03

Вычислительная верификация обобщенного критерия фон Неймана для течений с высокотемпературными эффектами на сильных скачках уплотнения

© М.М. Лаптинская, М.В. Чернышов

Балтийский государственный технический университет „ВОЕНМЕХ“ им. Д.Ф. Устинова,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: chernyshov_mv@voenmeh.ru

Поступило в Редакцию 18 июня 2026 г.
В окончательной редакции 14 июля 2026 г.
Принято к публикации 26 августа 2026 г.

Проведено численное моделирование отражения косых скачков уплотнения в детонационноспособной газовой смеси водорода с воздухом. Выявлено маховское отражение относительно слабых скачков уплотнения, которые в инертной смеси двухатомных газов отражаются только регулярно. Причиной нерегулярного отражения этих скачков является детонационное энерговыделение на возникающем маховском скачке. Полученные численные результаты сопоставляются с аналитически выведенным ранее обобщенным критерием фон Неймана для смены типа отражения в высокоскоростных сверхзвуковых реакционноспособных и высокотемпературных течениях и впервые верифицируют его путем вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: сверхзвуковое течение, скачок уплотнения, регулярное отражение, маховское отражение, критерий фон Неймана, детонационная волна, вычислительная верификация.

DOI: 10.61011/PJTF.2027.01.64112.20817

Сверхзвуковые течения газов и газовых смесей, как правило, сопровождаются образованием скачков уплотнения и других газодинамических разрывов, их регулярным или нерегулярным взаимодействием и отражением от поверхностей различной формы и природы [1,2]. В зависимости от параметров падающего косого скачка уплотнения и набегающего на него потока отражение от плоскости симметрии течения может происходить как в регулярном, так и в нерегулярном маховском режиме. Аналогичным образом различают регулярные и нерегулярные режимы взаимодействия встречных косых скачков.

При нерегулярном отражении падающего косого скачка (j_1 на рис. 1) возникает сильный главный (маховский) скачок уплотнения j_3 с дозвуковым течением за ним. Как показано, например, в работах [3,4], параметры течения за отраженным (j_2) и маховским (j_3) скачками, разделенные тангенциальным разрывом (τ), исходящим из тройной точки (T), существенно различны. Поток в области *3* за маховским скачком обладает заметно большей температурой, но меньшими значениями скорости, скоростного напора и давления торможения, что может быть эффективно использовано на практике: различие скоростей — в технологиях ударно-волновой резки [5], скоростных напоров — при управлении осколочным действием взрыва [6], а полных давлений — при газодинамическом проектировании сверхзвуковых воздухозаборников [7].

Сильное и резкое повышение температуры в реакционноспособной газовой смеси инициирует экзотермические превращения за маховским скачком уплотнения, который фактически превращается в стационарную детонационную волну. Одновременно происходит смена химического состава смеси: показатель адиабаты в области *3* за маховским скачком обычно заметно меньше, чем в набегающем потоке. Возможен и обратный эффект — поглощение энергии на главном скачке, связанное с высокотемпературными эффектами возбуждения колебательных степеней свободы, диссоциации и ионизации в химически нереагирующем газе.

В работах [8,9] получен и теоретически исследован так называемый обобщенный критерий фон Неймана — условие, описывающее параметры падающего скачка и течения перед ним, при которых происходит смена типа его отражения, если на возникающем прямом махов-

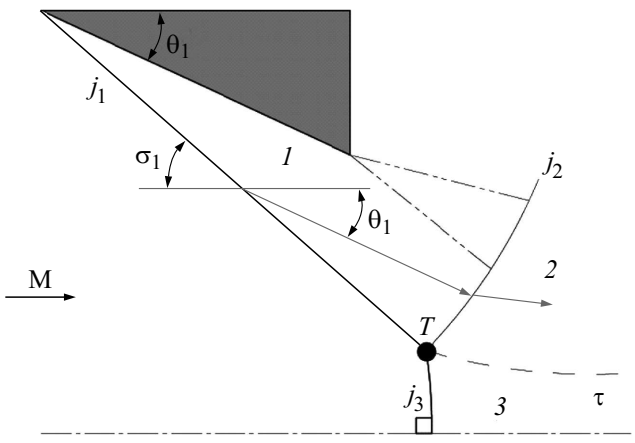


Рис. 1. Схема течения с маховским отражением в сужающемся канале, образованном двумя клиньями (верхняя половина).

