09

Динамика диэлектрической микросферы в поле гауссова луча

© А.С. Лещев, Ю.В. Рождественский

Университет ИТМО,
197101 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: 19Leshal@gmail.com

Поступило в Редакцию 24 февраля 2026 г.
В окончательной редакции 18 июня 2026 г.
Принято к публикации 19 июня 2026 г.

Исследована динамика диэлектрической частицы в поле вертикально распространяющегося лазерного пучка с гауссовым профилем интенсивности в условиях вакуума. Показано, что траектория такой частицы, в общем случае, представляет спираль, поперечный размер которой увеличивается по мере удаления от фокуса гауссова луча. Такая форма траектории формируется совместным действием продольной силы радиационного давления и силой тяжести по вертикальной оси, и действием градиентной силы светового давления в поперечном направлении. Также рассмотрена возможность измерения ускорения свободного падения и определение относительных масс микрочастиц.

Ключевые слова: гауссов пучок, микрочастица, оптодинамика.

DOI: 10.61011/JTF.2026.12.64069.37-26

Введение

Левитация диэлектрической частицы микронного размера в поле оптического излучения, известная с 70-х годов прошлого столетия, наглядно демонстрирует эффективность воздействия лазерного излучения на микрочастицу для компенсации силы тяжести световым давлением. Последнее обстоятельство стимулировало интерес к данному направлению, что, в конечном счете, привело к созданию лазерного пинцета (Артур Эшкин, Нобелевская премия 2018 г.), который с успехом используется в различных физических и биологических исследованиях [1–4]. При этом основное внимание уделялось возможности пространственной локализации микрообъекта при компенсации силы тяжести в точке фокуса лазерного луча. С другой стороны, контроль динамики микрочастицы в поле оптического излучения так же представляет интерес, например, в задаче определения массы микрообъекта [5].

В настоящей работе мы рассматриваем динамику левитирующей, в поле гауссова лазерного пучка, диэлектрической частицы микронного размера. В этом случае частица осциллирует по вертикальной оси под действием продольной силы светового давления и силы тяжести, а в поперечном направлении динамика частицы будет определяться градиентной составляющей силы светового давления. В результате траектория частицы под действием оптического излучения принимает вид спирали с радиусом, который увеличивается по мере удаления от фокуса гауссова луча.

Отметим, что микрочастица, осциллирующая в поле гауссова луча в условиях вакуума, может быть использована в качестве различного рода датчиков, в том числе и для гравиметра, аналогичному баллистическому гравиметру на основе падающей массы [6], но без механических устройств (механизм поднятия массы и т. п.). Кроме того, возможно изучение физических свойств осциллирующей микрочастицы.

1. Основные уравнения

Рассмотрим диэлектрическую частицу с показателем преломления n_0, массой m, радиусом R_0 в поле лазерного излучения с гауссовым распределением интенсивности (рис. 1). В этом случае интенсивность пучка имеет вид

$$I(x, y, z) = \frac{2P}{\pi w(z)^2} \exp\left(\frac{-2\left(x^2 + y^2\right)}{w(z)^2}\right),$$

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}, \qquad (1)$$

где P — мощность оптического излучения, w_0 — радиус лазерного излучения в перетяжке, λ — длина волны излучения.

В случае, представленном на рис.1, на частицу действуют две оптические силы: F_s — продольная сила, действующая по направлению распространения лазерного луча вдоль вертикальной оси (ось Z) и F_{grad} — градиентная сила, направленная к оси оптического пучка в плоскости XY. Кроме того, на частицу действует сила тяжести F_g, направленная вертикально вниз. Будем считать, что частица движется в вакууме и пренебрежем силой вязкого трения. Тогда уравнения движения частицы в поле гауссова луча принимают вид

$$m\ddot{z} = F_s - F_g, \quad m\ddot{x} = F^x_{grad}, \quad m\ddot{y} = F^y_{grad}, \qquad (2)$$

