05

Экситонный g-фактор в квантовой яме/точке в продольном, поперечном и наклонном магнитном поле

© Л.В. Котова, В.П. Кочерешко

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: kotova@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 30 апреля 2026 г.
В окончательной редакции 7 сентября 2026 г.
Принята к публикации 10 сентября 2026 г.

В структурах с квантовыми ямами и квантовыми точками исследована зависимость g-фактора экситона от энергии его квантования в продольном и наклонном магнитном полях. Построены зависимости экситонного g-фактора от размера квантовой ямы (точки) в широких квантовых ямах, когда размер ямы намного больше боровского радиуса экситона и в узких квантовых ямах, когда размер ямы много меньше боровского радиуса. В наклонном магнитном поле установлено, что поперечная компонента поля ($\mathbf{B}_\perp$) приложенная перпендикулярно оси квантования $z \parallel [001]$, вдоль оси $x \parallel [100]$ или $y \parallel [010]$ заметно увеличивает продольный магнитный момент экситона вдоль оси квантования (g_z). Показано, что этот эффект связан со смешиванием поперечным магнитным полем состояний легких и тяжелых дырок, что приводит к увеличению смешивания $1s$ и np экситонных состояний из-за чего у $1s$ состояния появляется орбитальный магнитный момент. Показано, что эффект пропадает, когда поперечное поле $\mathbf{B}_\perp$ направлено вдоль осей $[110]$ или $[1\bar{1}0]$.

Ключевые слова: квантовая яма, квантовые точки, g-фактор, экситоны, магнитное поле, орбитальный магнитный момент.

DOI: 10.61011/FTT.2026.10.64091.9605

1. Введение

Экситоны играют ключевую роль в оптических и электронных процессах в низкоразмерных структурах, таких как квантовые ямы, квантовые нити и квантовые точки. Эти структуры широко используются в современной электронике и оптоэлектронике, включая лазеры, светодиоды и устройства хранения и управления спином. Одним из важных параметров, характеризующих поведение экситонов в магнитных полях, является его g-фактор, который определяет расщепление энергетических уровней в присутствии магнитного поля и связывает его магнитный и механический моменты.

В квантовых ямах, где движение носителей заряда ограничено в одном из направлений, экситоны проявляют анизотропные свойства. Продольный g-фактор экситона (g_z) описывает его магнитный момент вдоль направления роста структуры (ось z), в то время как поперечные компоненты (g_x и g_y) характеризуют магнитные свойства в плоскости ямы. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что g-фактор экситона зависит от состава материала, размеров ямы/точки и внешних воздействий, таких как электрические или магнитные поля, а также от энергии квантования электрона и дырки в квантовой яме [1–7].

Орбитальный магнитный момент экситона в объемном кристалле, в основном состоянии с нулевой кинетической энергией центра масс, равен нулю, и экситонный g-фактор целиком связан со спиновым моментом. Если кинетическая энергия экситона не равна нулю, то экситонный g-фактор многократно возрастает пропорционально энергии экситона. Этот эффект вызван смешиванием $1s$ основного состояния тяжелого (легкого) экситона и всех возбужденных p состояний легкого (тяжелого) экситона, обладающих орбитальным угловым моментом [8–12]. Благодаря такому смешиванию основное $1s$ состояние экситона также приобретает орбитальный момент.

Считается, что магнитное поле может вызывать намагниченность только в направлении самого поля. Поперечное магнитное поле, приложенное в геометрии Фогта (вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ лежит в плоскости квантовой ямы, а направление распространения света параллельно оси z) не может оказывать влияния на продольную намагниченность вдоль оси z. Однако оказалось, что это не совсем так.

В данной работе проведен расчет зависимостей экситонного g-фактора от энергии экситона для разных материалов. Показано, что поперечное магнитное поле может заметно изменить продольный g-фактор экситона. Этот эффект подтверждается экспериментально для квантовых точек (In,Al)As/AlAs.

Работа заполняет пробелы в понимании магнитных свойств экситонов в низкоразмерных структурах, предлагая модели для интерпретации спектроскопических данных. Полученные результаты приводят к предсказанию и наблюдению новых магнитооптических эффектов

и имеют значение для разработки оптоэлектронных устройств на основе полупроводниковых наноструктур.

2. Результаты

2.1. Симметрия

Сначала рассмотрим, какие имеются вклады в зеемановское расщепление экситона пропорциональные квадрату волнового вектора в продольном и наклонном магнитном поле. Зеемановское расщепление уровней электронов, дырок и экситонов определяется g-фактором, который является безразмерным коэффициентом, связывающим магнитный и механический момент частицы. Спиновый гамильтониан экситона в магнитном поле:

$$\hat{H}_s = \mu_{\mathrm{B}} g_e (\mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \mu_{\mathrm{B}} g_h (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{J}}).$$

Здесь: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\hat{\mathbf{J}}$ — операторы спина электрона и дырки, μ_{B} — магнетон Бора, g_e и g_h — g-факторы электрона и дырки, $\mathbf{B}$ — магнитное поле.

В кристалле g-фактор является тензором второго ранга и может зависеть от волнового вектора $\mathbf{k}$. Эту зависимость можно представить в виде:

$$g_{ij}(\mathbf{k}) = g_{ij}^{(0)} + g_{ijkl}^{(1)} k_k k_l + g_{ijklmn}^{(2)} k_k k_l k_m k_n + \ldots \qquad (1)$$

Кроме поправок, связанных с волновым вектором, g-фактор экситона может зависеть и от магнитного поля:

$$g_{ij}(\mathbf{B}) = g_{ij}^{(0)} + g_{ijk}^{(1)} B + g_{ijkl}^{(2)} B_k B_l + g_{ijklm}^{(3)} B_k B_l B_m + \ldots \qquad (2)$$

В кубическом кристалле с симметрией T_d тензор $g_{ij}^{(0)}$ диагонален. В случае аксиальной симметрии тензор $g_{ij}^{(0)}$ имеет только две линейно независимых компоненты: вдоль главной оси $g_{\parallel}$ и перпендикулярно оси $g_{\perp}$:

$$g_{\parallel} = g_{zz}, \quad g_{\perp} = g_{xx} = g_{yy}.$$

В структуре с симметрией D_{2d} для произвольных направлений магнитного поля и волнового вектора, $g_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{B})$ может иметь более сложный вид.

Экситонный g-фактор определяется суммой электронного и дырочного g-факторов. Вид поправки к g-фактору экситона, зависящей от его волнового вектора, можно найти из соображений симметрии методом инвариантов [13]. Рассмотрим такие поправки в объеме, квантовых ямах и квантовых точках на основе кубических полупроводников. Основной вклад в эти поправки происходит из-за спин-орбитального взаимодействия в валентной зоне. Поправки к электронному g-фактору рассматривались в работе [2], они обратно пропорциональны ширине запрещенной зоны и значительно меньше дырочных.

Выберем направление волнового вектора $\mathbf{Q} = (0, 0, Q_z)$. В объемном кристалле с симметрией T_d поправка к g-фактору экситона, пропорциональная квадрату волнового вектора и квадрату магнитного поля, имеет вид:

$$\Delta g_{ij}^{(1)}(Q) = A_1 Q^2 \delta_{ij}. \qquad (3)$$

Для поправки, билинейной по волновому вектору и магнитному полю для $\mathbf{Q} = (0, 0, Q_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ тензор $\Delta g_{ij}(\mathbf{Q}, \mathbf{B})$ имеет все 9 компонентов:

$$\Delta g_{xx} = Q_z^2 \big[(C_1 - 2C_4)B^2 + 2C_2 D_x(B) + 2C_5 D_z(B) + 4C_6 D_y(B)\big],$$

$$\Delta g_{yy} = Q_z^2 \big[(C_1 - 2C_4)B^2 + 2C_2 D_y(B) + 2C_5 D_z(B) + 4C_6 D_x(B)\big],$$

$$\Delta g_{zz} = Q_z^2 \big[(C_1 + 2C_4)B^2 + 2C_2 D_z(B) + 2C_5 D_z(B) + 4C_6 D_z(B)\big],$$

$$\Delta g_{xy} = Q_z^2 \big[(C_3 + 2C_7 + 2C_8)B_x B_y\big],$$

$$\Delta g_{yx} = Q_z^2 \big[(C_3 - 2C_7 + 2C_8)B_x B_y\big],$$

$$\Delta g_{yz} = Q_z^2 \big[(C_3 - C_7 + 2C_8)B_y B_z\big],$$

$$\Delta g_{zy} = Q_z^2 \big[(C_3 + C_7 + 2C_8)B_y B_z\big],$$

$$\Delta g_{xz} = Q_z^2 \big[(C_3 + C_7 - 4C_8)B_z B_x\big],$$

$$\Delta g_{zx} = Q_z^2 \big[(C_3 - C_7 - 4C_8)B_z B_x\big].$$

Здесь:

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2; \quad D_x(B) = 2B_x^2 - B_y^2 - B_z^2;$$

$$D_y(B) = 2B_y^2 - B_z^2 - B_x^2; \quad D_z(B) = 2B_z^2 - B_x^2 - B_y^2.$$

В квантовой яме (квантовой точке) слагаемые в экситонном гамильтониане, дающие дополнительный вклад в спиновое расщепление экситона, связаны с энергией размерного квантования экситона. В квантовой яме поперечный g-фактор дырки $g_{\perp}$ равен нулю из-за расщепления подзон легких и тяжелых дырок. Однако поперечная компонента магнитного поля всё же может влиять на зеемановское расщепление дырок. Более того, поперечная компонента магнитного поля может даже заметно изменить продольный g-фактор.