ском скачке имеет место импульсное выделение или поглощение энергии, а также изменение состава газовой смеси, математически выражаемое в виде изменения показателя адиабаты. Интенсивность J_1 такого скачка (отношение статического давления p_1 в области *1* за ним к давлению p в набегающем потоке) является корнем уравнения

$$\sum_{n=0}^{5} H_n J_1^n = 0, \qquad (1)$$

где

$$H_5 = 1-\varepsilon,$$

$$H_4 = -\left[2(1+\varepsilon-\varepsilon^2)\mathrm{M}^2 + (1-\varepsilon)(2-2\varepsilon-\varepsilon J_3)\right],$$

$$H_3 = (1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)\mathrm{M}^4 + \left[2-6\varepsilon^2+\varepsilon^3-\varepsilon^2 J_3(2-\varepsilon)\right]\mathrm{M}^2 + (1-\varepsilon)\left(1-4\varepsilon+\varepsilon^2+(1-\varepsilon)^2 J_3\right),$$

$$H_2 = -\varepsilon(1+\varepsilon)(J_3-2\varepsilon)\mathrm{M}^4 + \varepsilon\left[\varepsilon J_3^2 - (2-3\varepsilon+2\varepsilon^2)J_3 + 2(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)\right]\mathrm{M}^2 + 2(1-\varepsilon)\left[\varepsilon-\varepsilon^2-J_3(1-\varepsilon+\varepsilon^2)\right],$$

$$H_1 = -(1+\varepsilon)\left[\varepsilon^2+(1+\varepsilon^2)J_3\right]\mathrm{M}^4 + \varepsilon\left[2J_3^2+(1-2\varepsilon+2\varepsilon^2)J_3 - 1 + 2\varepsilon^2\right]\mathrm{M}^2 + (1-\varepsilon)\left[\varepsilon^2+J_3(1-\varepsilon)^2\right],$$

$$H_0 = -J_3\left[\varepsilon(1+\varepsilon)\mathrm{M}^4 + (1-2\varepsilon^2-J_3)\mathrm{M}^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)\right].$$

Здесь $\varepsilon = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, γ — показатель адиабаты газовой смеси в набегающем потоке с числом Маха M, а J_3 — интенсивность прямого главного (маховского) скачка, зависящая от энерговыделения и изменения химического состава смеси

$$J_3 = \frac{\gamma+1}{\gamma_3+1}\frac{J_m+1}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2\mathrm{M}^4+\gamma_3^2-2\gamma\mathrm{M}^2\left[(\gamma_3^2-1)\bar{\varphi}\ +(\gamma_3^2-\gamma)/(\gamma-1)\right]}}{\gamma_3+1},$$

где $J_m = (1+\varepsilon)\mathrm{M}^2-\varepsilon$ — интенсивность прямого скачка в потоке инертного газа с данным числом Маха, γ_3 — показатель адиабаты за главным скачком, $\bar{\varphi} = \varphi/(p/\rho) = \gamma\varphi/\left[(\gamma-1)c_pT\right]$ — безразмерное энерговыделение на сильном скачке, φ — удельное энерговыделение (отнесенное к единице массы газовой смеси в целом), а ρ, c_p и T — плотность, удельная изобарная теплоемкость и температура в невозмущенном потоке.

