07,05

Фазовые переходы в часовой модели с числом состояния спина $q = 5$ на треугольной решетке при наличии конкурирующих взаимодействий

© М.К. Бадиев, М.А. Магомедов, А.К. Муртазаев

Институт физики ДФИЦ РАН,
Махачкала, Россия

E-mail: m_zagir@mail.ru

Поступила в Редакцию 11 сентября 2026 г.
В окончательной редакции 19 сентября 2026 г.
Принята к публикации 19 сентября 2026 г.

Методом Монте-Карло исследованы фазовые переходы и критические явления в двумерной часовой модели с числом состояний спина $q = 5$ на треугольной решетке с учетом ферромагнитного взаимодействия ближайших и антиферромагнитного взаимодействия вторых ближайших соседей. Рассмотрен широкий диапазон значений параметра обменного взаимодействия вторых ближайших соседей $J_2 = 0 - (-3.0)$. Показано, что величина J_2 определяет тип магнитного упорядочения и структуру основного состояния системы. На основе гистограммного анализа распределения энергии определен род фазовых переходов.

Ключевые слова: Метод Монте-Карло, магнитные структуры, квазиупорядоченная фаза, полосовой порядок, критическое поведение.

DOI: 10.61011/FTT.2026.10.64097.9991

1. Введение

Двумерные спиновые системы с непрерывной и дискретной симметрией служат ключевыми моделями в статистической физике для изучения универсальных свойств фазовых переходов (ФП). Согласно теореме Мермина–Вагнера [1], в двумерных системах с непрерывной симметрией при конечных температурах обычный дальний порядок невозможен. Классическим примером является XY-модель, фазовый переход в которой имеет топологическую природу и описывается теорией Березинского–Костерлица–Таулеса (БКТ) [2–4]. Данный механизм принципиально отличается от переходов второго рода, сопровождающихся спонтанным нарушением симметрии, и играет важную роль при описании низкоразмерных систем, таких как сверхтекучие пленки и двумерные сверхпроводники [5–10].

Среди множества спиновых моделей, часовая модель с различными числами состояния спина q служит уникальным объектом для исследования фундаментальных свойств дискретной и непрерывной симметрии. Данная модель широко исследовалась различными аналитическими и численными методами [11–14].

В случае $q = 2$ система полностью соответствует модели Изинга, проявляя ФП второго рода с критическим поведением, относящимся к универсальному классу Изинга и характеризующимся спонтанным нарушением Z_2-симметрии. При $q = 3$ реализуется модель Поттса с тремя состояниями спина, также демонстрирующая переход второго рода, но принадлежащая к другому классу универсальности. Особый интерес представляет случай $q = 4$, где благодаря специфической симметрии система становится эквивалентной двум независимым моделям Изинга, что объясняется распадом Z_4-симметрии на две Z_2. При дальнейшем увеличении q до значений 5 и более наблюдается качественное изменение поведения системы: появляется расширенная критическая область, формирующая промежуточную квазиупорядоченную фазу [15–27].

Несмотря на то, что ранние работы по методу Монте-Карло (МК, МС) [12,15–17] указывали на принадлежность обоих переходов в часовой модели к классу универсальности БКТ, впоследствии этот сценарий неоднократно оспаривался. Авторы работы [13] предположили, что переходы БКТ-типа реализуются лишь при $q \geq 8$. Альтернативный сценарий был предложен в работе [28], где был сделан вывод об отсутствии БКТ-переходов для $q = 6$.

Результаты работ [20,29] внесли важный вклад в дискуссию о природе ФП, показав, что наличие двойных переходов само по себе не гарантирует их принадлежность к БКТ-классу. Зафиксировав двойные переходы для $q = 5$ и 6, они продемонстрировали, что для $q = 6$ эти переходы действительно являются БКТ-подобными. Однако для случая $q = 5$, по их мнению, доминирование остаточной симметрии Z_5 приводит к другому механизму перехода, отличное от БКТ. Этот вывод стимулировал дальнейшие исследования, направленные на проверку роли дискретных симметрий в моделях с промежуточными значениями q.

Ввиду этих противоречивых результатов, особое внимание в последние десятилетия уделяется случаю $q = 5$. В этой модели критическое поведение системы опреде-

ляется геометрией решетки, дискретной симметрией и топологическими дефектами.

Настоящая работа посвящена детальному численному анализу критических свойств часовой модели с числом состояния спина $q = 5$ на треугольной решетке методом МК. В рамках исследования будут построены зависимости термодинамических параметров от температуры, проанализирован характер ФП при температурах Нееля T_{N1} и T_{N2}, а также построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей.

2. Модель и метод исследования

Гамильтониан часовой модели с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей имеет следующий вид:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j\rangle i\neq j} (S_i \cdot S_j) - J_2 \sum_{\langle i,k\rangle i\neq k} (S_i \cdot S_k)$$

$$= J_1 \sum_{\langle i,j\rangle i\neq j} \cos\theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k\rangle i\neq k} \cos\theta_{i,k}, \qquad (1)$$

где спиновые состояния q в узле I обозначены плоским углом $\theta_i = 2\pi ki/q$, $k = 1, \ldots, q$. Первая сумма описывает ферромагнитное ($J_1 > 0$) обменное взаимодействие между ближайшими спинами, вторая сумма — антиферромагнитное ($J_2 < 0$) обменное взаимодействие между следующими за ближайшими спинами. $\theta_{i,j}$, $\theta_{i,k}$ — углы между взаимодействующими спинами $S_i - S_j$ и $S_i - S_k$. Величина $J_1 = 1$, а величина взаимодействия вторых ближайших соседей варьировалась в интервале $J_2 = 0{-}(-3.0)$.

На рис. 1 представлена структура основного состояния часовой модели с числом состояния спина $q = 5$ на треугольной решётке. В левой верхней части рисунка приведена вставка, иллюстрирующая пять возможных направлений спина. Каждый узел решётки соответствует спину, принимающему одно из пяти дискретных направлений, равномерно распределённых по окружности. Таким образом, модель обладает дискретной симметрией Z_5. Как видно из рисунка, у каждого спина есть шесть ближайших (линия черного цвета) и шесть вторых ближайших соседей (линия красного цвета). Спины, обозначенные кружками одного и того же цвета, имеют одинаковое направление. В таких системах конкуренция обменных взаимодействий (например, ближайших и следующих ближайших соседей) может привести к вырождению основного состояния, где наблюдается множество состояний с одинаковой энергией, что делает аналитические подходы затруднительными.

