01

Дрейф диска из поляризованного электрета в градиентном электрическом поле конденсатора с кольцевыми электродами

© Н.А. Поклонский, И.А. Желудкович, И.И. Аникеев, С.А. Вырко

Белорусский государственный университет,
220030 Минск, Беларусь
e-mail: poklonski@bsu.by

Поступило в Редакцию 1 августа 2026 г.
В окончательной редакции 15 сентября 2026 г.
Принято к публикации 20 сентября 2026 г.

Разработана физико-математическая модель дрейфа диска из твердого электрета в стационарном градиентном электрическом поле вакуумного конденсатора. Предполагается, что электрический дипольный момент диска толщиной 1.5 mm и радиусом $R = 3$ mm целиком определяется собственной однородной поляризацией электрета. Получена формула действующей на диск силы, обусловленной взаимодействием неоднородного (градиентного) электрического поля конденсатора с дипольным моментом электрета. Градиентное электрическое поле создается конденсатором длиной $L = 3R$ из двух соосных металлических колец радиусами $15R$ и $5R$. Рассмотрены напряженности электрического поля, не превышающие поле пробоя модельного электрета. Рассчитаны зависимости времени пролета и скорости вылета диска от разности электрических потенциалов на электродах конденсатора. Собственный электрический дипольный момент диска ориентирован противоположно направлению напряженности электрического поля конденсатора, направленному от кольца с большим радиусом к кольцу с меньшим радиусом. Рассмотрен диск с плотностью поверхностного заряда $\approx 3.7\,\mathrm{mC/m^2}$. При разности электрических потенциалов 290 kV между электродами в пределе нулевой скорости влета диска в конденсатор, скорость диска на вылете из электрода с меньшим радиусом составляет ≈ 4.7 m/s.

Ключевые слова: диск из электрета, кольцевой вакуумный конденсатор, стационарное градиентное электрическое поле, ускорение диска.

DOI: 10.61011/JTF.2026.12.64064.259-26

Введение

В последнее время возобновились исследования движения диэлектрических частиц микронных размеров в стационарном однородном электрическом поле [1–3]. Частным случаем такого движения является вращение Квинке (предсказанное Герцем в 1881 г.) [4,5]. Также обсуждаются возможности наблюдения магнитного аналога вращения Квинке для диамагнитной микрочастицы, погруженной в ферромагнитную жидкость и для диамагнитной микрочастицы, левитирующей в вакууме в постоянном однородном магнитном поле [6]. Показано, что при вращении Квинке диэлектрические коллоидные частицы в слабо электропроводящих жидкостях могут перемещаться вдоль плоского электрода и совершать при этом колебания, что превращает систему „частица–электрод“ в коллоидный осциллятор [7]. Отдельный интерес представляет фотоиндуцируемое вращение частиц полупроводников в растворе, где крутящий момент определяется дипольным моментом фотовозбужденного состояния частиц и вязкостью раствора [2,8]. Исследуется также возможность (само)вращения дипольных частиц на инженерных поверхностях с фотоиндуцируемым электрическим дипольным моментом в отсутствие внешнего источника поля [9].

Востребованными для практики являются решения задач поляризации и ориентации микро- и наночастиц во внешнем однородном электрическом поле [5,10]. В работе [11] описаны электростатические осцилляторы различных типов (от макро- до микроразмеров). В частности, показано, что к электростатическим осцилляторам можно отнести заряженную границу раздела жидкостей, находящуюся во внешнем однородном стационарном электрическом поле (см. также [12]). Для индустриальных технологий актуальны исследования бесконтактных сверхвысокочастотных (СВЧ) измерений электрических параметров металлических и диэлектрических шаров миллиметровых размеров при их свободном пролете сквозь центр СВЧ-резонатора типа H_{101} [13].

Во внешнем электрическом поле заряженные частицы дисперсной фазы в диэлектрической жидкости за счет электрофореза могут не только вращаться, но и поступательно перемещаться (см., например, [14]). Дрейф микрочастиц при этом может происходить как вдоль, так и перпендикулярно силовым линиям напряженности внешнего электрического поля (например, в жидких кристаллах [15]). При диэлектрофорезе диэлектрические или электропроводящие частицы перемещаются под воздействием неоднородного электрического поля (см., например, [5,16,17]). Магнитным аналогом диэлектрофореза является магнитофорез, при котором магнит-