где сила тяжести представлена в виде

$$F_g = m(g_0 - W_{zz}z), \qquad (3)$$

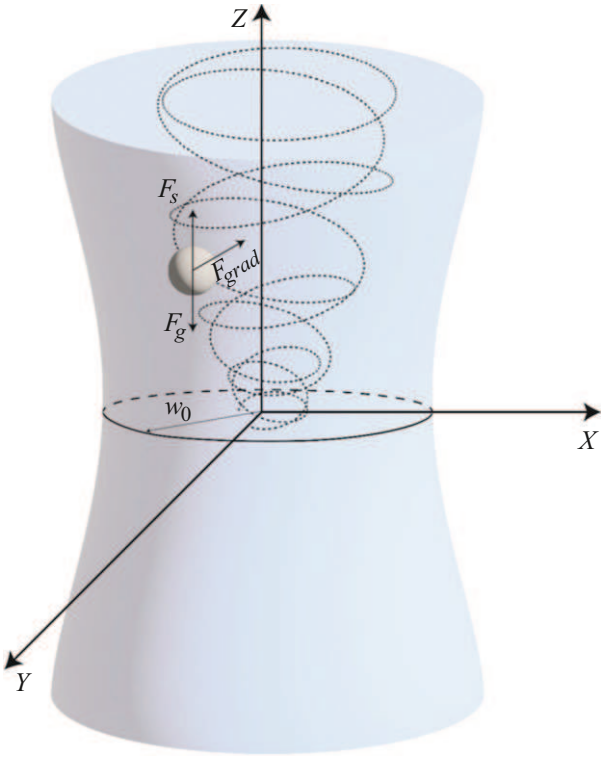


Рис. 1. Общий вид траектории частицы в поле лазерного излучения с гауссовым профилем пучка. Лазерное излучение интенсивностью длиной волны и шириной перетяжки распространяется снизу вверх, действуя на диэлектрическую частицу с массой радиусом и показателем преломления. Динамику частицы определяют две оптические силы: продольная сила, действующая по направлению распространения пучка, и градиентная сила, направленная к оси оптического пучка, и сила тяжести, направленная вертикально вниз. В фокусе пучка продольная сила превосходит силу тяжести, и частица движется вверх. По мере удаления от фокуса сила тяжести начинает превосходить продольную силу, поэтому частица начинает двигаться вниз. Градиентная сила, так же как и продольная, уменьшается при удалении от фокуса. В общем случае частица совершает движение по спирали, радиус которой увеличивается при удалении от фокуса пучка (штриховая линия).

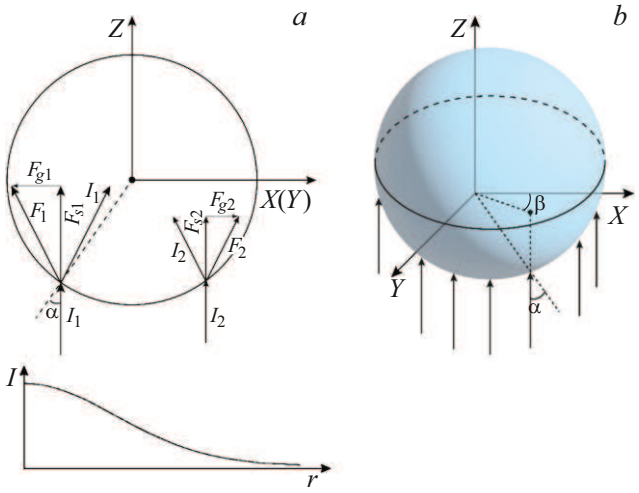


Рис. 2. *a* — сверху на частице представлен механизм возникновения оптических сил, а внизу показана зависимость интенсивности падающего излучения от расстояния до оси гауссова пучка; *b* — показаны углы, по которым ведется интегрирование (по углу падения α и азимутальному углу β) для получения полной силы светового давления (4) в гауссовом луче.

и средние значения на поверхности Земли $g_0 = 981\,\text{Gal}$ — ускорение свободного падения в начале системы отсчета, которое совпадает с фокусом оптического луча, а $W_{zz} = 3\,\text{mGal/cm}$ — вертикальный градиент ускорения свободного падения по оси Z. Такое представление ускорения свободного падения позволяет учесть изменение силы тяжести при движении частицы в поле тяжести Земли.