При отсутствии энерговыделения ($\varphi = 0$) и сохранении химического состава газовой смеси ($\gamma_3 = \gamma$) соотношение (1) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{3} A_n J_1^n = 0, \qquad (2)$$

где

$$A_3 = 1-\varepsilon,$$

$$A_2 = -\left[(1+\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3)\mathrm{M}^2 + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon+\varepsilon^2)\right],$$

$$A_1 = \varepsilon\left[(1+\varepsilon)\mathrm{M}^2+1-\varepsilon\right]\left[(1-\varepsilon)\mathrm{M}^2-2+\varepsilon\right],$$

$$A_0 = (1-\varepsilon)(\mathrm{M}^2-1)\left((1+\varepsilon)\mathrm{M}^2-\varepsilon\right),$$

и определяет „классический“ критерий фон Неймана, полученный для отражения скачка уплотнения в инертном газе [10,11]. Уравнение (2) описывает минимальную интенсивность падающего скачка, необходимую для его маховского отражения в инертном газе, исключая течения с малыми сверхзвуковыми числами Маха [12]. Однако при постепенном увеличении интенсивности скачка выше этого значения его регулярное отражение может сохраняться, что связано с гистерезисными явлениями [13].

Сравнение решений (1) и (2) показывает, что возможность детонационного энерговыделения на маховском скачке заметно смещает критерий фон Неймана в сторону более слабых падающих скачков. Смещение по углу σ_1 падения скачка, связанному с его интенсивностью соотношением $\sigma_1 = \arcsin\sqrt{(J_1+\varepsilon)/\left[(1+\varepsilon)\mathrm{M}^2\right]}$, а также по углу θ_1 поворота потока на падающем скачке достигает 5–7°. Обратное смещение, вызванное сопутствующим уменьшением показателя адиабаты, в несколько раз менее существенно. В результате должно происходить маховское отражение падающих скачков, которые в инертном газе отражаются только регулярно.

Обобщенный критерий, выражаемый формулой (1), получен путем введения ряда допущений. В частности, предполагается, что смещение критерия фон Неймана по сравнению с отражением в инертном газе определяется детонационными и другими высокотемпературными эффектами на маховском скачке, в то время как на падающем и отраженном скачках они также возможны [14–16]. Кроме того, к маховскому скачку применяется модель стационарной детонации Чепмена–Жуге, а возможная [16–18] индукционная зона за этой и другими детонационными волнами не рассматривается. В силу ограничивающего характера этих предположений обобщенный критерий (1) должен быть верифицирован — сначала в вычислительном, а затем и в физическом эксперименте.

Далее приводится несколько примеров, демонстрирующих смещение критерия перехода от маховского отражения к регулярному в сторону более слабых падающих скачков, а также возможность применения критерия (1) для оценки этого смещения.

С использованием пакета вычислительной гидрогазодинамики ANSYS Fluent моделируется течение водородо-воздушной смеси с близким к стехиометрическому отношением горючего (объемная доля H_2 — 29.307 %) и окислителя (O_2 — 14.845 %) в присутствии газа-разбавителя (N_2 — 55.848 %) с числом Маха M = 7,