Для изучения термодинамических свойств и ФП в подобных моделях широко применяются методы МК [30–34]. Современные алгоритмы данного метода позволяют решить проблему критического замедления в таких системах. Одними из наиболее эффективных являются алгоритм Ванга–Ландау [35] и репличный

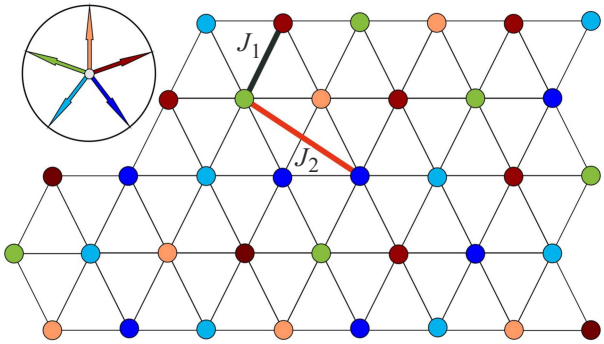


Рис. 1. Магнитная структура основного состояния часовой модели с числом состояний спина $q = 5$ на треугольной решетке.

обменный алгоритм [36] метода МК. В настоящей работе для получения результатов были использованы оба алгоритма.

Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $L \times L = N$, $L = 30{-}90$, где L — линейный размер решетки, N — количество спинов в системе. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался участок длиной $\tau_0 = 4 \cdot 10^5$ MCsteps/spin, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических величин выполняли вдоль марковской цепи длиной $\tau = 5\tau_0$ MCsteps/spin.

Алгоритм Ванга–Ландау является эффективным методом для расчета плотности состояния энергии. Преимущество алгоритма заключается в том, что плотность состояний $g(E)$ в системе не зависит от температуры. Зная плотность состояний, можно рассчитать температурную зависимость любого интересующего нас термодинамического параметра.

На рис. 2 и 3 приведены плотности состояний $g(E)$ для разных линейных размеров системы L при значениях параметра обменного взаимодействия $J_2 = -0.2$ и $J_2 = -2.0$. Полученные зависимости позволяют проследить влияние конкурирующих обменных взаимодействий на структуру энергетического спектра модели.

Для случая $J_2 = -0.2$ кривые $\ln(g(E))$ имеют гладкую куполообразную форму. По мере увеличения линейного размера системы наблюдается закономерный рост максимальных значений плотности состояний, обусловленный экспоненциальным увеличением числа доступных микроскопических конфигураций. При этом форма распределений сохраняется практически неизменной. Для более сильного антиферромагнитного взаимодействия вторых ближайших соседей $J_2 = -2.0$ характер зависимостей меняется. Правая ветвь кривых становится более растянутой, что указывает на значительное расширение области высокоэнергетических состояний. Подобное поведение связано с усилением конкуренции между взаимодействиями ближайших и вторых ближайших соседей,

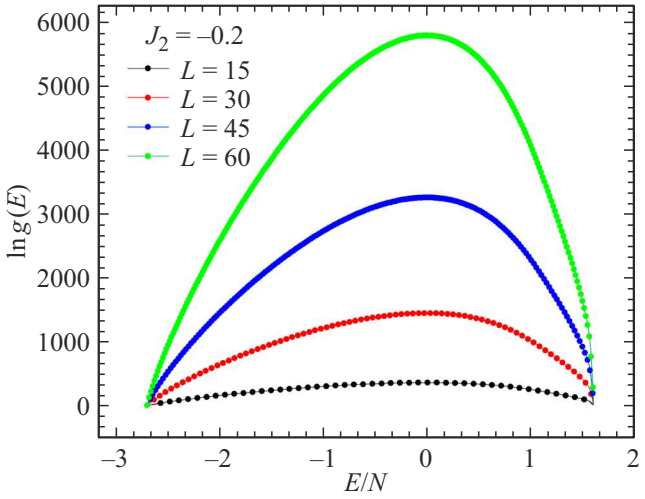


Рис. 2. Плотность состояний $g(E)$ при различных линейных размерах L для $J_2 = -0.2$.

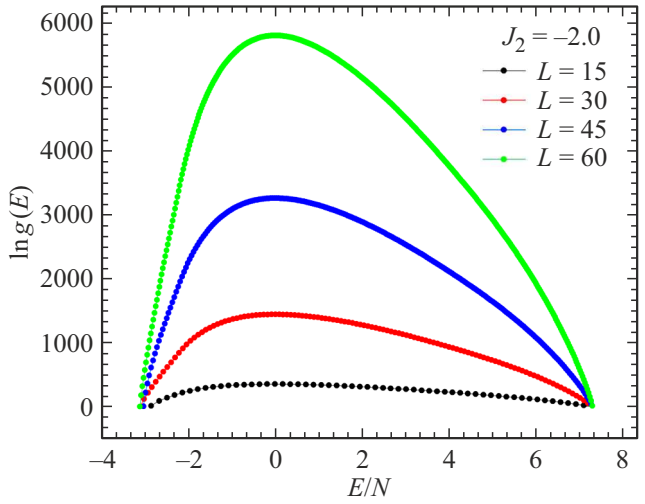


Рис. 3. Плотность состояний $g(E)$ при различных линейных размерах L для $J_2 = -2.0$.

приводящей к возникновению фрустрации и увеличению числа энергетически близких конфигураций.

В рамках настоящей работы установлено, что конфигурации магнитных структур, реализующиеся в основном состоянии, зависят от величины обменного взаимодействия между вторыми ближайшими соседями J_2. Нами был проведен детальный анализ всех энергетически выгодных спиновых конфигураций в широком диапазоне значений параметра J_2. Для каждого значения температуры были рассчитаны и визуализированы магнитные структуры системы. Полученные результаты позволили определить области существования различных типов магнитного порядка и установить границы между ними. Идентификация фаз проводилась на основе анализа магнитных конфигураций, полученных с использованием репличного обменного алгоритма метода МК.

