*03*

# Достаточное условие магнитовращательной устойчивости в неоднородном магнитном поле

*© Д.А. Шалыбков*

ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: shalybkov@yandex.ru

*Поступило в Редакцию 26 июня 2026 г.*
*В окончательной редакции 27 июля 2026 г.*
*Принято к публикации 26 августа 2026 г.*

В линейном приближении рассмотрена устойчивость вращающейся идеальной проводящей несжимаемой среды при наличии неоднородного магнитного поля, параллельного оси вращения. Получено достаточное условие устойчивости для осесимметричных возмущений. Это условие является обобщением достаточных условий Велихова и Чандрасекара для случая однородного магнитного поля.

**Ключевые слова:** вращение, линейная устойчивость, плазма, идеальная проводящая жидкость, течение Куэтта.

DOI: 10.61011/PJTF.2027.01.64113.20821

Достаточное условие устойчивости вращающейся идеальной несжимаемой среды (мы предпочитаем использовать этот термин, так как полученные результаты одновременно применимы как к проводящей жидкости, так и к плазме) по отношению к осесимметричным возмущениям получено Рэлеем [1]. В цилиндрической системе координат $(r, \varphi, z)$ это условие имеет вид

$$\frac{1}{r^3}\frac{d(r^2\Omega)^2}{dr} > 0, \qquad (1)$$

где $\Omega$ — угловая скорость вращения. Синдж [2] показал, что условие (1) является также необходимым условием устойчивости.

Для проводящей среды при наличии однородного магнитного поля, параллельного оси вращения, достаточное условие устойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям получено Велиховым [3]:

$$\frac{d}{dr}(\Omega^2) > 0. \qquad (2)$$

Более общее условие устойчивости (см. далее (14)) получено Чандрасекаром [4].

Согласно (1), течения с растущим по модулю угловым моментом устойчивы по отношению к осесимметричным возмущениям. При этом модуль их угловой скорости может убывать с радиусом. Согласно (2), устойчивы течения только с растущей по модулю угловой скоростью. Таким образом, однородное осевое магнитное поле, будучи, очевидно, устойчивым в отсутствие вращения, приводит к появлению новой неустойчивости, которую в настоящее время называют магнитовращательной неустойчивостью. Широкую известность эта неустойчивость получила после появления работы [5] как вероятный механизм неустойчивости аккреционных дисков. Численные расчеты для диссипативного течения Куэтта подтвердили наличие этой неустойчивости (см., например, [6]). Однако экспериментального подтверждения этой неустойчивости ввиду крайне низкого значения магнитных чисел Прандтля для жидких металлов до сих пор не получено.

В работе [7] было получено условие, при выполнении которого неоднородное магнитное поле (см. уравнение (11) из работы [7]) способствует развитию неустойчивости. Полученный результат не является общим условием устойчивости, так как он не учитывает устойчивость собственно самого вращения. Кроме того, полученное выражение имеет неправильную четность (при смене направления магнитного поля оно меняет знак). Последнее впрочем легко исправить умножением на альвеновскую частоту. В настоящей работе получено достаточное условие устойчивости вращающейся однородной идеальной проводящей несжимаемой среды при наличии неоднородного магнитного поля, параллельного оси вращения.

Движение несжимаемой идеальной проводящей среды с однородной плотностью $\rho$ описывается уравнениями идеальной магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathbf{U}\times\mathbf{B},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{U} = 0, \qquad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad (3)$$

где $\mathbf{U}$ — скорость, $\mathbf{B}$ — магнитное поле, $P$ — давление. При наличии вращения и соосного вращению магнитного поля в цилиндрической системе координат $(r, \varphi, z)$ с осью $z$ вдоль оси вращения уравнения (3) допускают стационарное решение вида

$$\rho = \mathrm{const}, \qquad P = P(r),$$

$$\mathbf{U} = (0, r\Omega(r), 0), \qquad \mathbf{B} = \big(0, 0, B_z(r)\big). \qquad (4)$$

Входящие в (4) величины связаны условием гидростатического равновесия

$$\frac{d}{dr}\left(P+\frac{B_z^2}{8\pi}\right)=\rho\Omega^2 r \tag{5}$$

и должны удовлетворять граничным условиям, которые будут рассмотрены далее.