Для квантовой ямы с симметрией D_{2d} добавка к тензору g-фактора экситона, содержащая компоненты магнитного поля (B_x, B_y, B_z) и волнового вектора $(0, 0, Q_z)$, в квантовой яме имеет вид:

$$\Delta g_{xx} = A_1 Q_z^2 + Q_z^2 \big[C_2 B_z^2 + (C_4 + C_5)B_x^2 + (C_4 - C_5)B_y^2\big],$$

$$\Delta g_{yy} = A_1 Q_z^2 + Q_z^2 \big[C_2 B_z^2 + (C_4 - C_5)B_x^2 + (C_4 + C_5)B_y^2\big],$$

$$\Delta g_{zz} = A_2 Q_z^2 + Q_z^2 \big[C_1 B_z^2 + C_3 \big[\big(B_x^2 + B_y^2\big)\big]\big],$$

$$\Delta g_{xy} = Q_z^2 (C_6 + C_7) B_x B_y, \quad g_{yx} = Q_z^2 (C_6 - C_7) B_x B_y,$$

$$\Delta g_{xz} = Q_z^2 (C_8 + C_9) B_z B_x, \quad g_{zy} = Q_z^2 (C_8 - C_9) B_z B_y,$$

$$\Delta g_{yz} = Q_z^2 (C_8 - C_9) B_z B_y, \quad g_{zy} = Q_z^2 (C_8 + C_9) B_z B_y.$$

Константы A, C не зависят от магнитного поля и энергии. Их можно найти, рассматривая экситон в приближении эффективной массы с учетом сложного характера валентной зоны.

2.2. Микроскопический подход

Микроскопический подход позволяет найти феноменологические константы, представленные в предыдущем разделе.

В работах [14,15] было показано, что g-фактор экситона в объемном кристалле зависит от кинетической энергии экситона. Оказывается, что эта поправка к g-фактору может в разы превышать величину g-фактора покоящегося экситона. Это связано с тем, что при движении центра масс экситона в кубическом кристалле с вырожденной валентной зоной к основному $1s$ состоянию внутреннего движения в экситоне примешиваются возбужденные np состояния экситона, имеющие ненулевой орбитальный момент.

В узких квантовых ямах, квантовых нитях и квантовых точках на основе кубических полупроводников, где электроны и дырки квантуются независимо друг от друга, g-фактор экситона также зависит от энергии квантования дырки [5,16–18].

2.2.1. Поправки к g-фактору пропорциональные энергии экситона

Гамильтониан экситона в кубическом кристалле в приближении эффективной массы имеет следующий вид:

$$\hat{H}_{exc} = \left[\frac{\hbar^2}{2m_e}\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{e}^\mathbf{2}\right]\hat{\mathbf{I}} + \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{h}^\mathbf{2}\right)\hat{I} - \gamma\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{K}}_\mathbf{h}\right)^2\right] - \frac{e^2}{\varepsilon\sqrt{|\mathbf{r}_h-\mathbf{r}_e|^2}}\hat{\mathbf{I}} + W(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h)\hat{\mathbf{I}} + \hat{H}_S.$$

Здесь: $\gamma = (2\gamma_2+3\gamma_3)/5$, γ_1, γ_2, γ_3 — параметры Латтинжера; m_e — эффективная масса электрона; m_0 — масса свободного электрона; ε — статическая диэлектрическая проницаемость; $\mathbf{I}$ — единичная матрица 4×4; $W(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h) = V_e(\mathbf{r}_e)+V_h(\mathbf{r}_h)$ — внешний потенциал для электронов и дырок; $\hat{\mathbf{K}}_{e,h} = -i\nabla_{e,h}$ волновой вектор электрона и дырки; $\hat{\mathbf{J}}$ — вектор матриц углового момента 3/2; $\{a_ib_j\} = a_ib_j + b_ja_i$; $\hat{H}_S$ — спиновая часть гамильтониана.

Матрицы имеют вид:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ i\sqrt{3}/2 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

В (4) пренебрегаем обменным взаимодействием электрона и дырки.

В присутствии магнитного поля вводится обобщенный импульс: $\hbar\hat{\mathbf{K}} \Rightarrow \hbar\mathbf{K} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Используем калибровку $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$, тогда $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B},\mathbf{r}]$. Имеет смысл перейти к координатам центра масс ($\mathbf{R}$) и относительно центра масс ($\mathbf{r}$):

$$\mathbf{R} = \alpha\mathbf{r}_e + \beta\mathbf{r}_h, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h,$$

и соответствующим импульсам:

$$\hat{\mathbf{K}}_e = \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A} + \alpha\hbar\hat{\mathbf{Q}}, \quad \hat{\mathbf{K}}_h = -\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}} + \beta\hbar\hat{\mathbf{Q}}.$$

Здесь α и β не обязательно скаляры и их можно выбрать более или менее произвольно, с условием $\alpha+\beta=1$. В работах [19,20] выбиралось $\alpha=1$, $\beta=0$. В координатах центра масс и относительно центра масс в присутствии магнитного поля (4) запишется:

$$\hat{H}_{exc} = \hat{H}_p + \hat{H}_Q + \hat{H}_A + \hat{H}_{pQ} + \hat{H}_{pA} + \hat{H}_{QA}. \qquad (6)$$

$$\hat{H}_p = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e}\hat{\mathbf{I}} + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)^2 - \frac{e^2}{\varepsilon r} + W(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h),$$

$$\hat{H}_\mathbf{Q} = \frac{1}{2m_e}\alpha^2\hat{\mathbf{Q}}^2\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\beta^2\hat{\mathbf{Q}}^2\hat{\mathbf{I}} - \beta^2\frac{\gamma}{m_0}\left(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{Q}}\right)^2,$$

$$\hat{H}_\mathbf{A} = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{e}{c}\right)^2\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\left(\frac{e}{c}\right)^2\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\frac{e}{c}\right)^2\left(\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{A}\right)^2,$$

$$\hat{H}_\mathbf{pQ} = \frac{1}{2m_e}\alpha\hbar(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}} - \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\beta\hbar(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{Q}})\hat{\mathbf{I}} + \frac{\gamma}{m_0}\beta\hbar\left\{(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{Q}})\right\},$$

$$\hat{H}_\mathbf{pA} = -\frac{1}{2m_e}\frac{e}{c}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A})\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\frac{e}{c}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A})\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\frac{e}{c}\left\{(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{A})\right\},$$

$$\hat{H}_{\mathbf{QA}} = \frac{1}{2m_e}\left(\alpha\frac{e}{c}\hbar(\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{A})\right)\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right) \times\left(\beta\frac{e}{c}\hbar(\hat{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{A})\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\beta\frac{e}{c}\hbar\{(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{Q}})(\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{A})\}.$$

Здесь: $\hat{H}_{\mathbf{p}}$ — описывает движение электрона и дырки в квантовой яме (КЯ) или квантовой точке (КТ) относительно их центра масс; $\hat{H}_{\mathbf{Q}}$ — описывает свободное движение центра масс; $\hat{H}_{\mathbf{A}}$ — описывает диамагнитный сдвиг; $\hat{H}_{\mathbf{pQ}}$ — приводит к смешиванию внутреннего движения и движения центра масс; диагональные компоненты $\hat{H}_{\mathbf{pA}}$ описывают орбитальный магнетизм, действительно: $(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{L}})$, ($\hat{\mathbf{L}}$ — оператор орбитального момента). Это слагаемое актуально только для возбужденных состояний, имеющих ненулевой орбитальный момент; $\hat{H}_{\mathbf{QA}}$ — магнито-штарк эффект [21].

Было бы заманчиво выбрать α и β так, чтобы слагаемые в (6) содержащие α и β оказались равными нулю. Можно показать, что в общем случае, это невозможно.

Рассматриваем все слагаемые, зависящие от магнитного поля как возмущение. В качестве волновых функций нулевого приближения выбираем собственные функции гамильтониана $(\hat{H}\mathbf{p}(\mathbf{r}) + \hat{H}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{R}))$. Гамильтониан $\hat{H}_{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ дает вклад в первом порядке теории возмущений пропорциональный квадрату магнитного поля. Гамильтониан $\hat{H}_{\mathbf{pA}}(\mathbf{r})$ также дает вклад в первом порядке, но только для состояний с ненулевым орбитальным моментом. Нас интересует вклад линейный по магнитному полю и квадратичный по волновому вектору центра масс экситона $\mathbf{Q}$ в энергию основного состояния экситона. Такой вклад дает гамильтониан $\hat{H}_{\mathbf{pQA}}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \hat{H}_{\mathbf{QA}}(\mathbf{r},\mathbf{R}) + \hat{H}_{\mathbf{pA}}(\mathbf{r})$ во втором порядке теории возмущений.

$$\hat{H}_{\mathbf{pQA}}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \left(\frac{\alpha\hbar}{m_e}\left\{\left(\hat{\mathbf{p}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\hat{\mathbf{Q}}\right\}\hat{\mathbf{I}} - \frac{\beta\hbar}{m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\left\{\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\hat{\mathbf{Q}}\right\}\hat{\mathbf{I}} + \frac{\beta\gamma\hbar}{m_0}\left\{\left(\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\hat{\mathbf{J}}\right)(\hat{\mathbf{Q}}\cdot\hat{\mathbf{J}})\right\}\right). \quad (7)$$