Рассмотрим теперь возникновение сил светового давления в случае гауссова луча: пусть два луча падают на границу частицы с интенсивностями I_1 и I_2 (при этом $I_1 > I_2$) (рис. 2, *a*). При этом I_1 падает на левую половину частицы, а I_2 падает на правую. Тогда вследствие преломления на границе раздела лучи меняют направления распространения, согласно законам Снеллиуса, и появляются две оптические силы F_1 и F_2, которые могут быть представлены в виде векторной суммы продольных (F_{s1} и F_{s2}) и градиентных (F_{grad1} и F_{grad2}) компонент. При этом продольные силы светового давления сонаправлены с направлением лучей, тогда как градиентные силы имеют разные направления. Таким образом, градиентные силы оптических лучей, действующие на левую половину частицы, пытаются переместить частицу в левую сторону, а действующие на правую половину частицы — вправо. Поэтому частица будет двигаться в сторону наибольшей интенсивности лазерного излучения, т. е. к оси пучка в случае гауссова распределения интенсивности.

Оптические силы, возникающие из-за изменения импульса света при преломлении или отражении на границе раздела среды и частицы (рис. 2, *b*), в случае, когда радиус частицы R_0 много больше длины волны λ излучения ($R_0 \gg \lambda$), имеют вид [7,8]:

$$F_s = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{n_1 I(\alpha,\theta)}{c}\left(1 + R\cos 2\alpha - T^2\frac{\cos(2\alpha - 2\theta) + R\cos 2\alpha}{1 + R^2 + 2R\cos 2\theta}\right)d\alpha d\beta,$$

$$F_{grad} = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{n_1 I(\alpha,\theta)}{c}\left(R\sin 2\alpha - T^2\frac{\sin(2\alpha - 2\theta) + R\sin 2\alpha}{1 + R^2 + 2R\cos 2\theta}\right)d\alpha d\beta,$$

$$n_1 \text{Sin}\alpha = n_0 \text{Sin}\theta, \qquad (4)$$

где $I(\alpha, \beta)$ — интенсивность лазерного излучения в точке со сферическими координатами относительно центра частицы (R_0, α, θ) на границе раздела частицы и среды, R и T — коэффициенты отражения и пропускания Френеля, α и θ — углы падения и преломления, связанные законом Снеллиуса, β — азимутальный угол, n_1 и n_0 — показатели преломления среды и частицы.

Выражения под интегралами справедливы для случая, когда силы вычисляются в определенной точке границы раздела с координатами α — угол падения и β — азимутальный угол [7,8]. При этом из-за гауссова профиля пучка, на каждую точку поверхности частицы действует разная интенсивность оптического излучения (рис. 2, a).

В нашем случае радиус перетяжки гауссова луча значительно превышает радиус частицы ($R_0 \ll w_0$), поэтому оптические силы действуют на всю нижнюю полусферу частицы. Следовательно для получения полной силы, действующей на частицу, необходимо произвести интегрирование по нижней поверхности частицы с переменными интегрирования (α, β), когда угол падения α изменяется от 0 до π, а азимутальный угол β изменяется от 0 до 2π (рис. 2, b).

Отметим, что представленные выше рассуждения справедливы только для сферических частиц. В случае частиц другой формы изменится оптический путь всех лучей, попадающих на частицу. Из-за этого, в выражениях (4) для продольной и градиентной оптических сил изменятся выражения в скобках, которые учитывают, как свет преломляется и отражается на границе среды и частицы. Кроме того, в случае сферической частицы не учитывается вращение, так как из-за симметричности как частицы, так и пучка, оптические силы не влияют на вращение. В случае несферических частиц в уравнении движения (2) нужно добавить уравнения для моментов сил, которые позволяют учитывать вращение частицы.

2. 3D-динамика микрочастицы в поле гауссова луча

Исследуем теперь пространственную динамику диэлектрической частицы под действием оптических сил (4) в поле силы тяжести (3). Поскольку интенсивность излучения в гауссовом пучке распределена неравномерно, то и величина оптических сил будет зависеть от положения центра массы микрочастицы. На рис. 3 представлена зависимость отношения продольной оптической силы к силе тяжести от высоты подъема на различных расстояниях z от перетяжки пучка. Как видно на рисунке, при удалении от фокуса пучка продольная оптическая сила уменьшается и становится меньше силы тяжести. Тогда частица будет двигаться вниз до тех пор, пока увеличение продольной оптической силы за счет увеличения интенсивности излучения (1) сначала полностью компенсирует силу тяжести, а затем превысит ее и заставит частицу двигаться вверх (кривые на рис. 3). Именно такая пространственная зависимость