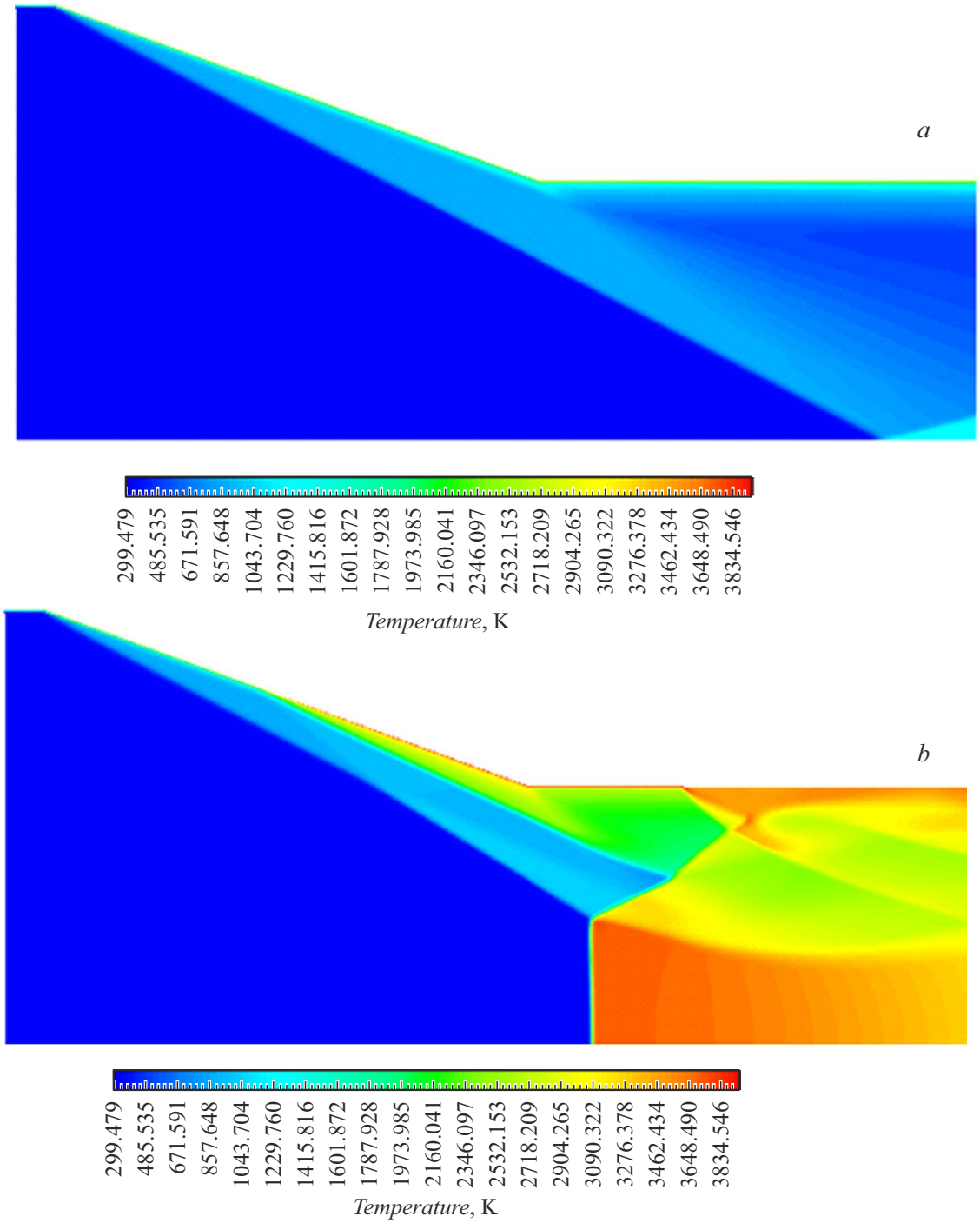


Рис. 2. Поле температуры течения при отражении скачка уплотнения с углом поворота потока, равным 20°. *a* — в инертной смеси, регулярное отражение; *b* — в реакционноспособной смеси, маховское отражение.

температурой невозмущенного потока $T = 300\,\mathrm{K}$ и его статическим давлением $p = 101\,325\,\mathrm{Pa}$ по плоскому сужающемуся каналу (высота входного сечения 26 mm), образованному двумя симметричными клиньями, наклоненными под углом θ_1 к плоскости симметрии. Длина наклонной поверхности клиньев подбиралась таким образом, чтобы волны разрежения, падающие из их хвостовых угловых точек, не оказывали влияния на интенсивность падающих скачков. Решались осредненные уравнения Навье–Стокса с замыканием моделью турбулентности $k-\omega$ SST. Были использованы две модели химической кинетики течения: упрощенная, включающая 14 реакций между 9 химическими компонентами [19], и более полная, в которой между этими компонентами происходит 21 реакция ([20] в модификации [21]). Применение обеих моделей химической кинетики привело