Положим $\mathbf{Q} = Q\mathbf{z}$, тогда

$$\hat{H}_{\mathbf{pQA}}(\mathbf{r},\mathbf{R}) = \left(\frac{\alpha}{m_e}+\beta\hat{\mathbf{M}}^{-1}\right)\frac{\hbar e}{c}A_z\hat{Q}_z + \frac{\beta\gamma h}{m_0}\left(\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}A_x\right)\{\hat{J}_x\hat{J}_z\}+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}A_y\right)\{\hat{J}_y\hat{J}_z\}\right)\hat{Q}_z. \quad (8)$$

Здесь:

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1} = \frac{1}{m_0}\begin{bmatrix}\gamma_1-2\gamma & 0 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_1+2\gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_1+2\gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1-2\gamma\end{bmatrix}. \quad (9)$$

В качестве волновых функций нулевого приближения можем взять собственные функции гамильтонианов $\hat{H}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{H}_{\mathbf{Q}}$. В гамильтониане $\hat{H}_{\mathbf{p}}$ пренебрежем обменным взаимодействием в экситоне, недиагональными членами в кинетической энергии и внешним потенциалом $W(\mathbf{r}_e,\mathbf{r}_h)$. По сути рассматриваем экситон в объеме или широкой яме. Тогда $\hat{H}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ в сферических координатах для экситона с тяжелой (hh) или легкой (lh) дыркой запишется:

$$\hat{H}_{\mathbf{p}}(r,\theta,\phi) = \frac{\hbar^2}{2\mu_{lh,hh}}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] - \frac{e^2}{\varepsilon_0 r}. \quad (10)$$

Здесь: r относительные координаты электрона и дырки; ϕ — полярный угол; θ — азимутальный угол; $x = r\cos\phi\sin\theta$; $y = r\sin\phi\sin\theta$; $z = r\cos\theta$; μ — приведенная масса для тяжелых и легких дырок $\mu_{lh,hh} = \frac{m_e m_{lh,hh}}{m_e+m_{lh,hh}}$

Собственные функции гамильтониана $\hat{H}_{\mathbf{p}}(r,\theta,\phi)$ (10) представляют собой водородоподобные волновые функции:

$$f_{n,l,m,i}(r,\theta,\phi) = \left\{\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\right\}\left(\frac{2}{na_{\mathrm{B}}}\right)^{3/2} \times\exp\left(-\frac{r}{na_{\mathrm{B}}}\right)\left(\frac{2r}{na_{\mathrm{B}}}\right)^{l} - L^{2l+1}_{n-l-1}\left(\frac{2r}{na_{\mathrm{B}}}\right)Y_{l,m}(\theta,-\phi). \quad (11)$$

Здесь: $L^{2l+1}_{n-l-1}\left(\frac{2r}{na_{\mathrm{B}}}\right)$ — обобщенные полиномы Лагерра; $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ — сферические функции, $a_{\mathrm{B}} = \frac{\varepsilon\hbar^2}{\mu_{lh,hh}e^2}$ — боровский радиус тяжелого и легкого экситона; $n = 1, 2, 3, \ldots$, $l \le n-1$, $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots \pm l$.

Волновая функция основного $1s$ состояния внутреннего движения:

$$f_{0,0,0}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\mathrm{B}}^3}}e^{-r/a_{\mathrm{B}}}. \quad (12)$$

Энергия основного состояния:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_{\mathrm{B}}^2}, \quad a_{\mathrm{B}} = \frac{\varepsilon_0\hbar^2}{\mu_{lh,hh}e^2}.$$

Собственные функции гамильтониана $\hat{H}_{\mathbf{Q}}(Z)$ представляют собой плоские волны с волновым вектором Q_z (мы выбрали $\mathbf{Q} = Q_z$).

$$\phi_Q(Z) = \exp(\pm iQ_zZ).$$

С энергией

$$E_z(Q) = \frac{\hbar^2Q_z^2}{2M_{hh,lh}}.$$

Здесь: Z — координата центра масс экситона вдоль оси z.

Волновые функции нулевого приближения $\Psi^{(i)}_{n,l,m,Q}(r,\theta,\phi,Z)$:

$$\Psi^{(1)}_{n,l,m,Q} = \begin{pmatrix} f^{(3/2)}_{n,l,m}(r,\theta,\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \phi_Q(Z),$$

$$\Psi^{(2)}_{n,l,m,Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(1/2)}_{n,l,m}(r,\theta,\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \phi_Q(Z),$$

$$\Psi^{(3)}_{n,l,m,Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f^{(-1/2)}_{n,l,m}(r,\theta,\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \phi_Q(Z),$$

$$\Psi^{(4)}_{n,l,m,Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f^{(-3/2)}_{n,l,m}(r,\theta,\phi) \end{pmatrix} \phi_Q(Z). \qquad (14)$$

Здесь функции $\Psi^{(i)}_{n,l,m,Q}(r,\theta,\phi,Z)$ характеризуются квантовыми числами M, n, m, i; $\phi_Q(Z)$ это собственные функции гамильтониана $\hat{H}_{\mathbf{Q}}$; функции $f_{n,l,m}(r,\theta,\phi)$ это собственные функции гамильтониана $\hat{H}_{\mathbf{p}}$; Q — волновой вектор центра масс вдоль оси z; n, l, m — главное квантовое число, орбитальное и проекции орбитального момента соответственно, i нумерует проекцию углового момента дырки в экситоне ($\pm 3/2$ и $\pm 1/2$).

2.2.2. Геометрия Фарадея. $\mathbf{B} = B_z$, $\mathbf{Q} = Q_z$

В (8) остается:

$$\hat{H}_{\mathbf{pQA}} = \frac{\beta\hbar\gamma}{m_0} \times \left\{ \left[\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} A_x \right) \hat{J}_x + \left(\hat{p}_y - \frac{e}{c} A_y \right) \hat{J}_y \right] (\hat{Q}_z \cdot \hat{J}_z) \right\}. \qquad (15)$$

Поправка к энергии основного состояния $(1s)$ тяжелого экситона во втором порядке теории возмущений:

$$\Delta E(Q) = \left(\beta\hbar \frac{\gamma}{m_0} \right)^2 \times \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{l} \sum_{i=1}^{4} \frac{\left| \langle \Psi^{(3/2)}_{1s,0,0,Q} | \hat{H}_{pQA}(\mathbf{r},\mathbf{R}) | \Psi^{(i)}_{n,l,m,Q} \rangle \right|^2}{E_1 - E^{(i)}_{n,l,m}}. \qquad (16)$$

Линейный по магнитному полю вклад имеет вид:

$$\Delta E(Q,B) = \mp 6\hbar\omega_c \frac{\gamma^2}{(\gamma_1 - 2\gamma)} \frac{\hbar^2 Q^2}{2M^{hh}_{exc}} \frac{1}{Ry} \times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\langle 1s|r/a_{\mathrm{B}}|np\rangle \langle 1s|a_{\mathrm{B}}\nabla|np\rangle}{1 - 1/n^2 + \Delta_{lh}/Ry} + c.c. \qquad (17)$$

Здесь мы пренебрегаем различием энергий связи тяжелого и легкого экситона; $Ry = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2\varepsilon^2}$ — энергия связи экситона; $M^{hh}_{exc} = m_e + m_{hh}$ — трансляционная масса тяжелого экситона; Δ_{lh} — расщепление состояний легкой и тяжелой дырок в экситоне; μ_{B} — магнетон Бора; Q — волновой вектор центра масс экситона.

Точно сумма в (17) была сосчитана в статьях [22–24]. В знаменателе (17) пренебрегаем $1/n^2$ по сравнению с 1. Тогда приближенно:

$$\Delta E(Q,B) \approx \mp 12\hbar\omega_c \left(\frac{\gamma}{\gamma_1 - 2\gamma} \right)^2 \frac{E^{exc}_z(Q)}{Ry + \Delta_{lh}(Q)}. \qquad (18)$$

Здесь: $2\mu_{\mathrm{B}}B = \frac{e\hbar}{m_0 c} B = \hbar\omega_c$ — циклотронная энергия свободного электрона, $E^{ex}_z(Q) = \frac{\hbar^2 Q^2}{2M^{hh}_{exc}}$ — кинетическая энергия тяжелого экситона.

Полученная здесь поправка соответствует коэффициенту $A_1 Q^2 B_z$ в формуле (3).

В результате, для g-фактора тяжелого экситона в объемном кристалле получим:

$$g_{\mathrm{eff}} = g_e \mp \left[6\kappa - 24 \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_1 - 2\gamma} \right) \frac{E^{exc}_z(Q)}{Ry + \Delta_{lh}(Q)} \right]. \qquad (19a)$$

Здесь: g_e — g-фактор электрона; $\kappa = \frac{1}{3}(5\gamma - \gamma_1 - 2)$ магнитный параметр Латтинжера, знаки $\pm$ относятся оптически активным и оптически запрещенным состояниям экситона.

Формулу (19a) можно записать через коэффициенты $A^{\perp}_1$ в формуле (3)

$$g_{\mathrm{eff}} = g_0 + A_1 Q^2_z. \qquad (19b)$$

Этот результат был получен в работах [8–10,15]. Расчетные зависимости g-факторов оптически активных состояний от волнового вектора центра масс экситона для нескольких соединений приведены на рис. 1.