ные частицы перемещаются в неоднородном магнитном поле [5]. Отдельно выделяют электрофорез с индуцируемым зарядом, при котором поляризуемые частицы движутся в электролите под действием электрического поля, из-за наличия собственного индуцированного двойного электрического слоя (например, янус-частицы, одна половина которых состоит из диэлектрика, а другая — из металла [18]). Также выделяют диполофорез, при котором незаряженные поляризуемые частицы движутся в неоднородном электрическом поле под действием суммарной силы классического диэлектрофореза и электрофореза с индуцируемым зарядом [19]. Таким образом, внешнее электрическое поле способно вызывать различные режимы поступательного движения частиц: от классического электрофореза вдоль поля до сложного диэлектрофореза и электрофореза с индуцируемым зарядом в неоднородных и асимметричных по времени полях. Управляя неоднородностью, частотой и формой сигнала, можно целенаправленно задавать траектории, скорость и селективность переноса частиц.

Несмотря на достигнутый прогресс, в работах [1–17] не рассматривалась возможность направленного дрейфа частицы в форме диска из электрета с собственным дипольным моментом в градиентном электрическом поле конденсатора. Встроенный электрический дипольный момент такой частицы способствует ее поляризационному отклику в неоднородном стационарном внешнем электрическом поле, открывая путь к эффективному дрейфу, контролируемому градиентом поля.

Практическая значимость исследований дрейфа частиц с постоянным электрическим дипольным моментом во внешнем градиентном электрическом поле обусловлена потребностью в решении ряда задач: 1) управляемой полировки микрочастиц в диэлектрических жидкостях; 2) ориентации и направленного движения во внешнем электрическом поле полупроводниковых микродисков (в жидких кристаллах) для повышения быстродействия жидкокристаллических экранов [15]; 3) магнитоэлектрореологической полировки микрочастицами оптических элементов; 4) управления миграцией лекарств в живых организмах посредством рэтчет-эффекта (профилированными микрочастицами во внешнем электрическом поле; [20]); 5) создания микроэлектростатических приводов и методов стабилизации сердечного ритма.

Цель настоящей работы — рассчитать параметры дрейфа поляризованного электрета в форме диска в стационарном градиентном электрическом поле вакуумного кольцевого конденсатора.

1. Основные соотношения

Рассмотрим диск из модельного электрета радиуса R и толщиной h в декартовой системе координат (x, y, z), связанной с диском (рис. 1): $|z| \le h/2$, $x^2 + y^2 \le R^2$. Вектор электрического дипольного момента $\mathbf{p}$ в диске

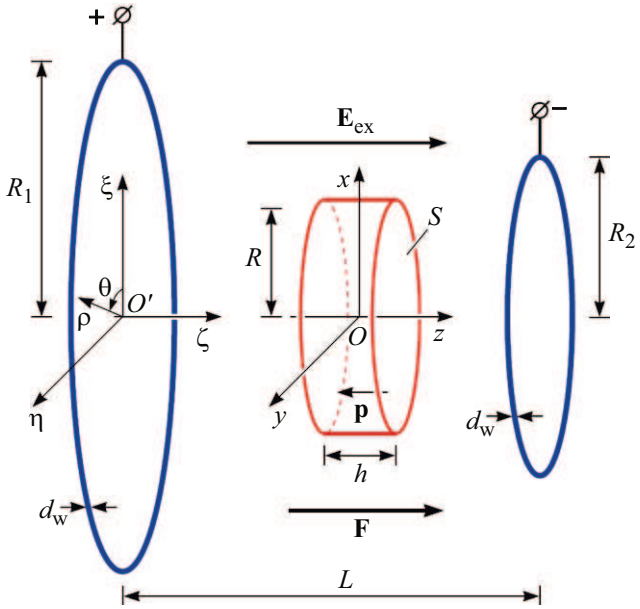


Рис. 1. Схема размещения диска из электрета (электрический дипольный момент $\mathbf{p}$, толщина h, радиус R, площадь основания $S = \pi R^2$) между двумя параллельными электродами вакуумного конденсатора из соосных металлических колец радиусами R_1 и R_2, расположенными на расстоянии L друг от друга; $R < R_2 < R_1$; d_w — диаметр поперечного сечения цилиндрической проволоки, свернутой в кольцо.

из электрета направим противоположно оси z, а его значение есть (см., например, [21]).

$$p = P_s V = P_s S h = \sigma_s \pi R^2 h, \qquad (1)$$

где $P_s = \sigma_s$ — однородная поляризованность электрета (равна плотности поверхностного заряда σ_s), $V = \pi R^2 h$ — объем диска, $S = \pi R^2$ — площадь основания диска.