На рис. 4 представлены магнитные структуры основного состояния, полученные в широком интервале значений J_2. Анализ полученных спиновых конфигураций при изменении параметра J_2 в пределах от $J_2 = 0{-}(-3.0)$ позволил выделить три принципиально различных типа магнитного упорядочения.

В интервале значений $J_2 = 0{-}(-0.43)$ доминирующим является ферромагнитное взаимодействие ближайших соседей J_1. В этом случае величина антиферромагнитного обменного взаимодействия вторых ближайших соседей мала и не способна преодолеть энергетический барьер, стабилизирующий параллельную ориентацию спинов. Система находится в состоянии с дальним ферромагнитным (FM) порядком, что отражено на рис. 4, *a*.

При увеличении абсолютного значения параметра взаимодействия вторых ближайших соседей в интервале $J_2 = (-0.44){-}(-1.0)$ в системе возникает конкуренция взаимодействий. Это приводит к потере устойчивости ферромагнитной фазы при критическом значении $J_2 = -0.43$. Ниже этого порога энергетически выгодным становится формирование периодически упорядоченных страйповых структур (STR I). Как показано на рис. 4, *b*, в данном интервале система разбивается на параллельные полосы (страйпы), внутри каждой из которых спины ориентированы одинаково. При переходе от одной полосы к соседней наблюдается поворот спина на фиксированный угол, равный $\Delta\theta = 2\pi/q$.

При дальнейшем увеличении абсолютного значения параметра $J_2 = (-1.1){-}(-3.0)$ также формируются страйповые структуры (STR II) (рис. 4, *c*). Однако, в отличие от предыдущего случая, последовательность углов между соседними полосами не соответствует минимальному дискретному шагу $\Delta\theta = 2\pi/q$. Вместо этого реализуется более сложная схема чередования состояний.

Анализ структур упорядочения, представленных на рис. 4, позволяет для каждой фазы определить количество первых и вторых ближайших соседей, образующих с центральным спином углы 0, 72 и 144°. Используя гамильтониан (1), можно рассчитать энергию спиновой системы, просуммировав вклады от всех первых и вторых соседей. Границы между фазами можно определить аналитически из условия равенства энергий соответствующих спиновых конфигураций. Решение дает $J_2 = J_1(-7 + \sqrt{5})/11$ для перехода между FM и STR I, и $J_2 = -J_1 = -1$ для перехода между STR I и STR II.

На рис. 5 представлены температурные зависимости теплоемкости в интервале значений $J_2 = 0{-}(-0.4)$, полученные с помощью алгоритма Ванга–Ландау. На зависимостях видно, что вблизи критической температуры наблюдаются два хорошо выраженных максимума. Такое поведение связано с существованием двух последовательных ФП с разными типами магнитного упорядочения. При низких температурах система находится в упорядоченной фазе, в которой направления спинов фиксированы в одном из пяти состояний, что

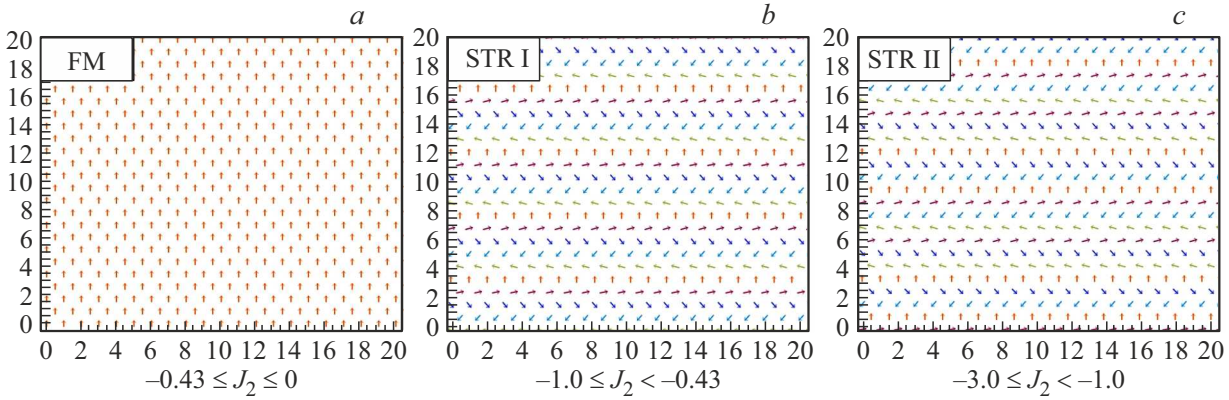


Рис. 4. Магнитные структуры основного состояния, реализуемые в системе при различных значениях J_2.

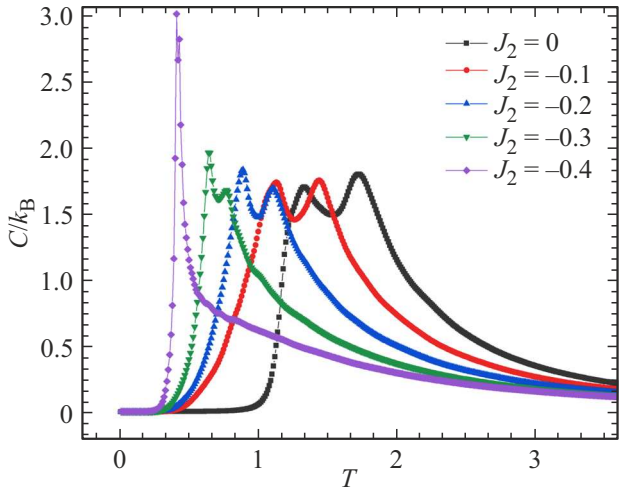


Рис. 5. Зависимости теплоемкости от температуры в интервале значений $J_2 = 0-(-0.4)$.

приводит к возникновению дальнего магнитного порядка. При увеличении температуры происходит первый ФП при температуре T_{N1}, соответствующий переходу из упорядоченной фазы в квазиупорядоченную фазу. В этой фазе дальний порядок исчезает, однако сохраняются корреляции между спинами. На графике теплоёмкости данный процесс проявляется в виде первого максимума. При дальнейшем повышении температуры происходит второй ФП при температуре T_{N2}, связанный с разрушением квазиупорядоченного состояния. Этот переход соответствует распаду корреляций между спинами и переходу системы в парамагнитную фазу.