Из рисунка видно, что максимальное изменение g-фактора наблюдается для кристаллов InAs и минимально для кристаллов AlAs. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными, опубликованными в работах [8–10,25–27]. Рост g-фактора при увеличении волнового вектора центра масс тяжелого экситона связан со смешиванием $1s$ состояния внутреннего движения в экситоне и всех p состояний легкого экситона.

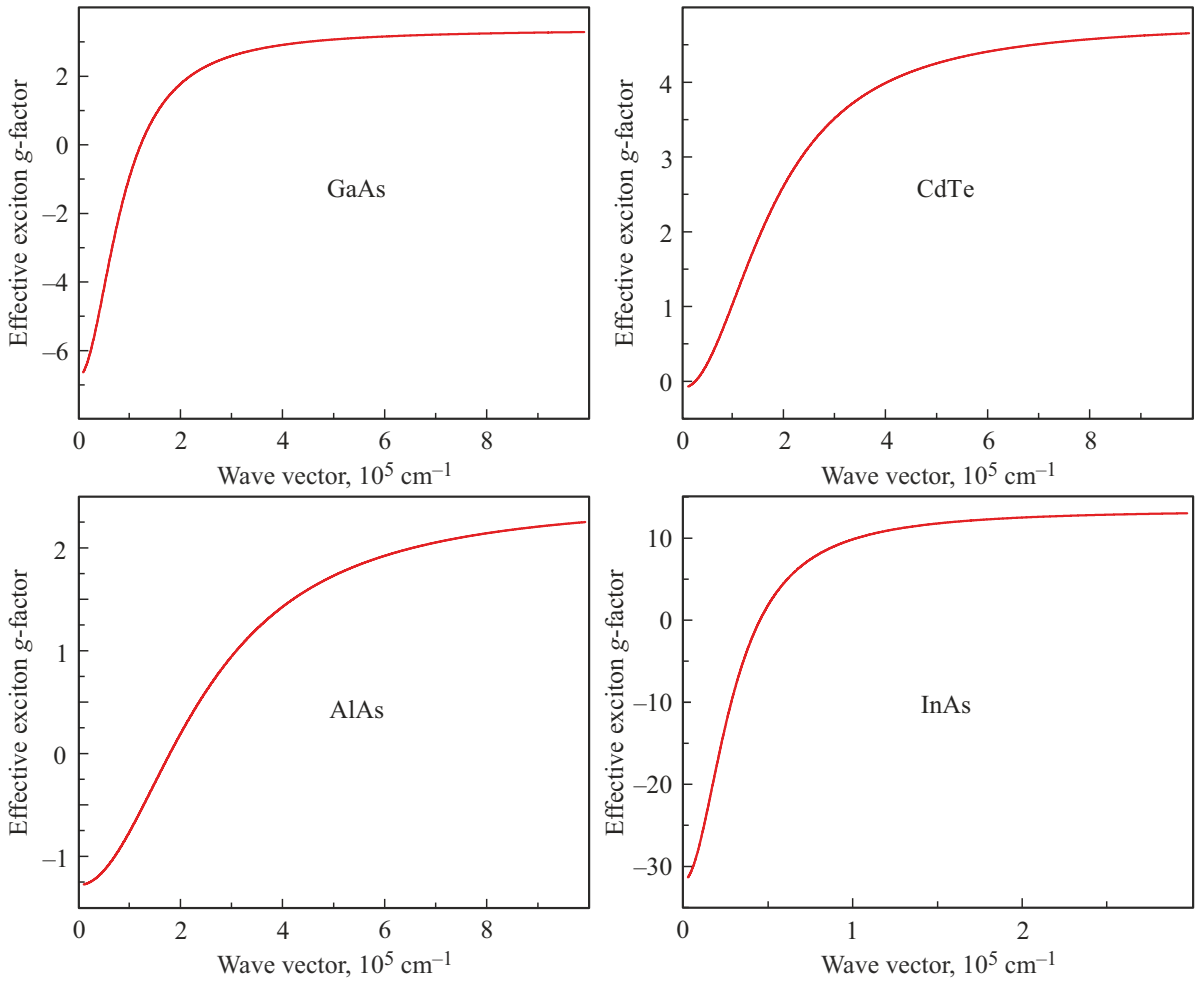


Рис. 1. Расчетная зависимость g-фактора оптически активных состояний экситонов g_{eff} в объемных кристаллах GaAs, CdTe, AlAs и InAs и от волнового вектора центра масс экситона, направленного вдоль оси $z \parallel [001]$. Параметры расчета представлены в Таблице.

2.2.3. Квантовые ямы

Для квантовых ям и квантовых точек мы будем пренебрегать движением центра масс и не будем рассматривать $\hat{H}_{\mathbf{pQ}}$, $\hat{H}_{\mathbf{QA}}$ и $\hat{H}_{\mathbf{Q}}$.

Тогда от (6) останется:

$$\hat{H}_{exc} = \hat{H}_{\mathbf{p}} + \hat{H}_{\mathbf{A}} + \hat{H}_{\mathbf{pA}}. \tag{20}$$

$$\hat{H}_p = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_e} + V_e(\mathbf{r}_e)\right)\hat{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma\right)\hat{\mathbf{p}}^2 + V_h(\mathbf{r}_h)\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{p}})^2 - \frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}|}\hat{\mathbf{I}}. \tag{21}$$

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{e}{c}\right)^2\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma\right)\left(\frac{e}{c}\right)^2\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\frac{e}{c}\right)^2(\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{A})^2. \tag{22}$$

$$\hat{H}_{pA} = -\frac{1}{2m_e}\frac{e}{c}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A})\hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma\right)(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A})\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\frac{e}{c}\{(\hat{\mathbf{J}}\cdot\hat{\mathbf{p}})(\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{A})\}. \tag{23}$$

Аналогично объемному случаю рассматриваем (22) и (23) как возмущение. В качестве волновых функций нулевого приближения выбираем собственные функции гамильтониана (21). Гамильтониан (22) дает поправки к энергии в первом порядке пропорциональные квадрату магнитного поля. Гамильтониан (23) дает поправки линейные по полю во втором порядке теории возмущений.

Считаем, что толщина ямы (точки) мала и энергия квантования электрона и дырки вдоль оси z много больше всех остальных энергий. Тогда в энергии кулоновского взаимодействия электрона и дырки

$$\frac{e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}|} = \frac{e^2}{\sqrt{\rho^2 + |z_e - z_h|^2}}$$

можно пренебречь $|z_h - z_e|^2$ по сравнению с ρ^2, (здесь $|\rho| = \sqrt{(x_e - x_h)^2 + (y_e - y_h)^2}$). В этом случае, движе-

ние электрона вдоль z можно рассматривать независимо от движения дырки. Отсюда, очевидно, что можно пренебречь движением центра масс вдоль оси z.

Рассмотрим сначала экситон в КЯ/КТ в отсутствие магнитного поля (21), выделив движение вдоль оси z и перпендикулярно оси.

$$\hat{H}_p = \left[\left(\frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}+V_e(z_e)\right)\hat{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\hat{p}_z^2 + V_h(z_h)\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\hat{J}_z\cdot\hat{p}_z\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_\perp^2}{2m_e}+V_e^\perp(x_e,y_e)\right)\hat{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right)\hat{\mathbf{p}}_\perp^2 + V_h^\perp(x_h,y_h)\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\hat{\mathbf{J}}_\perp\cdot\hat{\mathbf{p}}_\perp\right)^2 - \frac{e^2}{\varepsilon|\rho|}\hat{\mathbf{I}}\right] - \gamma\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\hat{\mathbf{p}}_\perp\cdot\hat{p}_z\right)\left(\hat{J}_z\hat{J}_\perp\right). \quad (24)$$

Здесь: $\mathbf{p}_\perp^2 = p_x^2 + p_y^2$; $(\hat{\mathbf{J}}_\perp\cdot\hat{\mathbf{p}}_\perp) = \hat{J}_x\hat{p}_x + \hat{J}_y\hat{p}_y$

Первое слагаемое в квадратных скобках в (24) описывает движение электрона и дырки вдоль оси z, второе слагаемое в квадратных скобках описывает движение электрона и дырки связанных кулоновским взаимодействием в плоскости (x, y). Последнее слагаемое в (24) смешивает движение дырки в плоскости (x, y) и вдоль оси z.