Отметим, что в рассматриваемой задаче диск движется в вакуумном конденсаторе, поэтому механизм релаксации заряда на внешней поверхности диска по Максвеллу–Вагнеру, характерный для дисперсных систем „твердая частица–жидкая или газовая среда“, не является определяющим (см., например, [5,17]). В настоящей работе считается, что отклик диска из поляризованного электрета на внешнее электрическое поле обусловлен только его собственным электрическим дипольным моментом. Принимается, что характерное время внутренней релаксации поляризующих зарядов в электрете много больше времени пролета диска вдоль аксиальной оси симметрии конденсатора через его центр, так что электрический дипольный момент диска можно считать квазистационарным.

Найдем действующую на диск из поляризованного электрета силу в градиентном электрическом поле и ускорение, приобретаемое диском при пролете между параллельными электродами вакуумного электрического конденсатора, расположенными на расстоянии L друг от

друга (рис. 1). В конденсаторе градиентное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_{ex}$ создает силу $\mathbf{F}$, действующую на диск. Ось z подвижной системы координат $Oxyz$ (жестко связанной с диском) перпендикулярна плоскости диска. Неподвижная система координат $O'\xi\eta\xi$ жестко связана с кольцевыми электродами конденсатора; цилиндрическая система координат $O'\rho\theta\xi$ жестко связана с кольцом радиусом R_1. Начала систем координат $Oxyz$ и $O'\xi\eta\xi$ могут быть совмещены. Также рассчитаем скорость и время пролета диска между электродами конденсатора в зависимости от постоянной во времени разности потенциалов на них. Диаметр диска должен быть меньше диаметров как входного, так и выходного отверстий аксиально-симметричного конденсатора. Считаем, что электрическое поле, создаваемое конденсатором, квазистатическое.

Отметим, что если внешнее электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_{ex}$ направлено под углом к нормали плоскости диска, то вектор $\mathbf{E}_{ex}$ можно разложить на две компоненты: перпендикулярную и параллельную диску. Далее учтем, что вектор напряженности внешнего градиентного электрического поля, создаваемого между электродами конденсатора (рис. 1), является осесимметричным ($E_\theta = 0$). Тогда в проекциях на оси ρ и ξ цилиндрической системы координат $O'\rho\theta\xi$, связанной с конденсатором, вектор $\mathbf{E}_{ex}$ имеет две компоненты и задается формулой: $\mathbf{E}_{ex} = E_\rho(\rho,\xi)\mathbf{e}_\rho + E_\xi(\rho,\xi)\mathbf{e}_\xi$, где $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\xi$ — единичные векторы вдоль осей ρ и ξ цилиндрической неподвижной системы координат $O'\rho\theta\xi$. Вектор $\mathbf{e}_\rho$ ортогонален плоскости кольцевого электрода радиусом R_1, а центр системы координат $O'\rho\theta\xi$ совпадает с центром кольца. Полагается, что диск ориентирован так, что его собственный дипольный момент $\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_\xi$ направлен противоположно направлению оси ξ, т. е. от электрода с радиусом R_2 к электроду с радиусом R_1.

Компоненты $E_\rho(\rho,\xi)$ и $E_\xi(\rho,\xi)$ вектора напряженности $\mathbf{E}_{ex}$ внешнего электрического поля вакуумного конденсатора из двух колец, показанного на рис. 1, имеют вид (см. формулы (П10) из Приложения):

$$E_\rho = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0\rho} \times\left\{\frac{Q_1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}}\left[\mathrm{K}(k_1) - \frac{R_1^2-\rho^2+\xi^2}{(\rho-R_1)^2+\xi^2}\mathrm{E}(k_1)\right] + \frac{Q_2}{\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}}\left[\mathrm{K}(k_2) - \frac{R_2^2-\rho^2+(\xi-L)^2}{(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2}\mathrm{E}(k_2)\right]\right\},$$

$$E_\xi = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left[\frac{\xi Q_1\,\mathrm{E}(k_1)}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}[(\rho-R_1)^2+\xi^2]} + \frac{(\xi-L)Q_2\,\mathrm{E}(k_2)}{\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}[(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2]}\right], \quad (2)$$

где $\varepsilon_0 = 8.85\,\mathrm{pF/m}$ — электрическая постоянная; Q_1, Q_2 — заряды колец радиусами R_1 и R_2 соответственно; $\mathrm{K}(\kappa) = \int_0^{\pi/2}(1-\kappa^2\sin^2\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{d}\alpha$ — полный эллиптический интеграл первого рода [22]; $\mathrm{E}(\kappa) = \int_0^{\pi/2}(1-\kappa^2\sin^2\alpha)^{1/2}\,\mathrm{d}\alpha$ — полный эллиптической интеграл второго рода [22]; $k_1^2 = 4\rho R_1/[(\rho+R_1)^2+\xi^2]$, $k_2^2 = 4\rho R_2/[(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2]$ — квадраты модулей эллиптических интегралов; L — расстояние между кольцами.