Будем считать, что среда занимает область, неограниченную по вертикальной координате $z$, простирающуюся от внутреннего радиуса $r_{in}\geqslant 0$ до внешнего радиуса $r_{out}<\infty$ и занимающую весь угловой сектор $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

Для исследования линейной устойчивости линеаризуем систему (3), используя малые возмущения решения (4):

$$\mathbf{U}+\mathbf{u}=\big(u_r(t,r,\varphi,z),R\Omega(r)+u_\varphi(t,r,\varphi,z),u_z(t,r,\varphi,z)\big),$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{b}=\big(b_r(t,r,\varphi,z),b_\varphi(t,r,\varphi,z),B_z(r)+b_z(t,r,\varphi,z)\big),$$

$$P+p=P(r)+p(t,r,\varphi,z), \tag{6}$$

где возмущения $u_r$, $u_\varphi$, $u_z$, $b_r$, $b_\varphi$, $b_z$, $p$ малы по сравнению с типичными значениями соответствующих величин. Коэффициенты линеаризованной системы зависят только от радиальной координаты, и соответственно решение можно представить суммой нормальных мод вида

$$F=F_{mk\omega}(r)\exp\big[i(m\varphi+kz+\omega t)\big], \tag{7}$$

где $F$ представляет собой произвольную искомую функцию. С учетом геометрии задачи азимутальное число $m$ принимает произвольные целые значения, аксиальное число $k$ принимает произвольные вещественные значения, а инкремент $\omega$ может быть произвольным комплексным числом.

Если собственные частоты $\omega$ имеют только положительные мнимые части, то решение (4) устойчиво. При наличии хотя бы одной собственной частоты с отрицательной мнимой частью решение (4) неустойчиво.

В настоящей работе мы рассмотрим только осесимметричные возмущения с $m=0$ и непроницаемые стационарные границы. При этом линеаризованная система сводится к одному уравнению второго порядка для скорости $u_r$ (индексы $m$, $k$, $\omega$ (7) мы опускаем)

$$\frac{d}{dr}\left((\omega_a^2-\omega^2)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\right)-k^2(\omega_a^2-\omega^2)u_r$$

$$-k^2\frac{1}{r^3}\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2u_r+4\frac{k^2\omega_a^2\Omega^2}{\omega_a^2-\omega^2}u_r=0, \tag{8}$$

где $\omega_a^2=k^2B_z^2(r)/4\pi\rho$ — альвеновская частота. Непроницаемые стационарные граничные условия имеют вид

$$u_r(r_{in})=u_r(r_{out})=0. \tag{9}$$

Покажем, что, как и в случае однородного магнитного поля (см., например, [4]), квадрат частоты $\omega^2$ является вещественной величиной. Действительно, умножая уравнение (8) на $ru_r^*$ ($u_r^*$ — комплексно-сопряженная величина к $u_r$), интегрируя по частям с учетом граничных условий (9), для мнимой части получим

$$2\omega_r\omega_i\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\left[\frac{1}{r}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|^2+\left(k^2+4\frac{k^2\omega_a^2\Omega^2}{|\omega_a^2-\omega^2|^2}\right)r|u_r|^2\right]dr=0, \tag{10}$$

где $\omega_r$ и $\omega_i$ — вещественная и мнимая части частоты $\omega$. Интегральный множитель в выражении (10), очевидно, положителен, соответственно либо $\omega_r=0$, либо $\omega_i=0$. Отсюда следует, что $\omega^2$ — вещественное число.

Для получения достаточного условия устойчивости преобразуем последние два слагаемых уравнения (10):

$$\frac{d}{dr}\big((\omega_a^2-\omega^2)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_r)\big)-k^2(\omega_a^2-\omega^2)u_r$$

$$-k^2r\frac{d\Omega^2}{dr}u_r+4\frac{k^2\omega^2\Omega^2}{\omega_a^2-\omega^2}u_r=0. \tag{11}$$

Используя ту же процедуру умножения на комплексно-сопряженную величину и интегрирование по частям с учетом граничных условий (9), получим

$$\omega^2\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\left[\frac{1}{r}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|^2+\left(k^2+4\frac{k^2\Omega^2}{\omega_a^2-\omega^2}\right)r|u_r|^2\right]dr$$

$$=\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\left\{\omega_a^2\left[\frac{1}{r}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|+k^2r|u_r|^2\right]+k^2\frac{d\Omega^2}{dr}r^2|u_r|^2\right\}dr. \tag{12}$$