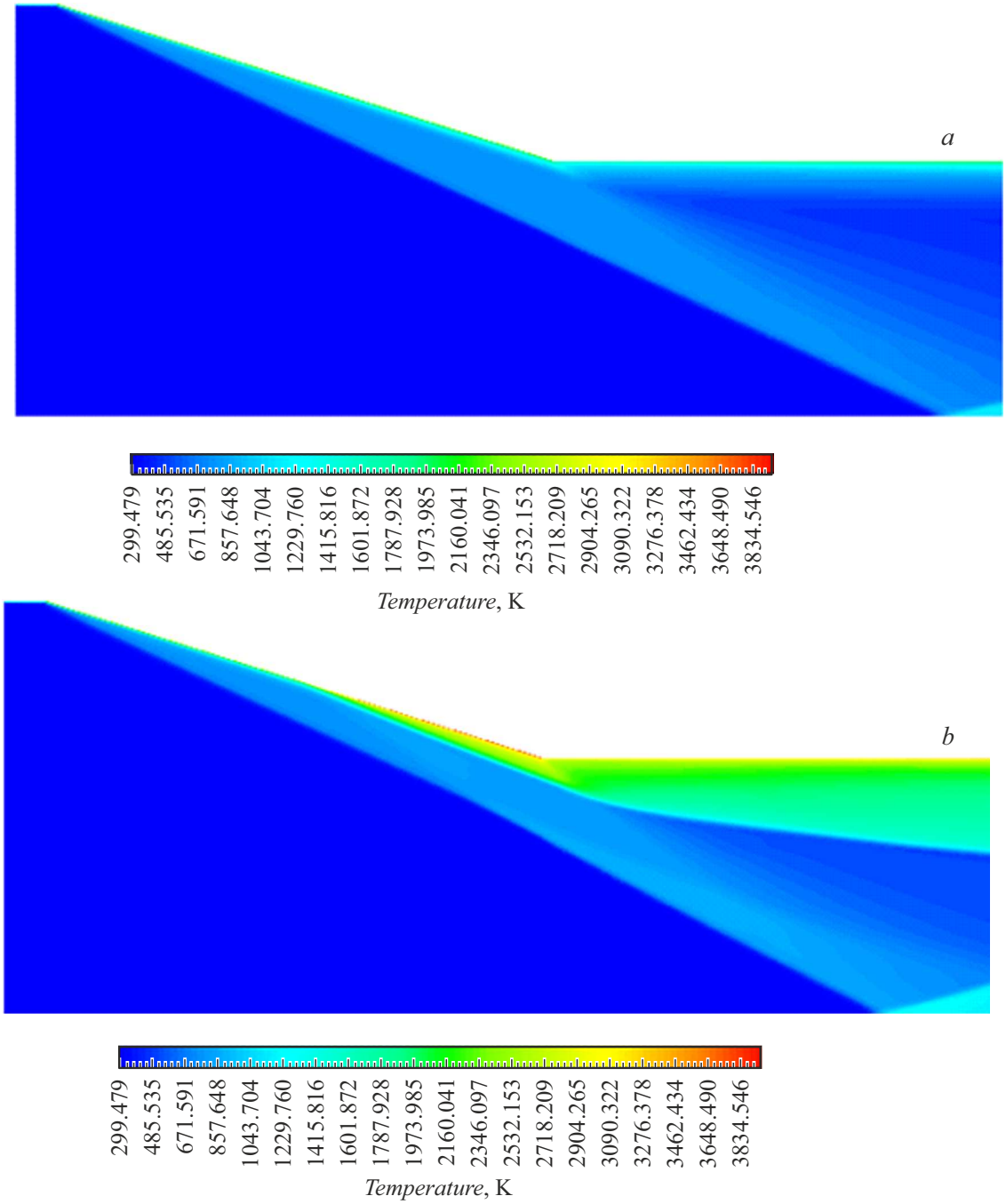


Рис. 3. Поле температуры течения при отражении скачка уплотнения с углом поворота потока, равным 17.5°. *a* — в инертной смеси, регулярное отражение; *b* — в реакционноспособной смеси, также регулярное отражение.

к визуально неотличимым результатам. Кроме того, верификация применяемых численных методов проводилась путем сравнения с результатами работы [17].