Сила, действующая на диск с электрическим дипольным моментом $\mathbf{p}$ во внешнем градиентном электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}_{ex}$, есть [21,23]:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}_{ex}, \quad (3)$$

где $\nabla = (\partial/\partial\rho)\mathbf{e}_\rho + (1/\rho)(\partial/\partial\theta)\mathbf{e}_\theta + (\partial/\partial\xi)\mathbf{e}_\xi$ — оператор набла в цилиндрической системе координат [24], $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\xi$ — единичные векторы по осям ρ, θ, ξ соответственно (рис. 1).

Отметим, что вращательное движение диска и возможный момент сил $[\mathbf{p}\times\mathbf{E}_{ex}]$ в представленной модели не рассматриваются. Предполагается, что ориентация диска относительно оси кольцевого конденсатора длиной L фиксирована в процессе пролета, так что дипольный момент диска направлен противоположно внешнему электрическому полю: $\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_z = -p\mathbf{e}_\xi$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z. При такой ориентации $\mathbf{p}$ и при убывании E_ξ вдоль оси ξ сила направлена вдоль движения диска. Ориентацию диска при его движении в конденсаторе можно стабилизировать путем „нанизывания“ его на защемленный на одном конце (при $\xi < 0$; рис. 1) тонкий жесткий изолирующий стержень, который проходит через небольшое отверстие в центре масс диска и центры колец радиусами R_1 и R_2. Диск вылетает из конденсатора при $\xi = L$.

Для упрощения аналитических вычислений силы $\mathbf{F}$ по формуле (3) рассмотрим случай $\rho \to 0$, т. е. осевого поля $\mathbf{E}_{ex} \parallel \mathbf{e}_\xi$. Тогда при учете аксиальной симметрии системы двух колец (электродов) и нечетности относительно ρ функции E_ρ по (2) имеем:

$$\mathbf{F} = F_\xi\mathbf{e}_\xi = -p\frac{\partial E_\xi}{\partial\xi}\mathbf{e}_\xi = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q_1\frac{R_1^2-2\xi^2}{(R_1^2+\xi^2)^{5/2}} + Q_2\frac{R_2^2-2(\xi-L)^2}{[R_2^2+(\xi-L)^2]^{5/2}}\right]\mathbf{e}_\xi, \quad (4)$$

где F_ξ — компонента вдоль оси ξ вектора силы $\mathbf{F}$, действующей на электрический дипольный момент $\mathbf{p}$ диска.

Считаем, что заряды колец равны и противоположны по знаку, т. е. $Q_1 = -Q_2 = Q$, и на кольцо радиусом R_1 подан потенциал $U_1 = +U/2$, а на кольцо радиусом R_2 — потенциал $U_2 = -U/2$, где $U = \mathrm{const}$. Тогда, согласно (2), вектор напряженности электрического поля при $\rho \to 0$ содержит только компоненту вдоль оси ξ и при $\xi = 0$ дается выражением

$E_\xi(\xi{=}0) = (Q/4\pi\varepsilon_0)[L/(R_2^2+L^2)^{3/2}]$, а при $\xi = L$ — выражением $E_\xi(\xi{=}L) = (Q/4\pi\varepsilon_0)[L/(R_1^2+L^2)^{3/2}]$. Тогда при прочих равных условиях, если $R_1 > R_2$, то $E_\xi(\xi{=}0) > E_\xi(\xi{=}L)$, т.е. большая напряженность электрического поля создается кольцом меньшего радиуса. Для выбранных геометрических и электрических параметров конденсатора и диска (см. таблицу) компонента $E_\xi > 0$, но $\partial E_\xi(\xi)/\partial\xi < 0$ и $\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_\xi$. Ускоряющая диск сила $-p[\partial E_\xi(\xi)/\partial\xi]\mathbf{e}_\xi > 0$ для всех $0 \le \xi \le L$ направлена от электрода с радиусом R_1 к электроду с радиусом $R_2 < R_1$.

Здесь отметим, что в отличие от установленных ранее условий для левитации диэлектрической сферы в электростатическом и гравитационном полях [25], в настоящей работе анализируется дрейф диска с собственным электрическим дипольным моментом $\mathbf{p}$ в неоднородном стационарном электрическом поле.