По мере увеличения абсолютного значения взаимодействия вторых ближайших соседей наблюдаются заметные изменения формы температурной зависимости теплоёмкости. Во-первых, оба максимума смещаются в сторону более низких температур. Во-вторых, расстояние между максимумами постепенно уменьшается, и два пика становится ближе друг к другу.

При значении $J_2 = -0.4$ два максимума практически сливаются в один узкий и высокий пик, расположенный в низкотемпературной области. Такое поведение свидетельствует о том, что процессы разрушения различных типов магнитного порядка происходят в близком температурном интервале.

На рис. 6 представлены температурные зависимости теплоемкости в интервале значений $J_2 = (-0.5)-(-1.7)$, полученные с помощью алгоритма Ванга–Ландау. В отличие от предыдущего случая, где наблюдались два максимума теплоёмкости, на данном графике для всех представленных значений J_2 наблюдается только один выраженный максимум. При этом с увеличением абсолютного значения параметра J_2 заметно изменяется как положение, так и высота пика теплоёмкости. Появление только одного максимума в данном диапазоне связано с изменением структуры системы. При достаточно сильном взаимодействии вторых ближайших соседей $(J_2 = (-0.5)-(-1.7))$ конкуренция обменных взаимодействий усиливается.

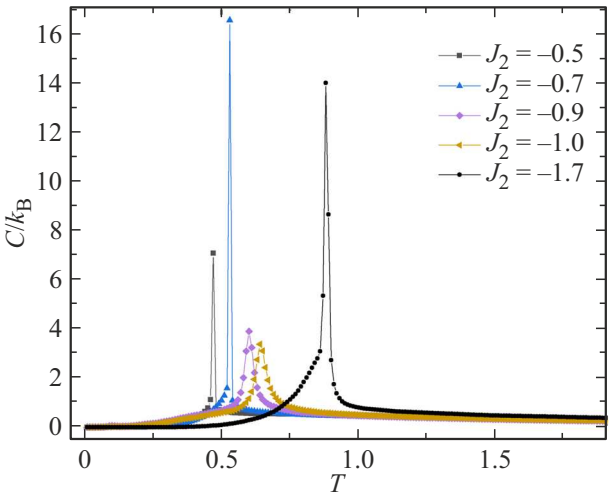


Рис. 6. Зависимости теплоемкости от температуры в интервале значений $J_2 = (-0.5)-(-1.7)$.

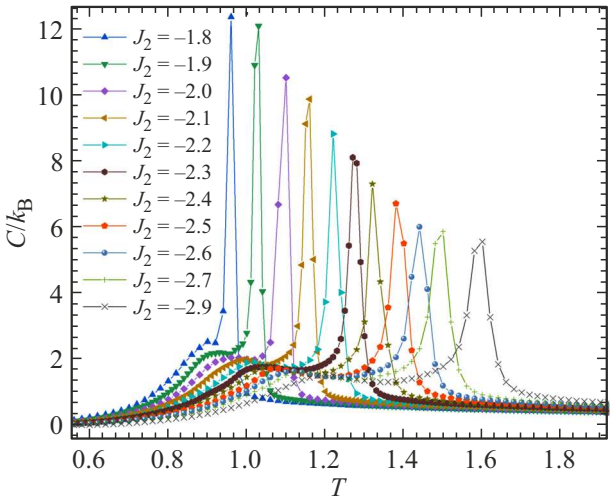


Рис. 7. Зависимости теплоемкости от температуры в интервале значений $J_2 = (-1.8)-(-2.9)$.

Такая конкуренция приводит к росту флуктуаций спиновой системы на треугольной решётке и изменению характера корреляций между спинами. В результате промежуточная квазиупорядоченная фаза становится термодинамически нестабильной, и ее температурный интервал резко сокращается. Температуры двух переходов T_{N1} и T_{N2} сближаются настолько, что практически совпадают, и система демонстрирует один ФП между упорядоченной и высокотемпературной парамагнитной фазой.

На рис. 7 представлены температурные зависимости теплоемкости в интервале значений $J_2 = (-1.8)-(-2.9)$, полученные с помощью алгоритма Ванга–Ландау. Из графика видно, что при данных значениях параметра J_2 теплоёмкость вновь демонстрирует два характерных максимума. При увеличении абсолютного значения параметра J_2 оба максимума смещаются в сторону более высоких температур. При достаточно больших значениях $|J_2|$ вклад взаимодействия вторых ближайших соседей начинает доминировать. Это приводит к перестройке магнитной структуры и формированию новой устойчивой спиновой конфигурации. В результате система снова демонстрирует два различных механизма температурного разупорядочения: сначала происходит разрушение дальнего порядка, а затем — окончательное разрушение корреляций и переход в парамагнитное состояние.

Таким образом, температурная зависимость теплоёмкости демонстрирует сложное поведение при изменении параметра J_2. В интервале значений $J_2 = 0-(-0.4)$ система проходит через три термодинамические фазы: FM, квазиупорядоченную (QO) и парамагнитную (PM). Это проявляется в виде двух максимумов теплоёмкости. При значениях $J_2 = (-0.5)-(-1.7)$ промежуточная фаза исчезает, и система демонстрирует один ФП. При дальнейшем увеличении антиферромагнитного взаимодействия вторых соседей $J_2 = (-1.8)-(-2.9)$ вновь появляются два максимума.

Для проверки достоверности полученных результатов было проведено сравнение температурных зависимостей теплоёмкости, рассчитанных с использованием двух различных алгоритмов Монте-Карло: репличного обменного алгоритма (Rep) и алгоритма Ванга–Ландау (WL). На рис. 8 представлены зависимости теплоемкости для различных значений параметра обменного взаимодействия при размере системы $L = 30$. Видно, что результаты, полученные обоими методами, практически полностью совпадают во всём диапазоне температур. Наблюдаемое хорошее совпадение данных подтверждает корректность реализации использованных алгоритмов и достоверность полученных термодинамических характеристик системы. Незначительные расхождения в области максимумов теплоёмкости связаны с высокой чувствительностью критических характеристик вблизи температуры фазового перехода.