Найдем уровни энергии и собственные функции гамильтониана, описывающего квантование вдоль оси. Пусть

$$V_e(z_e) = \begin{cases}\infty & |z| > L/2\\ 0 & |z| < L/2\end{cases}.$$

Квантование движения электрона вдоль оси z выглядит следующим образом

$$\left[\frac{1}{2m_e}p_z^2 + V_e(z_e) - E_{eN}\right]\varphi_e(z_e) = 0. \quad (25)$$

Если потенциал $V_e(z)$ для электрона бесконечно глубокий, то уровни энергии и волновые функции имеют вид:

$$E_{eN} = \frac{\pi^2\hbar^2N^2}{2m_eL^2};$$

$$\varphi_N(z_e) = \sqrt{\frac{2}{L}}\begin{cases}\cos\left(N\dfrac{\pi}{L}z_e\right), \text{нечетные } N\\ \sin\left(N\dfrac{\pi}{L}z_e\right), \text{четные } N\end{cases}, \quad N = 1, 2, \ldots \quad (26)$$

Квантование движения дырки вдоль оси z выглядит следующим образом

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m_0}(\gamma_1 \mp 2\gamma)p_z^2 + V_h(z_h) - E_{hM}\right]\varphi_M(z_h) = 0. \quad (27)$$

Для бесконечно глубокого потенциала точки $V_h(z_h)$ выражения для уровней энергии и волновых функций будут иметь вид:

$$E_{hM} = \frac{\pi^2\hbar^2M^2}{2m_{hm,lh}L^2};$$

$$\varphi_M(z_{hm,lh}) = \sqrt{\frac{2}{L}} \times \begin{cases}\cos\left(M\dfrac{\pi}{L}z_h\right), \text{нечетные } M\\ \sin\left(M\dfrac{\pi}{L}z_h\right), \text{четные } M\end{cases}, \quad M = 1, 2, \ldots \quad (28)$$

Тогда в (24) остается гамильтониан для движения электрона и дырки связанных кулоновским взаимодействием в плоскости (x, y) и слагаемое, смешивающее движение дырки вдоль оси z и в плоскости (x, y):

$$\left[\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_\perp^2}{2m_e}+V_e(x,y)\right)\hat{\mathbf{I}} + \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_\perp^2}{2m_0}\left(\gamma_1+\frac{5}{2}\gamma\right) + V_h(x,y)\right)\hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0}\left(\hat{\mathbf{J}}_\perp\cdot\hat{\mathbf{p}}_\perp\right)^2 - \frac{e^2}{\epsilon|\rho|}\hat{\mathbf{I}}\right] - \gamma\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\hat{p}_z\cdot\hat{\mathbf{p}}_\perp\right)\left[\{\hat{J}_z\hat{J}_\perp\}\right]. \quad (29)$$

В квантовых ямах и точках достаточно большого диаметра пренебрегаем $V_e(x_e, y_e)$ и $V_h(x_h, y_h)$. В полярных координатах для внутреннего движения в 2D экситоне получим уравнение:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu_\pm}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{e^2}{\epsilon\rho} + E\right)f(\rho,\phi) = 0; \quad (30)$$

Здесь: $1/\mu_\pm = 1/m_e + (\gamma_1 \pm \gamma)/m_0$ — приведенная масса тяжелого и легкого экситонов в плоскости, $\rho = \sqrt{(x_e - x_h)^2 + (y_e - y_h)^2}$, и ϕ — относительные координаты электрона и дырки в плоскости $(x_e - x_h) = \rho\cos\phi$, $(y_e - y_h) = \rho\sin\phi$. Мы пренебрегли здесь недиагональными членами в (29).

Решая уравнение (30), находим уровни энергии:

$$E_{n,m} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2\epsilon^2}\frac{1}{(n + |m| + 1/2)^2} = -\frac{e^2}{2\epsilon a_\text{B}}\frac{1}{(n + |m| + 1/2)^2}, \quad (31)$$

и волновые функции:

$$f_{n,m}(\rho,\phi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a_\text{B}}\frac{e^{im\phi}}{(n + |m| + 1/2)}e^{-\xi/2}\xi^{|m|} \times \sqrt{\frac{(n + |2m|)!}{(2n + |6m| + 1)(n + |4m|)!}}L_{n+|2m|}^{|2m|}(\xi), \quad (32)$$

$$\xi = \frac{2}{(n + |m| + 1/2)}\frac{\rho}{a_\text{B}}.$$

Здесь: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — главное квантовое число, $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots \pm n$ — азимутальное квантовое число, $a_\text{B} = \frac{\varepsilon\hbar^2}{\mu e^2}$ — 3D боровский радиус.

Нас интересует линейный по магнитному полю вклад в энергию основного состояния экситона в геометрии Фарадея. Единственный такой вклад в магнитном поле

даст комбинация последнего слагаемого в (23) и последнего слагаемого в (29):

$$\frac{\gamma}{m_0}\left\{\left(\hat{p}_x-\frac{e}{c}A_x\right)\cdot\hat{J}_x+\left(\hat{p}_y-\frac{e}{c}A_y\right)\cdot\hat{J}_y\right\}(\hat{J}_z\cdot\hat{p}_z). \tag{33}$$

Это слагаемое будем рассматривать по теории возмущений. Оно дает вклад только во втором порядке. Для волновых функций нулевого приближения имеем два варианта.

2.2.4. Квантовая яма и точки большого диаметра

Для таких точек энергия квантования вдоль оси z больше всех остальных энергий. Влиянием границ точки в плоскости (x, y) пренебрегаем. Это, по сути дела, случай квантовой ямы. То есть: $z_e - z_h \ll \rho$, $V_e(\rho) = V_h(\rho) = 0$.

В качестве волновых функций нулевого приближения выбираем функции 2D экситона и заквантованной дырки вдоль оси z. Волновые функции нулевого приближения (28) и (32) $\mathbf{\Psi}^{(i)}_{n,m,M}(z_h, \rho, \phi)$ являются спинорами:

$$\mathbf{\Psi}^{(3/2)}_{n,m,M}=\begin{pmatrix}\phi_M^{(3/2)}(z_h)\\0\\0\\0\end{pmatrix}f_{n,m}(\rho,\phi),$$

$$\mathbf{\Psi}^{(1/2)}_{n,m,M}=\begin{pmatrix}0\\\phi_M^{(1/2)}(z_h)\\0\\0\end{pmatrix}f_{n,m}(\rho,\phi),$$

$$\mathbf{\Psi}^{(-1/2)}_{n,m,M}=\begin{pmatrix}0\\0\\\phi_M^{(-1/2)}(z_h)\\0\end{pmatrix}f_{n,m}(\rho,\phi),$$

$$\mathbf{\Psi}^{(-3/2)}_{n,m,M}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\phi_M^{(-3/2)}(z_h)\end{pmatrix}f_{n,m}(\rho,\phi). \tag{34}$$

Здесь: $\phi_M(z_h)$ — волновые функции дырки вдоль оси z (29); $f_{n,m}(\rho, \phi)$ — волновые функции водородоподобного 2D атома (32).

Слагаемое (33) считаем возмущением. Так как возмущение относится только к дыркам, то квантование электрона вдоль оси z ни на что не влияет. Поправка к энергии основного состояния, связанная с возмущением (33) имеет вид:

$$\Delta E^{(j)}=\left(\beta\frac{\gamma}{m_0}\right)^2 \times\sum_{i\neq j}\sum_{M=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left|\left\langle\Psi^{(j)}_{0,0,1}\right|(\hat{p}_x+\frac{e}{c}A_x)\cdot\hat{J}_x+(\hat{p}_y+\frac{e}{c}A_y)\cdot\hat{J}_y\left|\Psi^{(i)}_{n,m,M}\right\rangle\right|^2}{E_0-E_n}. \tag{35}$$

Здесь: $E_0 - E_n = E_{1s}^{(hh)}(x, y) + E_1^{(hh)}(z) - E_{np}^{(lh)}(x, y) - E_M^{(hh)}(z)$; $E_{1s}^{(hh)}(x, y)$ — энергия основного состояния тяжелого 2D экситона, отсчитанная от дна зоны; $E_{np}^{(lh)}(x, y)$ — энергия возбужденных p состояний легкого 2D экситона; $E_1^{(hh)}(z)$ — энергия основного состояния тяжелой дырки в КЯ; $E_M^{(hh)}(z)$ — энергия возбужденных состояний тяжелой дырки в КЯ.

Считаем, что максимальный вклад в $E_1^{(hh)}(z) - E_M^{(hh)}(z)$ дает ближайший уровень возбужденного состояния: $E_1^{(hh)}(z) - E_M^{(hh)}(z) \approx E_{21}^{hh}$, а для разности энергий в плоскости справедливо: $E_{1s}^{(hh)}(x, y) - E_{np}^{(lh)}(x, y) \approx \approx -(Ry^{lh} + \Delta_{lh})$.

Тогда знаменатель можно вынести из-под суммы:

$$\begin{aligned}\Delta E^{(j)} = {}& \frac{1}{E_{21}^{hh}+Ry^{hh}+\Delta_{LH}^{ll}}\left(\beta\frac{\gamma}{m_0}\right)^2\\ &\times\sum_{i\neq j}\sum_{M=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\left\langle\phi_i|(J_z p_z)|\phi_M\right\rangle\right.\\ &\times\left\langle\left\langle f_{0,0}^{(\pm3/2)}\left|\left(p_x+\frac{e}{c}A_x\right)J_x\right|f_{n,m}^{(\pm1)}\right\rangle\right|^2\\ &+\left\langle f_{0,0}^{(\pm3/2)}\left|\left(p_y+\frac{e}{c}A_y\right)J_y\right|f_{n,m}^{(\pm1)}\right\rangle.\end{aligned} \tag{36}$$

Сохраняем только вклады линейные по магнитному полю. Тогда приближенно:

$$\begin{aligned}\Delta E^{(\pm3/2)} \approx {}& \mp6\left(\beta\frac{\gamma}{m_0}\right)^2\left(\frac{e}{c}\right)\langle\phi_1(z)|p_z^2|\phi_1(z)\rangle\\ &\times\frac{\langle f_{0,0}(\rho,\phi)|p_xA_x+A_yp_y|f_{0,0}(\rho,\phi)\rangle}{E_{21}^{hh}(L)+Ry^{hh}+\Delta_{lh}^{ll}}\end{aligned} \tag{37}$$

или

$$\Delta E^{(\pm3/2)}(L)\approx\mp12\left(\frac{\gamma}{\gamma_1-2\gamma}\right)(\gamma\hbar\omega_c)\,\frac{E_{21}^{hh}(L)}{E_{21}^{hh}(L)+Ry^{hh}+\Delta_{lh}^{ll}}. \tag{38}$$

Здесь: $\hbar\omega_c$ — циклотронная энергия свободного электрона; Ry^{lh} — экситонный ридберг с легкой дыркой; $Ry^{lh} = \frac{2\mu_+ e^4}{\hbar^2\varepsilon^2}$, μ_+ — приведенная масса экситона с легкой дыркой.