Считаем, что электрет в форме диска движется вдоль оси ξ при $\rho \to 0$ между электродами градиентного электрического конденсатора длиной L. Закон движения такого диска, время пролета t_L и скорость v_{out} вылета его из конденсатора получим в рамках формализма Лагранжа. Поскольку внешнее электрическое поле квазистационарное, а ориентация электрического дипольного момента диска фиксирована ($\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_\xi$), то в качестве обобщенной координаты выберем координату ξ, проходящую через центр масс диска. Кинетическая энергия поступательного движения диска есть: $E_{\text{kin}} = M\dot{\xi}^2/2$, где $M = \pi R^2 h\rho_{\text{d}}$ — масса диска радиусом R, толщиной h и плотностью электрета ρ_{d}. Потенциальная энергия взаимодействия диска с диполем, ориентированным противоположно напряженности внешнего электрического поля при $\rho \to 0$, есть (рис. 1): $E_{\text{pot}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_{\text{ex}} = pE_\xi(\xi)$, где p дается формулой (1), $E_\xi(\xi)$ — формулой (2) при $\rho \to 0$. Тогда функция Лагранжа $\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$ рассматриваемой системы при $Q_1 = -Q_2 = Q$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} - pE_\xi(\xi) = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} - \frac{pQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\xi}{(R_1^2+\xi^2)^{3/2}} + \frac{\xi - L}{(R_2^2+(\xi-L)^2)^{3/2}}\right], \tag{5}$$

где $\dot{\xi} \equiv \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$, t — время.

Из уравнения Лагранжа (см., например, [26])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = 0$$

с учетом (5) имеем

$$M\ddot{\xi} = -p\frac{\partial E_\xi}{\partial\xi} = F_\xi, \tag{6}$$

где $\ddot{\xi} = \mathrm{d}\dot{\xi}/\mathrm{d}t$, т.е. приходим к уравнению движения диска под действием силы F_ξ по (4), что подтверждает справедливость представления потенциальной энергии в виде $E_{\text{pot}} = pE_\xi(\xi)$.

Так как функция Лагранжа $\mathcal{L}$ по (5) не зависит от времени t явно, то полная механическая энергия диска сохраняется [26] и имеет вид

$$E_{\text{m}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\xi}}\dot{\xi} - \mathcal{L} = \frac{M\dot{\xi}^2}{2} - pE_\xi(\xi) = \frac{Mv_{\text{in}}^2}{2} - pE_\xi(0) = \text{const}, \tag{7}$$

где $v_{\text{in}} \equiv v(\xi{=}0, t{=}0)$ — скорость диска в начальный момент времени $t = 0$ при пролете через кольцо радиусом R_1 в точке $\xi = 0$.

Положим в формуле (7) величину $\xi = L$ и далее учтем по (2), что $E_\xi(0) = (Q/4\pi\varepsilon_0)[L/(R_2^2+L^2)^{3/2}]$, $E_\xi(L) = (Q/4\pi\varepsilon_0)[L/(R_1^2+L^2)^{3/2}]$. Тогда в кольцевом конденсаторе емкостью $C = Q/(U_1 - U_2) = Q/U$ скорость диска $v_{\text{out}} \equiv v(\xi{=}L, t{=}t_L) = \dot{\xi}(\xi{=}L, t{=}t_L)$ в момент времени t_L (на вылете из кольца радиусом R_2) дается выражением:

$$v_{\text{out}} = \sqrt{v_{\text{in}}^2 + 2a_\xi L} = \sqrt{v_{\text{in}}^2 + \frac{2p}{M}[E_\xi(0) - E_\xi(L)]} = \sqrt{v_{\text{in}}^2 + \frac{pCUL}{2\pi\varepsilon_0 M}\left(\frac{1}{(R_2^2+L^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R_1^2+L^2)^{3/2}}\right)}, \tag{8}$$

где $a_\xi = F_\xi/M$ — ускорение, приобретаемое диском при пролете вдоль оси ξ под действием силы F_ξ.

Из формулы (8) следует, что для выбранной ориентации электрического дипольного момента $\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_\xi$ в конфигурации конденсатора, показанного на рис. 1, ускорение диска вдоль оси ξ реализуется при $R_1 > R_2$, т.е. когда диск влетает через кольцо большего радиуса и вылетает через кольцо меньшего радиуса. В противном случае действующая на диск сила будет тормозящей.