Для определения характера упорядочения был проведен анализ магнитных структур в широком интервале температур для различных значений J_2. Этот подход позволил нам выявить изменения в магнитных конфигурациях системы и лучше понять зависимость типа упорядочения от температуры и параметра J_2.

На рис. 9 приведены магнитные структуры, полученные в широком интервале температур для величины взаимодействия вторых ближайших соседей $J_2 = -0.4$. В низкотемпературной области, при $T < T_{N1}$ система находится в состоянии дальнего магнитного порядка (рис. 9, *a*). Как видно из конфигурации спинов, все спины ориентированы одинаково, формируя однородную упорядоченную структуру. Тепловые флуктуации в этой области малы, поэтому энергия системы не меняется.

В промежуточной температурной области в интервале $T_{N1} < T < T_{N2}$ дальний магнитный порядок уже разрушен, однако система сохраняет значительные короткодействующие корреляции. Как видно из соответствующей конфигурации спинов (рис. 9, *b*), в системе формируются доменные области с различной ориентацией спинов. Эти области характеризуются локальным упорядочением, однако их взаимная ориентация носит случайный характер.

При дальнейшем повышении температуры $T > T_{N2}$ тепловые флуктуации полностью подавляют магнитные корреляции. Спиновая конфигурация в этой области характеризуется практически случайным распределением направлений спинов, что соответствует парамагнитному состоянию (рис. 9, *c*). Такие же структуры наблюдались в интервале $J_2 = 0-(-0.4)$.

На рис. 10 приведен анализ магнитных структур, полученные для величины взаимодействия вторых ближайших соседей $J_2 = -1.6$ ниже температуры ФП (рис. 10, *a*) и выше температуры ФП (рис. 10, *b*). Показано, что система претерпевает ФП из страйпового упорядоченного состояния (STR) в PM. Аналогичное поведение наблюдается во всём интервале значений

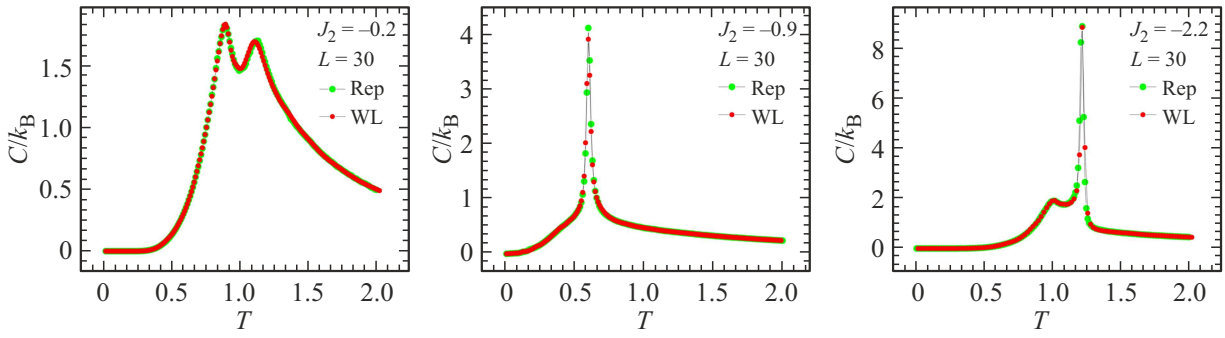


Рис. 8. Зависимости теплоемкости от температуры для различных значений J_2, полученных репличным обменным алгоритмом и алгоритмом Ванга–Ландау.

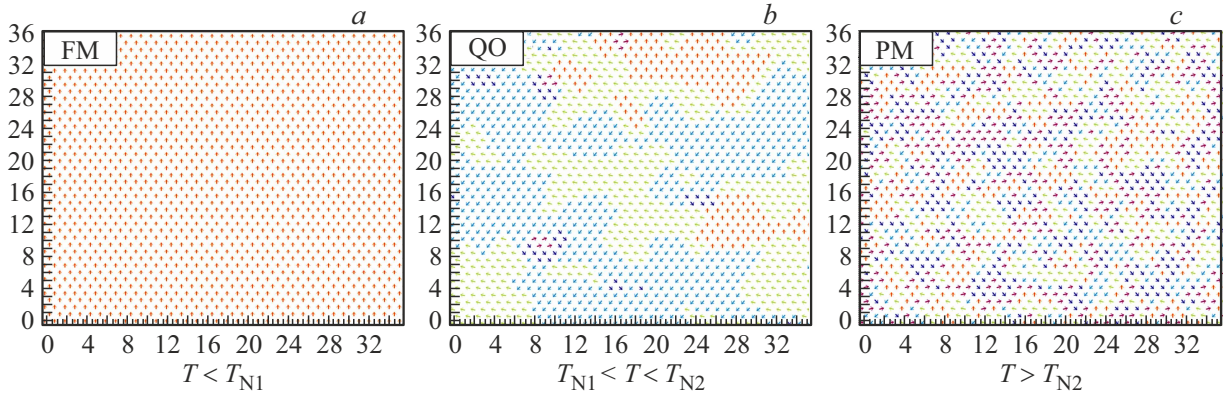


Рис. 9. Магнитные структуры, реализуемые в системе при разных температурах для $J_2 = -0.4$.