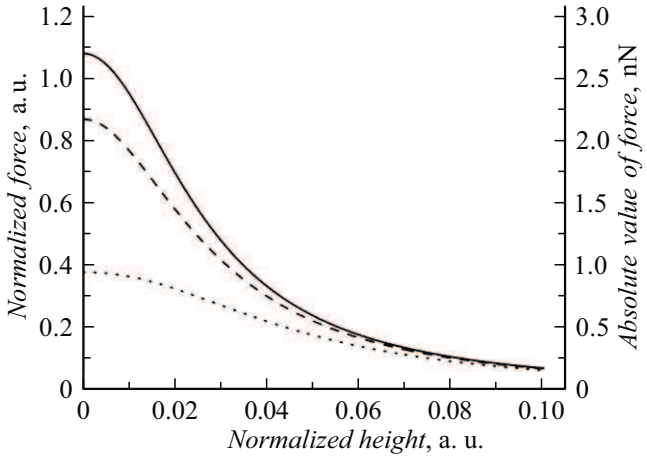


Рис. 3. Зависимость продольной оптической силы от высоты над фокусом пучка при разных расстояниях до оси пучка. По оси Y на левой шкале отложена оптическая продольная сила, нормированная на силу тяжести, а на правой абсолютное значение продольной оптической силы; по оси X отложена высота над фокусом пучка, нормированная на длину Рэлея. Сплошная кривая — сила по оси пучка, штриховая кривая — сила на расстоянии $0.5\,w_0$, пунктирная кривая — сила на расстоянии w_0.

продольной оптической силы от координаты z обеспечивает периодические колебания микрочастицы вдоль вертикальной оси.

При моделировании динамики частицы использовалась боросиликатная сфера с радиусом $R_0 = 30\,\mu$m. На частицу воздействует оптическое излучение с гауссовым профилем пучка с полной мощностью $P = 3$ W, радиусом перетяжки $w_0 = 600\,\mu$m и длиной волны $\lambda = 500$ nm. На рис. 3 высота нормировалась на длину Рэлея — расстояние, на котором площадь поперечного сечения увеличивается в два раза, которая в нашем случае равна $z_R \approx 2.3$ m.

С другой стороны, из-за неоднородности интенсивности поперек оси гауссова луча возникает градиентная оптическая сила, которая всегда направлена к оси пучка и максимальна в точке наибольшего градиента интенсивности излучения. На рис. 4 представлена зависимость отношения градиентной силы к силе тяжести от расстояния до оси пучка на разных высотах. При этом максимальное значение сила принимает в половине радиуса пучка, который увеличивается из-за расходимости. Расстояние нормировалось на длину перетяжки w_0.

Отметим, что траектория микрочастицы под действием только градиентной силы приводит к колебаниям частицы в плоскости XY с характерными чертами движения материальной точки (центра масс частицы) в поле центральной силы. В этом случае траектория частицы существенным образом зависит от вида начальных условий, и могут иметь место различные динамические режимы типа орбитирования (см. ниже). При этом траектория может быть как замкнутой, так и

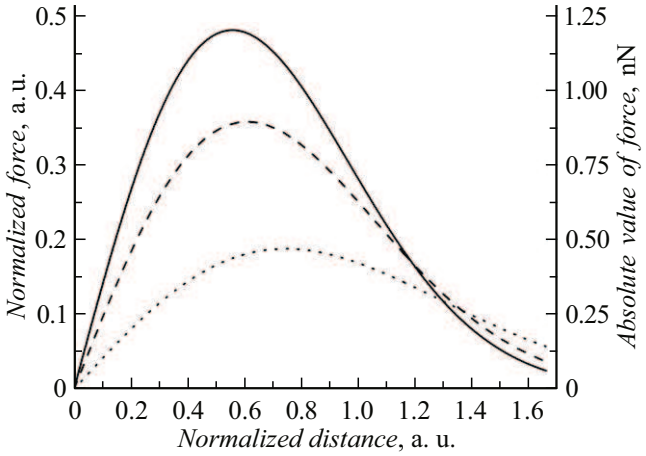


Рис. 4. Зависимость градиентной оптической силы от расстояния до оси пучка на разных высотах над фокусом пучка. По оси Y отложена оптическая градиентная сила, нормированная на силу тяжести, а на правой абсолютное значение градиентной оптической силы; по оси X отложена высота до оси пучка, нормированная на радиус пучка в фокусе. Сплошная кривая — градиентная сила в фокусе пучка, штриховая — градиентная сила на высоте половины длины Рэлея, пунктирная — на высоте, равной длине Рэлея. Градиентная сила имеет максимальное значение на половине радиуса пучка, который увеличивается с высотой из-за расходимости пучка.

