токамаке ФТ-2*, выпускная квалификационная работа бакалавра (СПбПУ, СПб., 2024). DOI: 10.18720/SPBPU/3/2024/vr/vr24-2532
[12] M.A. Irzak, O.N. Shcherbinin, Nucl. Fusion, **35** (11), 1341 (1995). DOI: 10.1088/0029-5515/35/11/I02
[13] А.Р. Эстеркин, *Особенности распространения нижнегибридных волн в плазме токамака*, канд. дис. (ФТИ им. А.Ф. Иоффе, СПб., 1993).