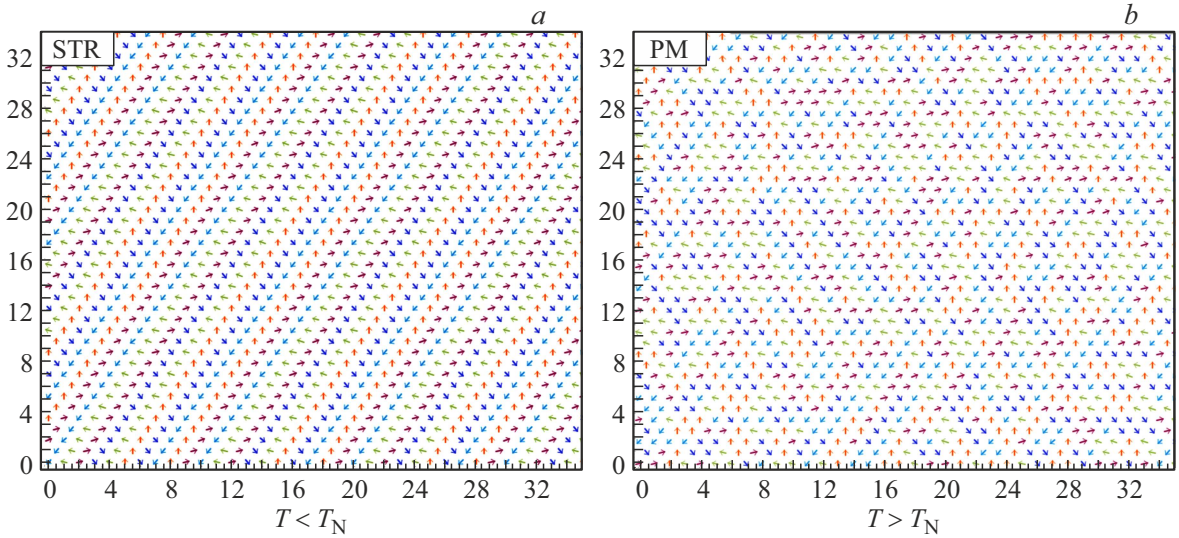


Рис. 10. Магнитные структуры, реализуемые в системе при разных температурах для $J_2 = -1.6$.

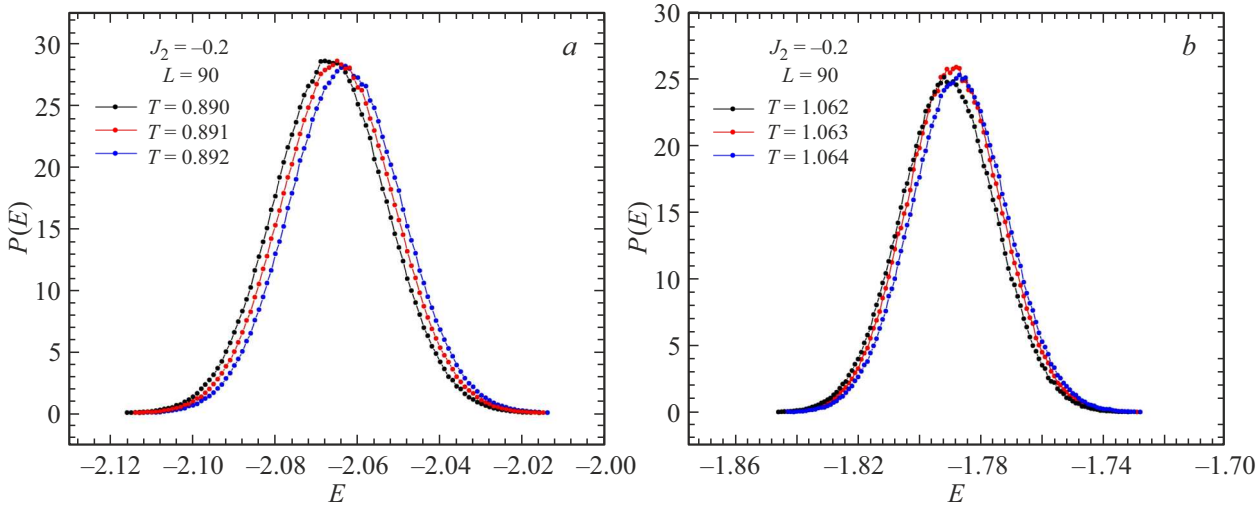


Рис. 11. Гистограммы распределения энергии для $J_2 = -0.2$ при $L = 90$.

$J_2 = (-0.5)-(-1.7)$, для которого на температурных зависимостях теплоёмкости фиксируется один ярко выраженный максимум.

Дополнительно был проведён анализ магнитных структур в области значений $J_2 = (-1.8)-(-3.0)$. Установлено, что в данном интервале система демонстрирует более сложное термодинамическое поведение: при повышении температуры реализуется последовательность ФП из STR в QO-фазу QO, а затем — в PM-состояние. Такое поведение магнитного порядка согласуется с наличием двух максимумов на кривых теплоёмкости в данном интервале, отражающих существование промежуточной QO-фазы.

Для определения типа ФП нами был использован гистограммный метод анализа данных. Гистограммы были получены с использованием репличного алгоритма метода Монте-Карло. Такой подход позволяет выявлять особенности распределения энергии системы вблизи температуры ФП и, тем самым, проводить его классификацию. В случае ФП первого рода на гистограмме распределения энергии в окрестности температуры перехода наблюдается бимодальная структура, характеризующаяся наличием двух отчётливо выраженных максимумов. Эти максимумы соответствуют сосуществованию двух фаз и, как правило, располагаются по разные стороны от равновесного значения энергии. Для ФП второго рода, напротив, характерно распределение энергии с одним максимумом, что отражает непрерывный характер перехода и отсутствие фазового сосуществования.

На рис. 11 представлены гистограммы распределения энергии для $J_2 = -0.2$ в температуре ФП T_{N1} (рис. 11, *a*) и T_{N2} (рис. 11, *b*). Из рисунков видно, что на зависимостях вероятности $P(E)$ наблюдается один хорошо выраженный максимум. Наличие одного максимума указывает на то, что в данной области реализуется ФП второго рода. Система непрерывно переходит из одного состояния в другое без скачкообразного изменения энергии, что соответствует классической картине критического поведения. Таким образом, анализ гистограмм распределения энергии показывает, что для параметра $J_2 = -0.2$ оба ФП при T_{N1} и T_{N2} являются переходами второго рода. Аналогичная картина была обнаружена в интервале значений параметра $J_2 = 0-(-0.4)$.