Видим, что полное зеемановское расщепление оптически активных состояний $1s$ экситона в квантовой яме

(точке) равно:

$$\Delta E = \mu_{\mathrm{B}} g_e B + \mu_{\mathrm{B}} g_h B - 2\Delta E(L_z), \tag{39a}$$

Здесь: g_e — g-фактор электрона; g_h — g-фактор дырки, а объемном кристалле, $g_h = 6\kappa$; μ_{B} — магнетон Бора.

Формулу (39a) можно записать через коэффициенты $A_1^{\perp}$ в формуле (3)

$$\Delta E = \mu_{\mathrm{B}} A_1^{\perp} Q_z^2 B_z. \tag{39b}$$

Таким образом, для квантовых ям и точек любого размера получаем универсальную зависимость, описывающую изменение g-фактора при изменении размера ямы (точки). Похожая зависимость была получена и для тяжелых экситонов в широких квантовых ямах [8] и для легких экситонов [6]. Это изменение g-фактора связано со смешиванием $1s$ и np состояний легких и тяжелых дырок, обусловленного невозможностью разделить движение дырки в плоскости структуры и перпендикулярно плоскости. В результате этого смешивания экситон в основном состоянии приобретает орбитальный угловой момент.

3. Поправки к продольному g-фактору $g_{\parallel}$ пропорциональные поперечному полю B_x, B_y

Как было показано, поправка к продольному g-фактору основного состояния тяжелого экситона определяется смешиванием основного $1s$ состояния и всех np состояний легкого экситона. Нас интересует влияние поперечного магнитного поля B_x, B_y на продольный g-фактор $1s$ состояния. Заметный вклад в продольный g-фактор могут дать только недиагональные слагаемые пропорциональные B_x, B_y в гамильтониане $\hat{H}_A$ (22), так как они приводят к смешиванию легких и тяжелых дырок и тем самым уменьшают знаменатель в (38). Гамильтониан $\hat{H}_A$ пропорциональный B^2 дает поправку к волновой функции основного состояния (34) уже в первом порядке теории возмущений

$$\hat{H}_A = \left(\frac{e}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{2m_e} \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{I}} + \frac{1}{2m_0} \left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma\right) \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{I}} - \frac{\gamma}{m_0} \left(\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{J}}\right)^2 \right).$$

Здесь мы не рассматриваем слагаемые пропорциональные A^2 так как они приводят только к обычному диамагнитному сдвигу

$$\begin{aligned} \hat{H}_A = \frac{1}{2m_0}\left(\frac{e}{c}\right)^2 \Big\{ & \left[\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma\right)\hat{\mathbf{I}} - \gamma\left(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2\right) \right] \left(A_x^2 + A_y^2\right) \\ & - \gamma \Big[\left(\hat{J}_x^2 - \hat{J}_y^2\right)\left(A_x^2 - A_y^2\right) + \left(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2\right)\left(A_x^2 + A_y^2\right) \\ & + \left\{J_x J_y\right\} A_x A_y + \left\{J_z J_x\right\} A_z A_x + \left\{J_y J_z\right\} A_y A_z \Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{40}$$

Видно, что выражение (40) полностью соответствует результату, полученному из соображений симметрии (3). Нас интересуют только недиагональные вклады в $\hat{H}_A$ (второе слагаемое в квадратных скобках в (40)), так как только они приводят к смешиванию легких и тяжелых дырок и могут дать вклад в продольный g-фактор.

Будем учитывать только слагаемые $\propto z^2$ так как они дают максимальный вклад в поправку к волновой функции. Слагаемыми $\propto xz, yz$ пренебрегаем. Действительно, можно показать, что сумма матричных элементов координат x и y на водородоподобных функциях равна нулю из-за цилиндрической симметрии [28]. Последние два слагаемых во второй квадратной скобке также не дадут вклада в продольный g-фактор. В результате в (40) остается:

$$\hat{H}_A = -\frac{\gamma}{m_0}\left(\frac{e}{c}\right)^2 \left[\left(\hat{J}_x^2 - \hat{J}_y^2\right)\left(A_x^2 + A_y^2\right) + \left[\left\{J_x J_y\right\} A_x A_y\right]. \right. \tag{41}$$

В качестве нулевого приближения по-прежнему выбираем функции (34). Поправка первого приближения к волновым функциям за счет возмущения $\hat{H}_A$ (22) равна

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(j)} = & \sum_{i\neq j}^{4} \sum_{M'=2}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n} \frac{\left\langle \boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(j)} \middle| \hat{H}_{\mathbf{A}}(z_h) \middle| \boldsymbol{\Psi}_{n',m',M'}^{(i)} \right\rangle}{\mathcal{E}_{n,m,M}^{(j)} - \mathcal{E}_{n',m',M'}^{(i)}} \\ & \times \boldsymbol{\Psi}_{n',m',M'}^{(i)}. \end{aligned} \tag{42}$$

Нужный вклад в сумму дают слагаемые, содержащие поперечное магнитное поле и пропорциональные z^2. В сумме останется:

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(\pm 3/2)} = & \sqrt{3}\left(\left(B_x^2 + B_y^2\right) - i\,\frac{B_x B_y}{2} \right) \\ & \times \sum_{M'=2}^{\infty} \frac{\langle \phi_M^{(\pm 3/2)}(z) | z^2 | \phi_{M'}^{(\mp 1/2)} \rangle}{\Delta_{lh}^{\pm}} \boldsymbol{\Psi}_{n,m,M'}^{(\pm 1/2)}. \end{aligned}$$

Новые волновые функции нулевого приближения для расчета продольного g-фактора экситона имеют вид:

$$\boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(3/2)} = f_{n,m}(\rho,\phi) \left(\begin{bmatrix} \phi_M^{(3/2)}(z_h) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_M^{(-1/2)}(z_h) \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(-3/2)} = f_{n,m}(\rho,\phi) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_M^{(-3/2)}(z_h) \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_M^{(1/2)}(z_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{n,m,M}^{(1/2)} = f_{n,m}(\rho,\phi) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \phi_M^{(1/2)}(z_h) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_M^{(-3/2)}(z_h) \end{bmatrix} \right).$$