не замкнутой. В результате, как указывалось выше, при совместном действии оптического излучения гауссова луча и силы тяжести микрочастица будет двигаться по спирали, радиус которой увеличивается с высотой.

На рис. 5 проведены траектории частицы для различных видов начальных условий. Видно, что характер траекторий существенно зависит от начальной скорости микрочастицы.

На рис. 5, a, b представлена одна из возможных траекторий частицы. В начальный момент времени частица находилась на расстоянии $100\,\mu$m от оси пучка. Начальная скорость частицы направлена под 90° к градиентной силе, а значение силы достаточно, чтобы удерживать частицу на круговой орбите. Кроме того, частица движется близко от оси пучка, поэтому, когда под действием продольной силы частица поднимается над фокусом пучка, градиентная сила уменьшается, и радиус спирали увеличивается (рис. 5, a, b). Отметим, что масштабы колебаний по разным осям существенно отличаются. При радиусе частицы $R_0 = 30\,\mu$m, радиус колебаний в плоскости XY составляет от $90\,\mu$m в фокусе до $105\,\mu$m в верхней точке, а осцилляции по оси Z достигают несколько десятков или сотен сантиметров.

На рис. 5, c, d представлена динамика частицы в случае увеличения начальной скорости в 2 раза. В данном случае начальной градиентной силы недостаточно для удержания частицы на круговой орбите. Вначале частица будет удаляться от оси пучка, градиентная сила увеличится и повернет частицу к оси пучка. Затем по ходу движения частицы градиентная сила будет уменьшаться, частица опять начнет отдаляться от оси пучка и все повториться. Влияние продольной силы по сравнению с предыдущим примером не изменится. Таким образом, частица опять движется по спирали с увеличивающимся радиусом, но по более сложной траектории в плоскости XY.

Таким образом, движение частицы в поле гауссова излучения является результатом различных характерных движений по разным осям. Динамика в плоскости XY представляет собой классическое двумерное движение в центральном поле, которое может быть как замкнутым, так и не замкнутым, а максимальный радиус траектории зависит от положения частицы на оси Z. По оси Z частица совершает колебательное движение. В результате частица движется по спирали сложной формы, радиус которой увеличивается по мере удаления от фокуса пучка.

3. Потенциальные возможности применения динамики микрочастицы для высокоточных измерений

В зависимости от измеряемой величины и конкретного устройства измерительного прибора могут появляться различные шумы, влияющие на измерение. При использовании оптического маятника в качестве платформы для измерительного прибора, на измерение всегда будет влиять шум мощности лазерного источника, который учитывался в виде небольшой добавки, зависящей от времени, к мощности лазера. В таком случае, выражение для интенсивности гауссова пучка (1) на оси пучка $x = y = 0$ примет вид

$$I(x, y, z) = \frac{2(P + p(t))}{\pi w(z)^2} = \frac{2P}{\pi w(z)^2} + \frac{2p(t)}{\pi w(z)^2}, \qquad (5)$$

где $p(t)$ — шум мощности лазера. Рассмотрим шум мощности лазера, для которого $\langle p(t) \rangle = 0$, однако в таком случае слагаемого $\langle 2p(t)/\pi w z^2 \rangle \neq 0$, что приводит к накоплению влияния шума на динамику одиночной частицы. Для уменьшения влияния шума можно проводить относительные измерения, сравнивая динамики двух частиц, осциллирующих в поле лазерного излучения одного и того же лазера. В таком случае шум относительного измерения будет составлять $\langle p(t)\left[\left(2/\pi w z_1^2\right) - \left(2/\pi w z_2^2\right)\right]\rangle \neq 0$, что намного меньше шума для измерения по динамике только одной частицы.