На рис. 12 представлены гистограммы распределения энергии $P(E)$ для значений параметра $J_2 = -0.6$ (рис. 12, *a*) и $J_2 = -1.6$ (рис. 12, *b*). На графиках зависимостей наблюдаются два четко выраженных максимума. Наличие двух максимумов указывает на энергетический барьер между фазами и является характерным признаком ФП первого рода. Такое поведение свидетельствует о скачкообразном изменении внутренней энергии системы. Установлено, что подобное распределение сохраняется во всем исследованном интервале значений параметра $J_2 = (-0.5)-(-1.7)$. Это согласуется с результатами анализа температурной зависимости теплоёмкости, где наблюдается один острый максимум, что дополнительно подтверждает ФП первого рода.

С использованием гистограммного метода анализа данных также был исследован интервал $J_2 = (-1.8)-(-3.0)$, в котором на температурной зависимости теплоёмкости наблюдаются два максимума, соответствующие двум характерным температурам T_{N1} и T_{N2}. Полученные результаты свидетельствуют, что вблизи обеих температур T_{N1} и T_{N2} формируется бимодальная структура распределения с двумя отчётливо разделёнными пиками. Это указывает на существование двух последовательных ФП первого рода, разделенных интервалом температур, в котором система проходит через промежуточную QO-фазу.

Для анализа порядка фазового перехода и оценки критической температуры удобно использовать метод, основанный на анализе производной плотности состояний (DoS). Ввиду значительных осцилляций производ-

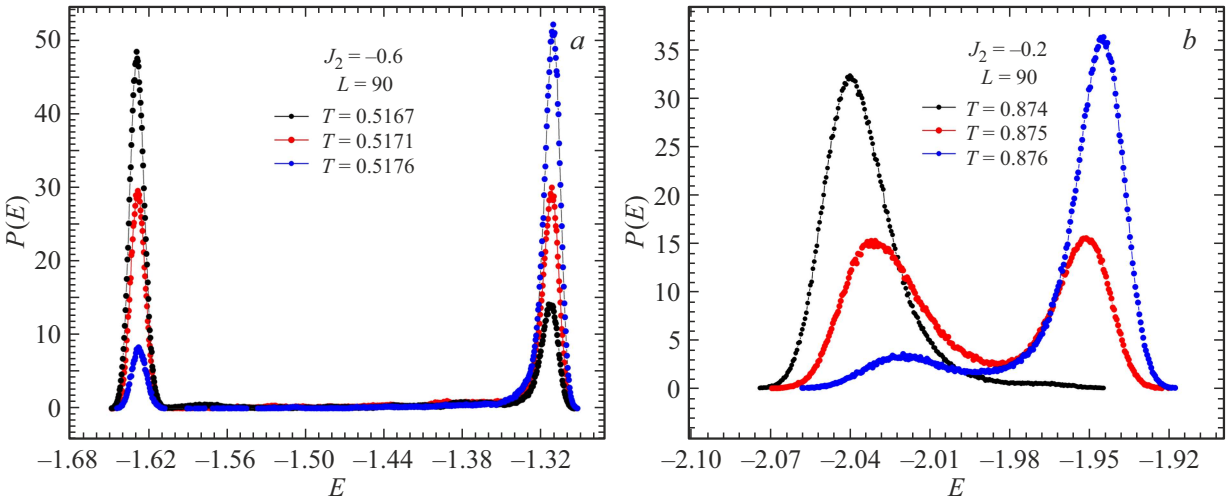


Рис. 12. Гистограммы распределения энергии для $J_2 = -0.6$ и -1.6.

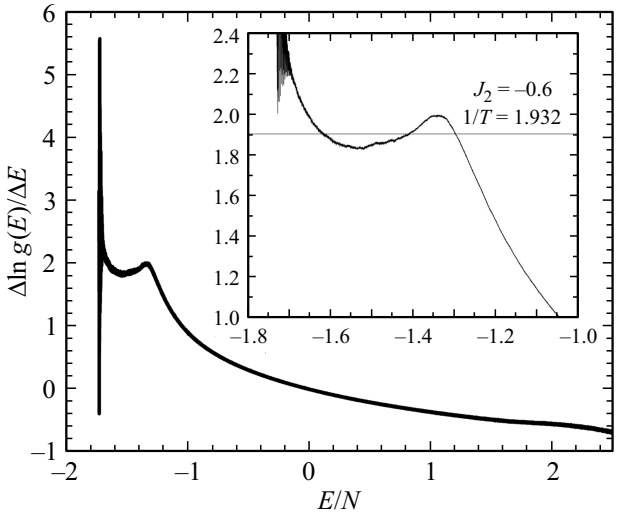


Рис. 13. Производная плотности состояний по энергии для параметра $J_2 = -0.6$ при $L = 30$.

ную заменяют её конечно-разностной аппроксимацией

$$\frac{d(g(E))}{dE} \approx \frac{g(E+\Delta E) - g(E-\Delta E)}{2\Delta E}.$$

На рис. 13 представлена производная плотности состояний по энергии для параметра $J_2 = -0.6$ при $L = 30$ и $\Delta E = 1$.

Если в системе наблюдается фазовый переход первого рода, производная приобретает S-образную форму, а горизонтальная линия, построенная по правилу равных площадей Максвелла, соответствует обратной критической температуре. Как видно из рисунка, $1/T_N = 1.932$, откуда $T_N = 0.517$. Это значение хорошо согласуется с результатами, полученными с помощью репличного-обменного алгоритма (см. рис. 12).

3. Заключение

Методом МК проведено исследование ФП и критических явлений в часовой модели с числом состояний спина $q = 5$ на треугольной решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей. В интервале значений параметра $J_2 = 0-(-0.4)$ обнаружены два последовательных ФП: из ферромагнитной упорядоченной фазы в квазиупорядоченную (при T_{N1}) и затем в парамагнитную (при T_{N2}). В интервале $J_2 = (-0.5)-(-1.7)$ зафиксирован только один ФП из страйповой упорядоченной фазы в парамагнитную. В интервале $J_2 = (-1.8)-(-3.0)$ вновь появляются два ФП. Система последовательно переходит из страйповой упорядоченной фазы в квазиупорядоченную, а затем в парамагнитную. На основе гистограммного анализа данных показано, что в интервале значений $J_2 = 0-(-0.4)$ в системе происходит фазовый переход второго рода. При дальнейшем увеличении антиферромагнитного взаимодействия вторых ближайших соседей в интервале $J_2 = (-0.5)-(-3.0)$ в системе происходит смена ФП второго рода на первый.