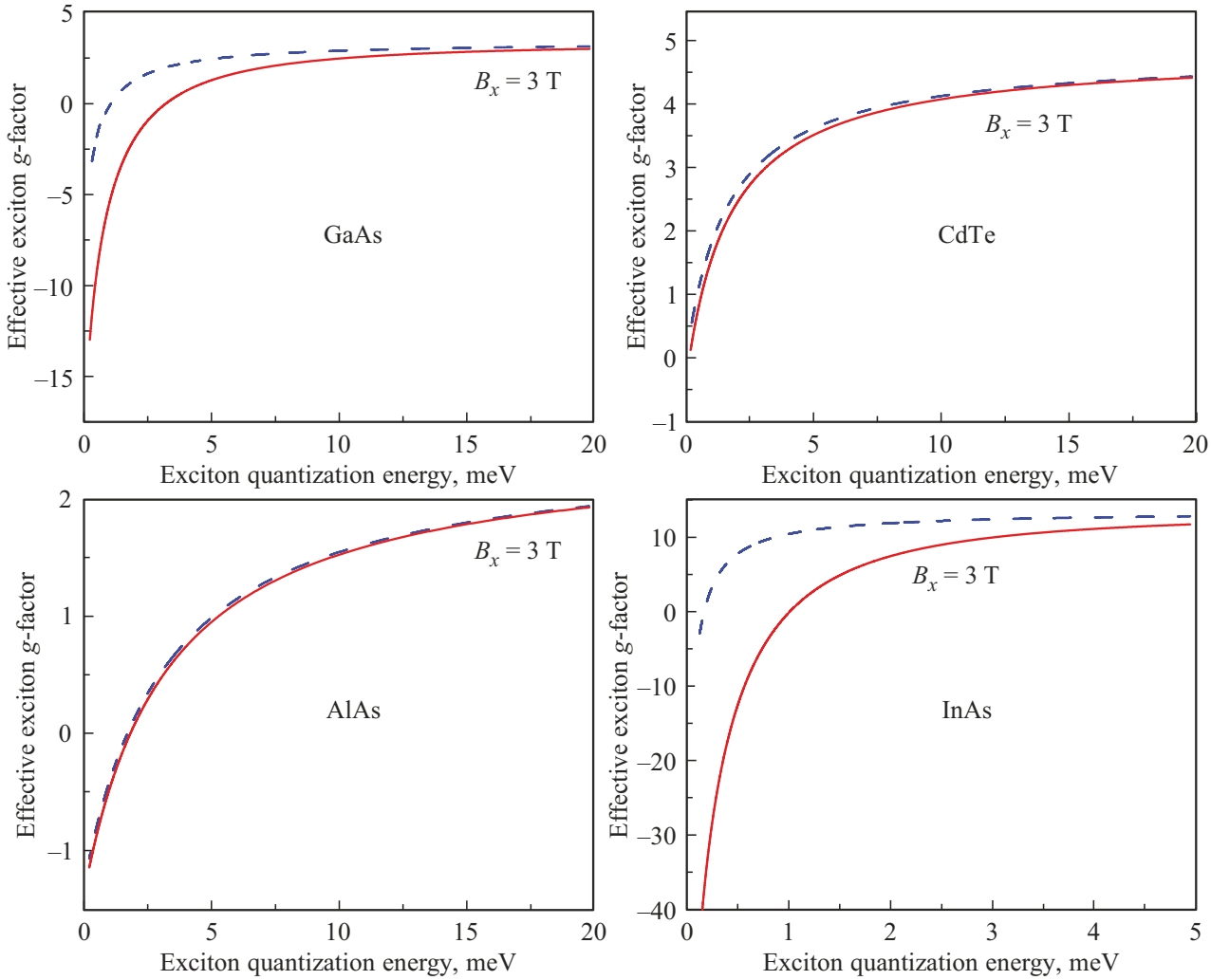


Рис. 2. Расчет поправки к g-фактору в поперечном магнитном поле для структур с КЯ на основе GaAs, InAs, CdTe и AlAsc бесконечно высокими барьерами. Синяя, штриховая кривая — поперечное поле равно нулю. Красная, сплошная кривая поперечное поле не равно нулю. Напряженность продольного поля для всех рисунков составляла 1 T, напряженность поперечного поля приведена на рисунках. Параметры расчета представлены в табл. 1.

$$\Psi_{n,m,M}^{(-1/2)} = f_{n,m}(\rho,\phi)\left(\begin{bmatrix}0\\0\\\phi_M^{(-1/2)}(z_h)\\0\end{bmatrix} + \chi\begin{bmatrix}\phi_M^{(3/2)}(z_h)\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right).$$

Тогда χ приближенно равна:

$$\chi(L) \approx \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{\gamma L^2}{m_0}\frac{\sqrt{3}}{\Delta_{lh}(L)}\left[\left(B_x^2+B_y^2\right) - \frac{i}{2}B_xB_y\right]$$

$$= 2\pi^2\sqrt{3}\mu_B^2\frac{\gamma(\gamma_1-2\gamma)}{\Delta_{lh}^{\pm}(L)E_{zh}^{lh}(L)}\left[\left(B_x^2+B_y^2\right) - \frac{i}{2}B_xB_y\right]. \quad (44)$$

Здесь: $\mu_B = 0.056\,\text{meV/T}$ — магнетон Бора, $\Delta_{lh}^{\pm} = E_{hlM}(z) - E_{hlM'}(z)$ — расщепление состояний легких и тяжелых дырок, Ry — энергия связи экситона.

Теперь можно вычислить поправку к продольному g-фактору $g_{\parallel}$ пользуясь новыми волновыми функциями нулевого приближения (43). Используем тот же подход, который применялся для расчета поправки к продольному g-фактору (38,39a) с этими новыми волновыми функциями. Получим поправку к зеемановскому расщеплению экситона за счет влияния поперечного поля. Пусть

Таблица 1. Некоторые параметры материалов, использованных в расчете

	GaAs	CdTe	InAs	AlAs
γ_1	6.98	4.14	20	3.76
γ_2	2.58	1.4	8.92	1.18
κ	−1.3	−0.28	−7.8	0.12
ε	13.1	10.2	14.6	9.0
g_e	−0.44	−1.66	−15	+2.0
m_e	0.063	0.1	0.023	0.146

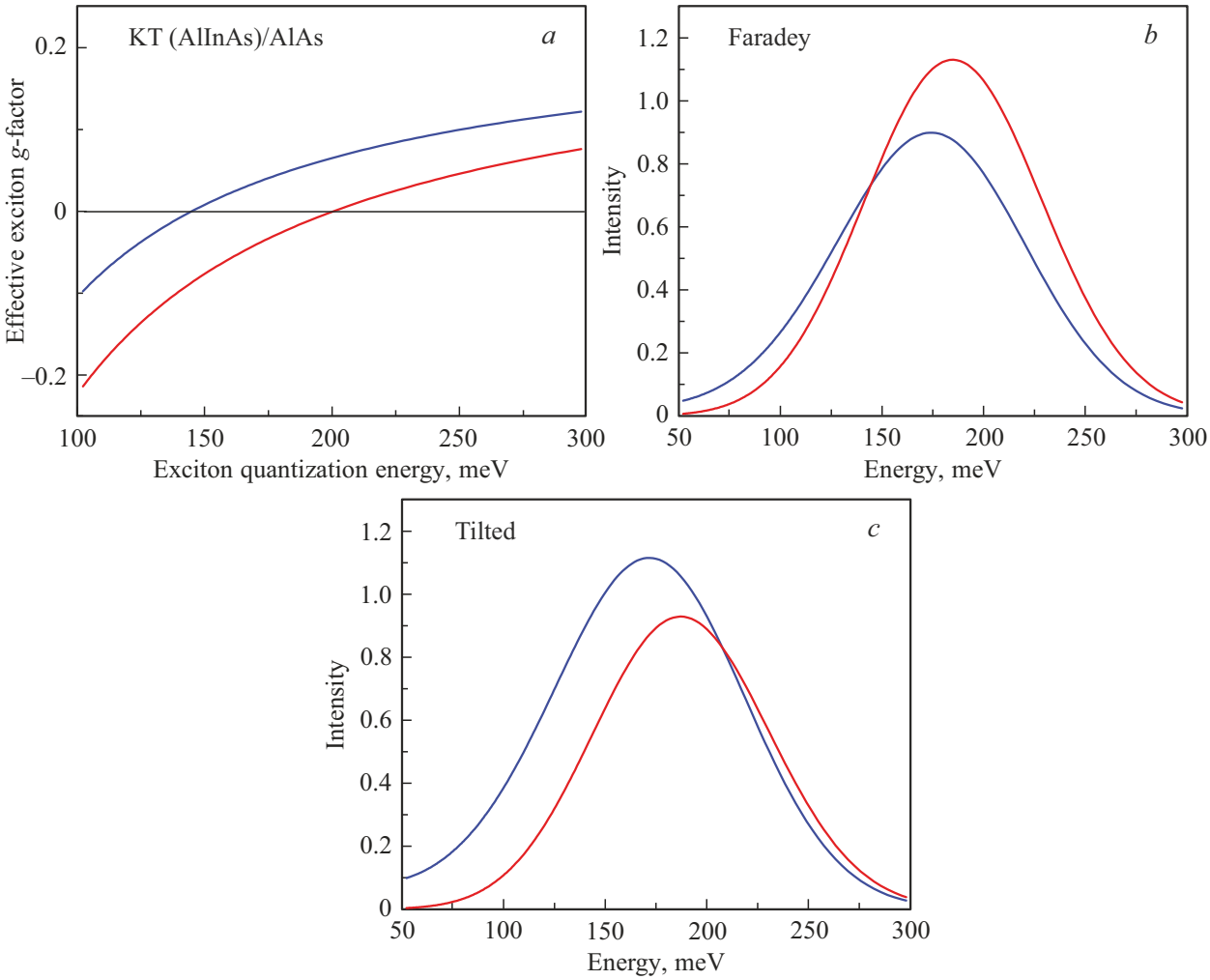


Рис. 3. *a* — расчетная зависимость g-фактора экситона от энергии квантования дырки в КТ InAlAs/AlAs с непрямой запрещенной зоной. Синяя штриховая кривая магнитное поле в геометрии Фарадея, красная сплошная кривая — наклонное магнитное поле. Величина поля $B_z = B_x = 3$ Т. *b* — расчет спектра ФЛ в чистой геометрии Фарадея. *c* — расчет спектра ФЛ в наклонном магнитном поле с параметрами представленными на рис. 3, *a*. Параметры расчета представлены в табл. 2.

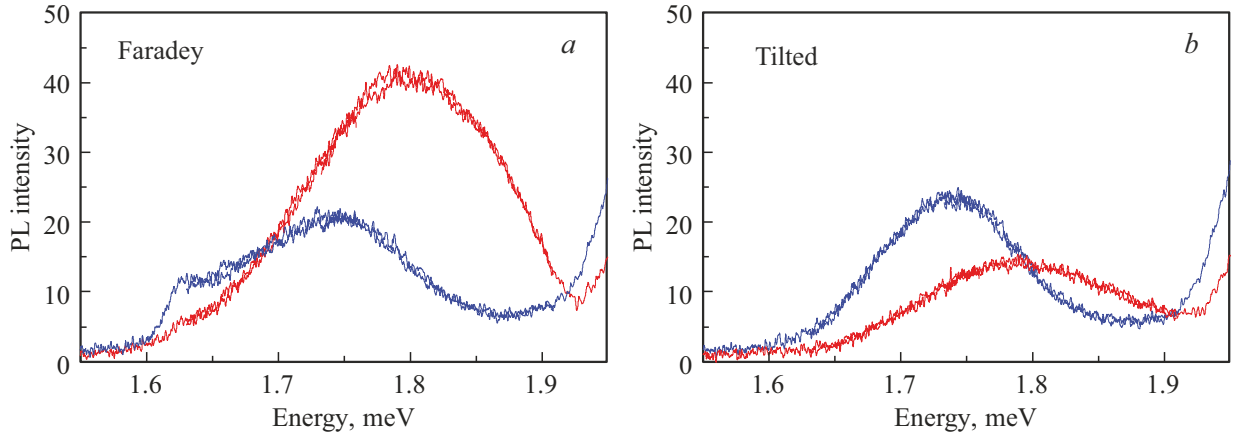


Рис. 4. Измеренные в магнитном поле спектры ФЛ от массива квантовых точек InAlAs/AlAs. Синяя кривая — в поляризации σ^+, красная — σ^-: *a* — в геометрии Фарадея в поле 6 Т; *b* — в наклонном поле 6 Т под углом 45° к оси z ($B_z = 3T$, $B_x = 3T$). (Спектры предоставлены Т.С. Шамирзаевым).