Во-первых, рассмотрим колебаний двух частиц на одной высоте. Если на частицы попадает излучение одинаковой интенсивности от одного источника, то их динамика зависит только от параметров самих частиц. Если параметры одной частицы известны с хорошей точностью, то по сравнению динамик частиц, можно определить параметры второй частицы. Например, можно определять такие параметры как масса, показатель

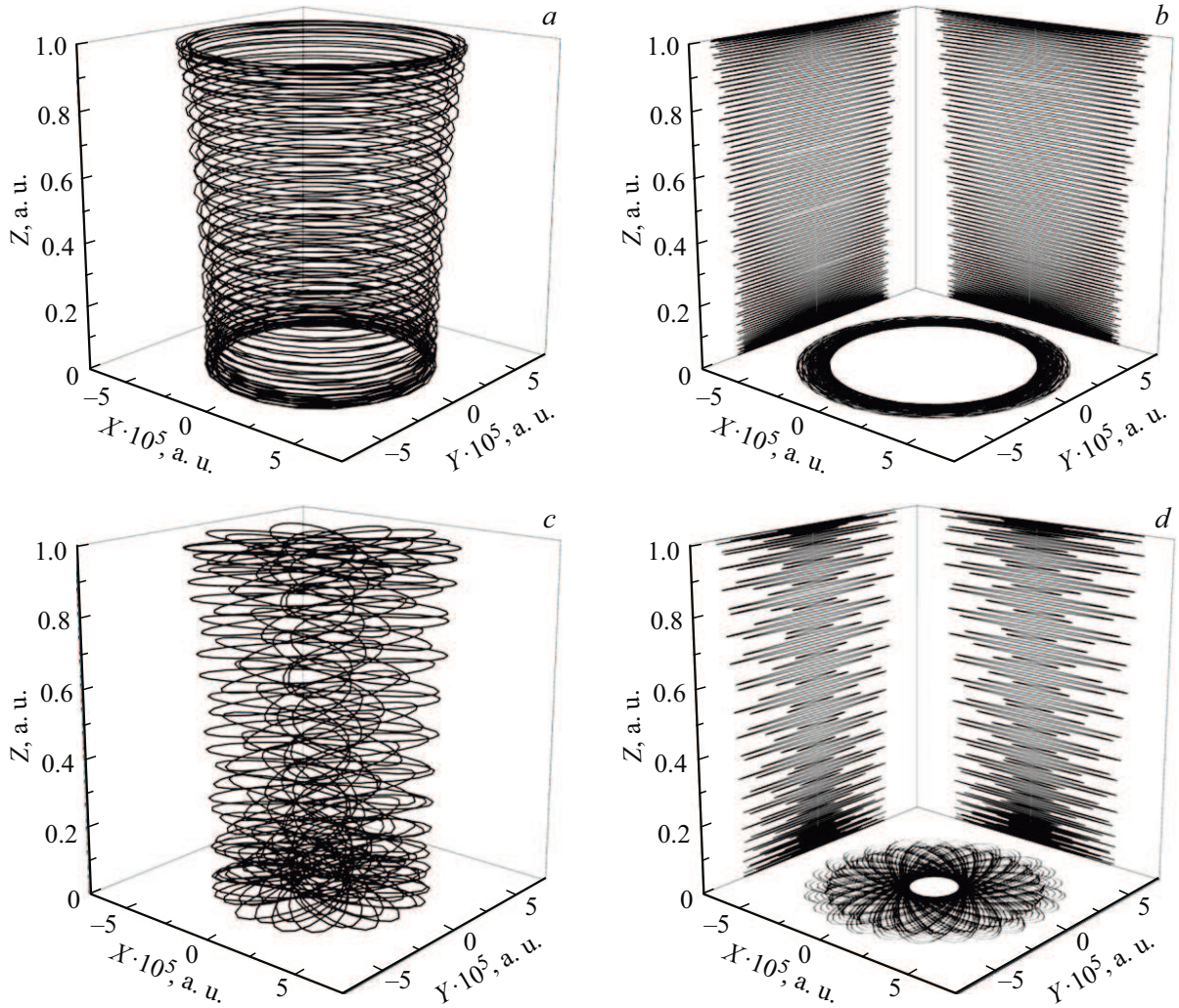


Рис. 5. Траектория частицы: a, c — 3D-траектория частицы, при разных начальных условиях; b, d — проекции траектории на плоскости XY (внизу), YZ (слева), XZ (справа), при разных начальных условиях. Оси на обоих графиках нормированы на высоту колебаний по оси Z. В начальный момент времени на рисунках a, b частица находилась на расстоянии 100 μm от оси луча и имела скорость $\upsilon = 3$ sm/s, направленную под углом 90 $^\circ$ к оси пучка. На рисунках c, d начальная скорость увеличена в 2 раза.