Полученные результаты показывают, что часовая модель с $q = 5$ на треугольной решетке обладает богатым и нетривиальным фазовым поведением, чувствительным к конкуренции обменных взаимодействий. Полученные данные могут служить основой для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований фазовых переходов в моделях с Z_5-симметрией.

Конфликт интересов

Авторы сообщают об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

[1] N.D. Mermin, H. Wagner. Phys. Rev. Lett., **17**, *22*, 1133–1140 (1966).
[2] В.Л. Березинский. ЖЭТФ, **59**, *3*, 907–920 (1970). [V.L. Berezinskii. Sov. Phys. JETP, **32**, *3*, 493–500 (1971).]
[3] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless. J. Phys. C, **6**, *7*, 1181–1203 (1973).
[4] J.M. Kosterlitz. J. Phys. C, **7**, *6*, 1046–1060 (1974).
[5] D.R. Nelson, J.M. Kosterlitz. Phys. Rev. Lett., **39**, *19*, 1201–1204 (1977).
[6] P. Minnhagen. Rev. Mod. Phys., **59**, *4*, 1001–1080 (1987).
[7] J.M. Kosterlitz. Rep. Prog. Phys., **79**, *2*, 026001 (2016).
[8] S. Doniach, B.A. Huberman. Phys. Rev. Lett., **42**, *17*, 1169–1172 (1979).
[9] R.A. Webb, R.F. Voss, G. Grinstein, P.M. Horn. Phys. Rev. Lett., **51**, *8*, 690–693 (1983).
[10] D.J. Bishop, J.D. Reppy. Phys. Rev. Lett., **40**, *26*, 1727–1730 (1978).
[11] J.V. José, L.P. Kadanoff, S. Kirkpatrick, D.R. Nelson. Phys. Rev. B, **16**, *3*, 1217–1238 (1977).
[12] J. Tobochnik. Phys. Rev. B, **26**, *11*, 6201–6210 (1982).
[13] C.M. Lapilli, P. Pfeifer, C. Wexler. Phys. Rev. Lett., **96**, *14*, 140603 (2006).
[14] A. Goswami, R. Kumar, M. Gope, S. Sahoo. Phys. Rev. E, **111**, *5*, 054125 (2025).
[15] J. Tobochnik. Phys. Rev. B, **27**, *11*, 6972–6980 (1983).
[16] A. Yamagata, I. Ono. J. Phys. A, **24**, *1*, 265–278 (1991).
[17] Y. Tomita, Y. Okabe. Phys. Rev. B, **65**, *18*, 184405 (2002).
[18] M.K. Badiev, A.K. Murtazaev, M.A. Magomedov, M.K. Ramazanov. Physica A, **668**, *130608* (2025).
[19] A.F. Brito, J.A. Redinz, J.A. Plascak. Phys. Rev. E, **81**, *3*, 031130 (2010).
[20] S.K. Baek, H. Mäkelä, P. Minnhagen, B.J. Kim. Phys. Rev. E, **88**, *1*, 012125 (2013).
[21] Y. Kumano, K. Hukushima, Y. Tomita, M. Oshikawa. Phys. Rev. B, **88**, *10*, 104427 (2013).
[22] O. Borisenko, G. Cortese, R. Fiore, M. Gravina, A. Papa. Phys. Rev. E, **83**, *4*, 041120 (2011).
[23] J. Chen, H.-J. Liao, H.-D. Xie, X.-J. Han, R.-Z. Huang, S. Cheng, Z.-C. Wei, Z.-Y. Xie, T. Xiang. Chin. Phys. Lett., **34**, *5*, 050503 (2017).
[24] S. Hong, D.-H. Kim. Phys. Rev. E, **101**, *1*, 012124 (2020).
[25] Z.-Q. Li, L.-P. Yang, Z.-Y. Xie, H.-H. Tu, H.-J. Liao, T. Xiang. Phys. Rev. E, **101**, *6*, 060105(R) (2020).
[26] H. Chen, P. Hou, S. Fang, Y. Deng. Phys. Rev. E, **106**, *2*, 024106 (2022).
[27] J.D. Noh, H. Rieger, M. Enderle, K. Knorr. Phys. Rev. E, **66**, *2*, 026111 (2002).
[28] C.-O. Hwang. Phys. Rev. E, **80**, *4*, 042103 (2009).
[29] C. Chatelain. J. Stat. Mech., **2014**, *11*, P11022 (2014).
[30] А.К. Муртазаев, М.К. Бадиев, М.А. Магомедов, М.К. Рамазанов. ЖЭТФ, **164**, *5*, 790–800 (2023). [A.K. Murtazaev, M.K. Badiev, M.A. Magomedov, M.K. Ramazanov. JETP, **137**, *5*, 682–690 (2023).]
[31] A.K. Murtazaev, M.K. Badiev, M.K. Ramazanov, M.A. Magomedov. Physica A, **555**, *124530* (2020).
[32] М.К. Рамазанов, А.К. Муртазаев, Т.Р. Ризванова, М.Р. Джамалудинов, М.А. Магомедов. ФТТ, **67**, *9*, 1760–1770 (2025). [M.K. Ramazanov, A.K. Murtazaev, T.R. Rizvanova, M.R. Dzhamaludinov, M.A. Magomedov. Phys. Solid State, **67**, *9*, 1693–1703 (2025).]
[33] М.К. Рамазанов, А.К. Муртазаев, М.А. Магомедов, М.К. Мазагаева. ФТТ, **62**, *3*, 442–452 (2020). [M.K. Ramazanov, A.K. Murtazaev, M.A. Magomedov, M.K. Mazagaeva. Phys. Solid State, **62**, *3*, 499–509 (2020).]
[34] A.K. Murtazaev, M.A. Magomedov, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev. Physica E, **142**, *115320* (2022).
[35] F. Wang, D.P. Landau. Phys. Rev. E, **64**, *5*, 056101 (2001).
[36] K. Hukushima, K. Nemoto. J. Phys. Soc. Jpn, **65**, *6*, 1604–1606 (1996).

Редактор Е.В. Толстякова