Согласно „классическому“ критерию фон Неймана, описываемому уравнением (2), смена типа отражения в нереагирующем двухатомном газе должна происходить при интенсивности падающего скачка $J_1 = 12.138$, соответствующей углу поворота потока $\theta_1 = 20.280°$ на его поверхности. Действительно, скачок с интенсивностью $J_1 = 11.869$, падающий с клина, наклоненного под углом $\theta_1 = 20°$, при искусственно введенном запрете на химические реакции отражается регулярно (рис. 2, *a*). Регулярный характер отражения в химически инертном газе сохраняется и при падении скачков меньшей интенсивности (рис. 3, *a*): $\theta_1 = 17.5°$, $J_1 = 9.602$.

Поскольку рассматриваемая газовая смесь не является химически инертной, высокая температура приводит к возбуждению экзотермических реакций с энерговыделением за маховским скачком $\varphi \approx 4.044$ MJ/kg, соответствующим удельной теплоте сгорания водоро-

да $\varphi \approx 141.8\,\mathrm{MJ/kg}$. При этом происходит уменьшение показателя адиабаты газовой смеси от $\gamma = 1.402$ до $\gamma_3 \approx 1.274$. Эти эффекты смещают критерий фон Неймана в сторону более слабых падающих скачков: решение уравнения (1) соответствует интенсивности $J_1 = 10.716$ и углу поворота потока $\theta_1 = 18.765^\circ$.

В соответствии с решением уравнения (1) скачок уплотнения с интенсивностью $J_1 = 11.869$, осуществляющий поворот потока на угол $\theta_1 = 20^\circ$, отражается от плоскости симметрии течения реакционноспособной смеси уже нерегулярно, с образованием визуально различимого маховского скачка и более сложной последующей ударно-волновой структуры (рис. 2, *b*). Таким образом, вычислительный эксперимент подтверждает смещение критерия фон Неймана смены типа отражения в реакционноспособной газовой смеси в сторону более слабых падающих скачков. При этом высота тройной точки составляет около 30 % от высоты входного сечения сужающегося канала, что примерно соответствует результатам применения приближенно-аналитической модели [22] ударно-волновой структуры течения с детонационными эффектами на маховском скачке к данным геометрическим и газодинамическим условиям. Модель [22] также подразумевает, что переход к регулярному отражению описывается обобщенным критерием фон Неймана (1).

Уменьшение интенсивности скачка уплотнения, падающего на плоскость симметрии течения реакционноспособной газовой смеси, ниже значения $J_1 = 10.716$ ($\theta_1 = 18.765^\circ$), предсказанного обобщенным критерием (1), приводит к регулярному отражению. Таково, в частности, отражение скачка уплотнения с углом поворота потока $\theta_1 = 17.5^\circ$ (рис. 3, *b*). Сравнение полей течения, показанных на рис. 2, *b* и 3, *b*, косвенно верифицирует обобщенный критерий фон Неймана не только качественно, но и количественно: условия смены типа отражения в детонационноспособной газовой смеси смещаются в сторону более слабых падающих скачков, а величина этого смещения примерно описывается уравнением обобщенного критерия фон Неймана (1).