преломления и наличие неровностей на поверхности частицы.

Во-вторых, рассмотрим колебания двух частиц на разных высотах. Тогда они будут колебаться в условиях разной силы тяжести, что позволяет измерить ускорение свободного падения по относительной динамике частиц. Для объяснения принципа работы гравиметра рассмотрим простейший гармонический маятник. Колебания такого маятника описываются формулой

$$x = X_0 \sin(\omega t + \phi),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (6)$$

где X_0 — амплитуда колебания, ω — частота колебания, ϕ — начальная фаза колебания, l — длина подвеса. Частота колебаний зависит от ускорения свободного падения, поэтому если два одинаковых маятника будут колебаться при разных g, то их динамика будет различной. Математически это описывается следующим образом:

$$x_1 - x_2 = 2X_0 \sin\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}. \qquad (7)$$

Пусть гравиметр состоит из источника лазерного излучения, оптического волокна и двух вакуумных камер. Камеры расположены на разной высоте, а оптический путь от лазера до камер одинаковый. Внутри камер колеблются две одинаковые диэлектрические частицы. Из-за разницы высот колебания частиц происходят в условиях разного ускорения свободного падения. Пусть g_0 — ускорение свободного падения в фокусе для нижней камеры, а g_1 и g_2 — ускорения свободного

падения для нижней и верхней частиц, которые равны

$$g_1 = g_0 - W_{zz} z,$$
$$g_2 = g_0 - W_{zz}(z + \Delta z) = g_0 - W_{zz} - W_{zz}\Delta z. \quad (8)$$

Видно, что ускорения отличаются одним слагаемым, состоящим из градиента и разницы высот между камерами. Последняя задается вручную, поэтому по сравнению динамик (7) можно определить локальный градиент. Далее по анализу динамики определяется значение ускорения свободного падения в фокусе оптического излучения.

Заключение

В представленной работе мы исследуем динамику сферической диэлектрической микрочастицы в поле оптического излучения с гауссовым профилем пучка. Показано, что траектория частицы имеет сложную форму, что вызвано сложением динамики в центральном поле в плоскости XY и осцилляций по оси Z. Был предложен принцип работы измерительных приборов, основанных на сравнении динамик двух частиц, которые способны изучать свойства одной из частиц или измерять постоянное значение и градиент ускорения свободного падения.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] T.T. Perkins. Laser Photon. Rev., **3** (1–2), 203 (2009). https://doi.org/10.1002/lpor.200810014
[2] H.D. Ou-Yang, M.T. Wei. Annual Rev. Phys. Chem., **61** (1), 421 (2010). https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.012809.103454
[3] C. Bechinger, R.Di. Leonardo, H. Löwen, C. Reichhardt, G. Volpe, G. Volpe. Rev. Modern Phys., **88** (4), 045006 (2016). https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.045006
[4] A. Martirosyan, P. Muzhikyan, R. Kostanyan. Opt. Eng., **64** (4), 044106 (2025). https://doi.org/10.1117/1.OE.64.4.044106
[5] X. Xu, Z. Wang, N. Li, W. Li, P. He, X. Chen, C. Liu, H. Hu. Appl. Opt., **64** (4), 10017 (2025). https://doi.org/ 10.1364/AO.578243
[6] L.F. Vitushkin, O.A. Orlov. Gyroscopy and Navigation, **5** (4), 283 (2014). https://doi.org/10.1134/S2075108714040105
[7] С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. *Физическая оптика*, учебник (Изд-во Московского ун-та, М., 1998)
[8] A. Ashkin. Biophys. J., **61** (2), 569 (1992). https://doi.org/10.1016/S0006-3495(92)81860-X