Предположим, что течение неустойчиво (т.е. $\omega^2<0$). В этом случае коэффициент при $\omega^2$ в левой части выражения (12) положителен. Соответственно правая часть должна быть отрицательной, и необходимым условием неустойчивости будет

$$\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\omega_a^2\left[\frac{1}{r}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|+k^2r|u_r|^2\right]dr<-\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}k^2\frac{d\Omega^2}{dr}r^2|u_r|^2dr. \tag{13}$$

Для однородного магнитного поля альвеновская частота постоянна, и условие (13) переходит в условие для однородного магнитного поля, полученное в [4]:

$$\omega_a^2\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}\left[\frac{1}{r}\left|\frac{d}{dr}(ru_r)\right|+k^2r|u_r|^2\right]dr<-\int\limits_{r_{in}}^{r_{out}}k^2\frac{d\Omega^2}{dr}r^2|u_r|^2dr. \tag{14}$$

В настоящей работе получено необходимое условие неустойчивости (13) вращающейся однородной несжимаемой среды при наличии неоднородного магнитного поля, параллельного оси вращения. Согласно (13), достаточное условие устойчивости (2), полученное Велиховым [3] для однородного магнитного поля, справедливо и для неоднородного магнитного поля. При этом, если

условие (13) нарушается, это является более общим, чем условие (2), достаточным условием устойчивости.

Отметим, что из теории $Z$-пинча хорошо известно, что как однородное, так и неоднородное осевое магнитное поле устойчивы для идеальной среды (см., например, [8]) без вращения. Однако оба этих поля приводят к новой неустойчивости при наличии вращения (магнитовращательной неустойчивости). При этом в отличие от однородного магнитного поля неоднородное поле может быть неустойчивым и без вращения для диссипативной проводящей среды [9].

В заключение отметим, что, несмотря на долгую историю вопроса, магнитовращательная неустойчивость чрезвычайно активно изучается вплоть до настоящего времени. Работа [10] представляет пример теоретического исследования. Численные исследования в сравнении с экспериментом представлены в [11]. Работы [12,13] являются примером астрофизических приложений.

### Благодарности

Автор благодарит рецензентов за замечания, позволившие существенно улучшить стиль изложения материала.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

[1] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), Proc. R. Soc. Lond. A, **93**, 148 (1917). DOI: 10.1098/rspa.1917.0010
[2] J.L. Synge, Trans. R. Soc. Can., **27**, 1 (1933).
[3] Е.П. Велихов, ЖЭТФ, **36** (5), 1398 (1959). [E.P. Velikhov, Sov. Phys. JETP, **9** (5), 995 (1959).]
[4] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961).
[5] S.A. Balbus, J.F. Hawly, Astrophys. J., **376**, 214 (1991). DOI: 10.1086/170270
[6] Д.А. Шалыбков, УФН, **179** (9), 971 (2009). DOI: 10.3367/UFNr.0179.200909d.0971 [D.A. Shalybkov, Phys. Usp., **52** (9), 915 (2009). DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909d.0971]
[7] В.И. Ильгисонис, И.В. Хальзов, Письма в ЖЭТФ, **86** (11), 815 (2007). [V.I. Ilgisonis, I.V. Khalzov, JETP Lett., **86** (11), 705 (2008). DOI: 10.1134/S002136400723004X]
[8] J.P. Freidberg, *Ideal MHD* (Cambridge University Press, Cambridge, 2014).
[9] Д.А. Шалыбков, ЖЭТФ, **142** (6), 1234 (2012). [D.A. Shalybkov, JETP, **115** (6), 1083 (2012). DOI: 10.1134/S106377611211009X]
[10] W. Zhao, R. Zi, Arch. Rat. Mech. Anal., **248**, 47 (2024). DOI: 10.1007/s00205-024-01996-8
[11] Y. Wang, F. Ebrahimi, H. Lu, J. Goodman, E.P. Gilson, H. Ji, Phys. Rev. Lett., **134**, 135101 (2025). DOI: 10.1103/PhysRevLett.134.135101
[12] T. Celora, C. Palenzuela, D. Viganó, R. Aguilera-Miret, Astron. Astrophys., **706**, A37 (2026). DOI: 10.1051/0004-6361/202555395
[13] V. Durepaire, L. Petitdemange, K. Belkacem, A. Guseva, L. Manchon, R. Hollerbach, F. Daniel, Astron. Astrophys., **707**, A167 (2026). DOI: 10.1051/0004-6361/202558545