Проведена вычислительная верификация обобщенного критерия фон Неймана смены типа отражения косых скачков уплотнения в высокоскоростных течениях при возможном выделении энергии и изменении показателя адиабаты на наиболее сильных скачках возникающей ударно-волновой структуры. Аналитически предсказанное смещение критерия фон Неймана в сторону более слабых падающих скачков по сравнению со случаем отражения в инертном газе впервые подтверждено путем вычислительного эксперимента.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-01185 (https://rscf.ru/project/25-29-01185/).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] А.Л. Адрианов, А.Л. Старых, В.Н. Усков, *Интерференция стационарных газодинамических разрывов* (Наука, Новосибирск, 1995).
[2] G. Ben-Dor, *Shock wave reflection phenomena* (Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 2007).
[3] В.Н. Усков, М.В. Чернышов, Прикладная механика и техническая физика, **47** (4), 39 (2006). [V.N. Uskov, M.V. Chernyshov, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **47** (4), 492 (2006). DOI: 10.1007/s10808-006-0081-5]
[4] М.В. Чернышов, Л.Г. Гвоздева, Изв. вузов. Авиационная техника, № 2, 87 (2022). [M.V. Chernyshov, L.G. Gvozdeva, Russ. Aeronaut., **65** (2), 319 (2022). DOI: 10.3103/s106879982202012x]
[5] Н.П. Михайлов, М.Я. Водопьянов, А.А. Клюквин, Вопросы оборонной техники. Сер. 16. Технические средства противодействия терроризму, № 5-6, 55 (2012).
[6] M.V. Chernyshov, K.E. Savelova, Acta Astron., **226** (1), 876 (2025). DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.11.017
[7] А.В. Омельченко, В.Н. Усков, Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа, № 6, 118 (1995). [A.V. Omel'chenko, V.N. Uskov, Fluid Dyn., **30** (6), 905 (1995). DOI: 10.1007/BF02078208]
[8] М.В. Чернышов, М.М. Лаптинская, Письма в ЖТФ, **52** (1), 10 (2026). DOI: 10.61011/PJTF.2026.01.61913.20437 [M.V. Chernyshov, M.M. Laptinskaya, Tech. Phys. Lett., **52** (1), 6 (2026). DOI: 10.61011/TPL.2026.01.62809.20437]
[9] М.В. Чернышов, М.М. Лаптинская, Письма в ЖТФ, **52** (12), 12 (2026). DOI: 10.61011/PJTF.2026.12.62979.20643 [M.V. Chernyshov, M.M. Laptinskaya, Tech. Phys. Lett., **52** (6), 50 (2026). DOI: 10.61011/TPL.2026.06.63802.20643]
[10] J. von Neumann, *Collected works* (Pergamon Press, London, 1963), vol. 6, p. 238.
[11] L.F. Henderson, Z. Angew. Math. Mech., **62** (6), 258 (1982). DOI: 10.1002/zamm.19820620608
[12] A. Sakurai, M. Tsukamoto, D. Khotyanovsky, M. Ivanov, Shock Waves, **21** (3), 267 (2011). DOI: 10.1007/s00193-011-0329-8
[13] M.S. Ivanov, D. Vandromme, V.M. Fomin, A.N. Kudryavtsev, A. Hadjadj, D.V. Khotyanovsky, Shock Waves, **11** (3), 199 (2001). DOI: 10.1007/PL00004075
[14] H. Li, G. Ben-Dor, H. Grönig, AIAA J., **35** (11), 1712 (1997). DOI: 10.2514/2.40
[15] А.В. Троцюк, А.Н. Кудрявцев, М.С. Иванов, Вычислительные технологии, **11** (S2), 37 (2006).
[16] А.Е. Медведев, Прикладная механика и техническая физика, **42** (2), 33 (2001). [A.E. Medvedev, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **42** (2), 211 (2001). DOI: 10.1023/A:1018811516116]
[17] G. Xiang, Y. Zhang, X. Gao, H. Li, X. Huang, Fuel, **295**, 120615 (2021). DOI: 10.1016/j.fuel.2021.120615
[18] D.M. Davidenko, I. Gökalp, A.N. Kudryavtsev, in *15th AIAA Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf.* (Dayton, OH, 2008), AIAA paper 2008-2680. DOI: 10.2514/6.2008-2680

[19] V.P. Zhukov, Int. Sch. Res. Notices, **2012** (1), 475607 (2012). DOI: 10.5402/2012/475607
[20] M. O'Conaire, H.J. Curran, J.M. Simmie, W.J. Pitz, C.K. Westbrook, Int. J. Chem. Kinet., **36** (11), 603 (2004). DOI: 10.1002/kin.20036
[21] И.Н. Боровик, И.Р. Фаризанов, Л.С. Яновский, Теплофизика и аэромеханика, **29** (1), 129 (2022). [I.N. Borovik, I.R. Farizanov, L.S. Yanovskii, Thermophys. Aeromech., **29** (1), 125 (2022). DOI: 10.1134/S0869864322010103]
[22] M.V. Chernyshov, K.E. Savelova, Fluids, **8** (4), 132 (2023). DOI: 10.3103/S1068799823010087