Электрическая емкость конденсатора из двух колец радиусами R_1 и R_2 на расстоянии L друг от друга, показанного на рис. 1, имеет вид (см. формулу (П22) из Приложения; ср. [27,28]):

$$C = 4\pi^2\varepsilon_0\left\{\frac{1}{R_1}\ln\left(\frac{16R_1}{d_{\text{w}}}\right) + \frac{1}{R_2}\ln\left(\frac{16R_2}{d_{\text{w}}}\right) - \frac{4\,\mathrm{K}(k_{12})}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+L^2}}\right\}^{-1}, \tag{9}$$

где $k_{12}^2 = 4R_1R_2/[(R_1+R_2)^2+L^2]$; $d_{\text{w}} = 2r_{\text{w}}$ — диаметр сечения цилиндрической проволоки, свернутой в кольца; $d_{\text{w}} \ll R_1, R_2$.

Для нахождения закона движения диска $\xi = \xi(t)$ необходимо решить уравнение Лагранжа (6). В силу независимости функции Лагранжа (5) от времени первый интеграл уравнения (6) определяется законом сохранения механической энергии (7):

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{v_{\text{in}}^2 + \frac{2p}{M}[E_\xi(0) - E_\xi(\xi)]}, \tag{10}$$

где $E_\xi(\xi)$ дается формулой (2) при $\rho \to 0$.

Параметры модельного твердого электрета и геометрические размеры конденсатора

ρ_d, g/cm^3	$P_s = \sigma_s$, mC/m^2	R, mm	h, mm	E_{bd}, 10^6 V/cm	U_{bd}, kV	$L = 3R$, mm	d_w, mm	$R_1 = 15R$, mm	$R_2 = 5R$, mm
1.32	3.7	3	1.5	2.13	319	9	1	45	15

Примечание: ρ_d — плотность материала электрета [29]; P_s — поляризованность модельного электрета (см., например, [30, 31]); E_{bd} — напряженность электрического поля пробоя модельного электрета [29, 32]; R — радиус диска; h — толщина диска; $U_{bd} = hE_{bd}$ — напряжение электрического пробоя; L — длина конденсатора; $d_w = 2r_w$ — диаметр сечения цилиндрической проволоки, которая свернута в электроды конденсатора радиусами R_1 и R_2.

Уравнение (10) не решается в элементарных функциях, и закон движения $\xi = \xi(t)$ находится численно. Интегрируя уравнение (10) с начальными условиями $\xi(t{=}0) = 0$ и $\xi(t{=}t_L) = L$ находим время t_L, за которое диск пролетает расстояние L, между электродами конденсатора:

$$t_L = \int_0^L \frac{d\xi'}{\sqrt{v_{in}^2 + (2p/M)[E_\xi(0) - E_\xi(\xi')]}}. \qquad (11)$$

Ясно, что приращение кинетической энергии диска при его пролете вдоль оси ξ между кольцевыми электродами конденсатора равно работе результирующей силы, действующей на диск: $\Delta E_{kin} = \int_0^L F_\xi\, d\xi = M(v_{out}^2 - v_{in}^2)/2$. Средняя механическая мощность, с которой электрическое поле вакуумного конденсатора совершает работу над диском, есть $P_m = \Delta E_{kin}/t_L$. Эта величина характеризует скорость увеличения кинетической энергии диска и в общем случае не совпадает с полной электрической мощностью источника напряжения (электрической энергией, поддерживающей постоянную разность потенциалов на кольцевых электродах конденсатора).

Отметим пределы применимости развитой модели. В настоящей работе использовано приближение точечного диполя вблизи оси конденсатора. Это соответствует условиям $\rho \to 0$ и $R \ll R_1, R_2, \xi, L - \xi$. Вблизи границ рассматриваемой области ($\xi \to 0$, $\xi \to L$), где ξ или $L - \xi$ становятся сравнимы с R, приближение точечного диполя теряет точность, и результаты вблизи колец следует рассматривать как оценочные. Кроме того, ориентация диска фиксирована: $\mathbf{p} = -p\mathbf{e}_\xi$. При отклонении оси z от оси ξ на угол ψ появляется момент сил $[\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{ex}]$ и поперечная составляющая силы $(\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}_{ex}$. В вакууме в отсутствие диссипации диск приобретает дополнительное вращательное движение, а проекция силы на ось ξ при малых углах ψ практически сохраняется. Учет зависимости угла ψ от времени t требует совместного решения уравнений движения для $\xi(t)$ и $\psi(t)$; см., например, [5,17].