Таблица 2. Параметры расчета КТ InAlAs/AlAs

γ_1	8.4
γ	3.1
ε	13
m_e	1
g_0	−9.9

$B_x = B_z$, $B_y = 0$, тогда, кубическая по магнитному полю поправка к зеемановскому расщеплению:

$$\Delta E_0^{(\pm 3/2)}(L, a_{\mathrm{B}}) \approx \pm 12\,\mathrm{Re}(\chi)\left(\frac{\gamma}{\gamma_1 - 2\gamma}\right) \times (\hbar\omega_c)\frac{E_z^{hh}}{E_{21} + Ry^{lh}}. \quad (45a)$$

В терминах раздела 2.1 формула (45a) запишется:

$$\Delta E_0^{(\pm 3/2)} = \mu B_z C_3^{\parallel} Q_z^2 (B_x^2 + B_y^2), \quad (45b)$$

здесь:

$$C_3^{\parallel} = 3\left(\frac{\gamma}{m_0}\right)\left(\frac{\hbar^2}{E_{21} + Ry^{lh}}\right)\left(\frac{1}{B_x^2}\right)\mathrm{Re}(\chi).$$

Зависимости g-фактора экситона от энергии квантования в наклонном магнитном поле приведены на рис. 2 для разных материалов.

Из рис. 2 видно, что поправка к g-фактору максимальна для КЯ (КТ) на основе InAs и GaAs и минимальна для КЯ (КТ) на основе AlAs и CdTe. Экспериментально влияние поперечного поля в широких (1600 Å) КЯ на основе CdTe было исследовано в работе [dev] и установлено, что в таких структурах эффект поперечного поля пренебрежимо мал, что согласуется с рис. 2.

4. Заключение

В кубическом кристалле в магнитном поле, приложенном в геометрии Фарадея $\mathbf{B} \parallel \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$ — волновой вектор центра масс экситона) у основного состояния экситона появляется орбитальный магнитный момент дополнительно к спиновому. Это происходит благодаря смешиванию основного 1s состояния тяжелого экситона и всех np состояний легкого экситона. Этот дополнительный магнитный момент пропорционален кинетической энергии центра масс экситона. Величина добавки к g-фактору экситона сравнима и даже может превышать величину g-фактора „покоящегося“ экситона.

Зависимости магнитного момента экситона (g-фактора) от волнового вектора центра масс приведены на рис. 1 для разных веществ. Из расчета видно, что величина поправки к g-фактору больше для узкозонных полупроводников чем для широкозонных. Этот эффект сохраняется и для квантовых ям, и для квантовых точек. Более того, с ростом энергии квантования растет и поправка к g-фактору.

Поперечное магнитное поле приводит к смешиванию состояний легких и тяжелых дырок и тем самым увеличивает добавку к g-фактору экситона. Это влияние может быть значительным и приводить к смене знака g-фактора.

Однако, очевидно, что квантование движения экситона/дырки вдоль оси z структуры ослабляет влияние поперечного поля на экситон. Из рис. 2 видно, что поправка от поперечного поля максимальна для широких КЯ со слабым конфайнаментом носителей/экситонов и быстро падает для узких ям с большой энергией квантования носителей. Естественно, эта поправка зависит и от параметров материалов и максимальна в относительно узкозонных полупроводниках (рис. 2).

В квантовых точках InAlAs/AlAs действие поперечного поля ярко проявляется в спектрах ФЛ. На рис. 3, *a* представлен расчет g-фактора экситона в КТ InAlAs/AlAs с непрямой запрещенной зоной. Для этих КТ изменение продольного g-фактора экситона в поперечном магнитном поле оказывается значительным.

Спектры, приведенные на рис. 3 были рассчитаны так, как это описано в статье [14], то есть в пренебрежении прыжковой релаксацией по локализованным состояниям. Для достаточно разреженного массива КТ это оправдано.

Расчетные спектры имеет смысл сравнить с экспериментально измеренными. Экспериментально измеренные спектры ФЛ для массива КТ InAlAs/AlAs представлены на рис. 4.

Видно хорошее соответствие расчетных и экспериментальных спектров. Следует отметить, что такое изменение спектра, как на рис. 4 невозможно объяснить изменением кинетики излучения при релаксации экситонов по локализованным состояниям в КТ.

Благодарности

Авторы благодарят Т.С. Шамирзаева за предоставление экспериментальных спектров.

Финансирование работы

Работа ЛВК поддержана грантом Российского научного фонда (№ 25-22-20074) и Санкт-Петербургского научного фонда в соответствии с договором№ 25-22-20074 от 05 июня 2025 г.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] N.J. Traynor, R.J. Warburton, M.J. Snelling, R.T. Harley. Phys. Rev. B **55**, 15701 (1997).
[2] A.A. Kiselev, E.L. Ivchenko. Phys. Rev. B **58**, 16353 (1998).
[3] Е.Л. Ивченко, А.А. Киселев. ФТП **266**, 1471 (1992).

[4] А.А. Кисилев, Л.В. Моисеев. ФТТ **38**, 1574 (1996).
[5] M. Durnev, M. Glazov, E. Ivchenko. Physica E **44**, 797 (2012).
[6] М.В. Дурнев. ФТТ **56**, 1364 (2014).
[7] M.A. Semina, R.A. Suris. Semiconductors **49**, 797 (2015).
[8] L.C. Smith, J.J. Davies, D. Wolverson, S. Crampin, R.T. Cox, J. Cibert, H. Mariette, V.P. Kochereshko, M. Wiater, G. Karczewski, T. Wojtowicz. Phys. Rev. B **78**, 085204 (2008).
[9] J.J. Davies, D. Wolverson, V.P. Kochereshko, A.V. Platonov, R.T. Cox, J. Cibert, H. Mariette, C. Bodin, C. Gourgon, E.V. Ubyivovk, Yu.P. Efimov, S.A. Eliseev. Phys. Rev. Lett. **97**, 1874031 (2006).
[10] J.J. Davies, L.C. Smith, D. Wolverson, A. Gust, C. Kruse, D. Hommel, V.P. Kochereshko. Phys. Rev. B **81**, 0852081 (2010).
[11] M.A. Semina, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina. Phys. Rev. B **104**, 205423 (2021).
[12] L.V. Kotova, T.S. Shamirzaev, D.R. Yakovlev, V.P. Kochereshko, M. Bayer. Phys. Rev. B **111**, 115427 (2025).
[13] Г.Е. Бир, Г.Е. Пикус. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. Наука, М. (1974).
[14] Л.В. Котова, В.П. Кочерешко. ЖЭТФ **165**, 818 (2024).
[15] L.C. Smith, J.J. Davies, D. Wolverson, H. Boukari, H. Mariett, V.P. Kochereshko, R.T. Phillips. Phys. Rev. B **83**, 1552061 (2011).
[16] А.В. Родина, М.А. Семина, Е.Л. Ивченко. ФТТ **67**, 2023 (2025).
[17] T. Wimbauer, K. Oettinger, A.L. Efros, B.K. Meyer, H. Brugger. Phys. Rev. B **50**, 8889 (1994).
[18] D. Csontosova, P. Klenovsky. Phys. Rev. B **102**, 125412 (2020).
[19] M. Altarelly, N. Lipari. Phys. Rev. B **15**, 4898 (1977).
[20] E.O. Kane. Phys. Rev. B **11**, 3850 (1975).
[21] D.G. Thomas, J.J. Hopfield. Phys. Rev. B **124**, 657 (1961).
[22] A. Baldereschi, N.C. Lipari. Phys Rev B **3**, 439 (1971).
[23] M. Altarelly, N. Lipari. Phys. Rev. B **7**, 3798 (1973).
[24] K. Cho, S. Suga, W. Dreybrodt, F. Willmann. Phys. Rev. B **11**, 1512 (1975).
[25] P.S. Grigoryev, O.A. Yugov, S.A. Eliseev, Y.P. Efimov, V.A. Lovtcius, V.V. Petrov, V.F. Sapega, I.V. Ignatiev. Phys. Rev. B **93**, 205425 (2016).
[26] Д.К. Логинов, В.П. Кочерешко, А.В. Платонов, J.J. Davies, D. Wolverson, L.C. Smith, R.T. Cox, J. Cibert, H. Mariette. ФТТ, **51**, 1555 (2009).
[27] J.J. Davies, D. Wolverson, V.P. Kochereshko, A.V. Platonov, R.T. Cox, J. Cibert, H. Mariette, C. Bodin, C. Gourgon, E.V. Ubyivovk, Yu.P. Efimov, S.A. Eliseev. Phys. Rev. Lett. **97**, 187403 (2006).
[28] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика: в 10 т. Т. **3**. Квантовая механика. Нерелятивистская теория М.: Наука, (1989).

Редактор А.Н. Смирнов