Заметим, что из формул (1) и (8) следует, что для шара из электрета с такими же значениями объема V, массы M и поляризованности P_s, что и у диска, дрейф происходит с тем же ускорением, поскольку $F_\xi \propto p \propto V$ и $M \propto V$.

2. Результаты расчетов и их обсуждение

В качестве примера рассчитаем скорость вылета из конденсатора модельного диска из твердого электрета. При расчетах используем параметры электрета [29–32], а также геометрические размеры конденсатора, указанные в таблице, емкость конденсатора по формуле (9) есть $C \approx 941.5$ fF.

Отдельно отметим, что приближение „тонкого конденсатора“ ($L \ll R_1$, R_2 и $R_1 \approx R_2$) не применяется. При $L = 9$ mm ($L/R_1 = 0.2$, $L/R_2 = 0.6$) условие $L \ll R_1, R_2$ не выполняется, а радиусы колец существенно различаются ($R_1/R_2 = 3$), поэтому осевое поле $E_\xi(\xi)$ существенно неоднородно вдоль координаты ξ, что обеспечивает дрейф диска с ускорением.

На рис. 2 показаны зависимости скорости диска на вылете из конденсатора v_{out} (кривая *1*), рассчитанной по формуле (8), и времени пролета между электродами t_L (кривая *2*), рассчитанного по формуле (11), от напряжения на конденсаторе U для модельного поляризованного электрета в форме диска массой $M \approx 56$ mg в пределе нулевой скорости на входе в конденсатор $v_{in} \to 0$. Значение величины электрического дипольного момента $p = \sigma_s V$ по формуле (1) при $\sigma_s = 3.7$ mC/m^2 для такого электрета в форме диска объемом $V = \pi R^2 h = 42.41$ mm^3 есть $p = 1.57 \cdot 10^{-10}$ C·m.

Из рис. 2 видно, что скорость v_{out} диска из поляризованного электрета на вылете из конденсатора увеличивается монотонно с увеличением напряжения U на его электродах.

На рис. 3 показана зависимость от координаты ξ силы F_ξ, действующей на диск из электрета в конденсаторе длиной $L = 9$ mm с кольцевыми электродами радиусами $R_1 = 45$ mm и $R_2 = 15$ mm, рассчитанная по формуле (4) в приближении осевого поля при напряжении на электродах $U = 290$ kV.

Из рис. 3 видно, что при влете диска из области $\xi \le -1.1$ mm требуется ненулевая начальная скорость, так как значения силы F_ξ отрицательны и диск не попадает в межэлектродное пространство конденсатора. В рассматриваемой задаче предполагается, что диск начинает движение из точки $\xi = 0$ (из центра электрода с радиусом $R_1 > R_2$) и не отбрасывается обратно в об-

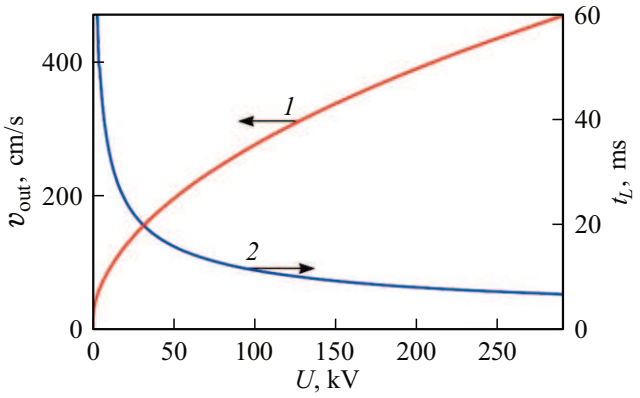


Рис. 2. Зависимости от напряжения U скорости v_{out} на выходе из кольцевого конденсатора (красная кривая *1*) и времени пролета t_L через него (синяя кривая *2*), рассчитанные по формулам (8) и (11) соответственно, для модельного электрета в форме диска радиусом $R = 3$ mm, толщиной $h = 1.5$ mm, массой $M \approx 56$ mg при скорости на входе $v_{in} \to 0$ и длине конденсатора $L = 3R$.

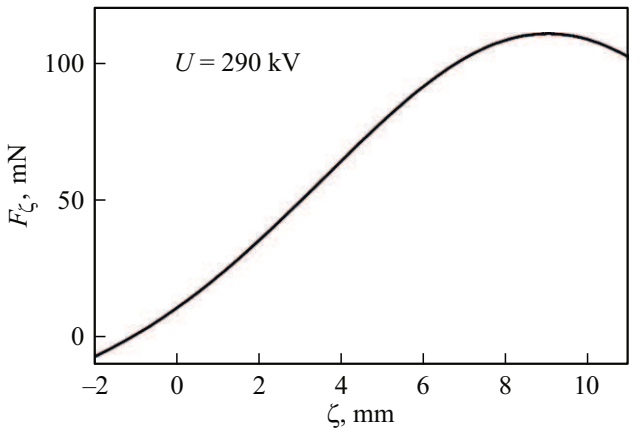


Рис. 3. Зависимость от координаты ξ силы F_ξ, действующей на диск с дипольным моментом $p = 1.57 \cdot 10^{-10}$ C·m в конденсаторе длиной $L = 9$ mm и радиусами электродов $R_1 = 45$ mm и $R_2 = 15$ mm, рассчитанная по формуле (4) при напряжении между электродами $U = 290$ kV.

ласть $\xi < 0$, поскольку при $0 \le \xi \le L = 9$ mm значения силы F_ξ строго положительны.

Отметим, что время t_L пролета между электродами конденсатора, найденное при численном интегрировании точного уравнения движения (11), превышает время пролета в приближении равноускоренного движения. Это обусловлено тем, что действующая на диск сила F_ξ по формуле (4) не постоянна вдоль траектории (рис. 3): осевая напряженность E_ξ монотонно убывает на отрезке $0 \le \xi \le L$, так что сила $F_\xi > 0$ монотонно возрастает по мере движения диска (при $U = 290$ kV от ≈ 10 mN у входного кольца до ≈ 111 mN у выходного). Скорость диска на вылете v_{out} определяется только перепадом потенциальной энергии $p[E_\xi(0) - E_\xi(L)]$ (см. формулу (8)) и не зависит от вида закона движения.

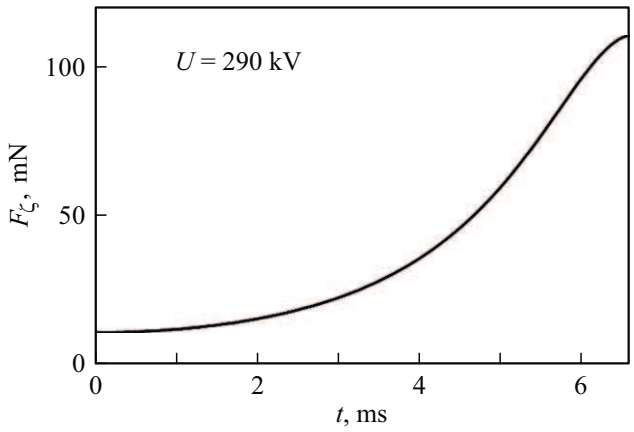


Рис. 4. Зависимость силы F_ξ, действующей вдоль оси ξ на диск в конденсаторе, от времени t по (4) за время пролета $t_L \approx 6.2$ ms по (11), для численно определяемого из (10) закона движения при напряжении $U = 290$ kV.

На рис. 4 показана зависимость от времени $t \le L$ силы F_ξ, действующей на диск из электрета в конденсаторе длиной $L = 9$ mm с кольцевыми электродами радиусами $R_1 = 45$ mm и $R_2 = 15$ mm. (Время пролета диска $t_L \approx 6.2$ ms, рассчитано по формуле (11) для закона движения $\xi(t)$, численно определяемого из (10), при напряжении на электродах $U = 290$ kV.

Из рис. 3 и 4 видно, что при напряжении на электродах $U = 290$ kV сила F_ξ достигает своего максимального значения ≈ 111 mN вблизи выходного кольца радиусом R_2 за время пролета $t_L \approx 6.2$ ms.

Отметим, что в рассматриваемой модели можно пренебречь влиянием силы тяжести на пролетающий между кольцевыми электродами конденсатора диск, поскольку она много меньше электрической силы от градиентного электрического поля конденсатора. Так, например, при $U = 150$ kV значение силы по формуле (4) принимает значения от $F_\xi(\xi{=}0) \approx 5.5$ mN до $F_\xi(\xi{=}L) \approx 57.2$ mN, а значение действующей на диск силы тяжести $Mg \approx 0.55$ mN, где $g \approx 9.81$ m/s^2 — ускорение свободного падения.

Отметим, что оценка величины средней электромеханической мощности P_m, с которой электрическое поле вакуумного кольцевого конденсатора совершает работу над диском, для параметров, указанных в таблице, дает $P_m \sim 100$ mW, что компенсируется источником внешнего стационарного электрического напряжения.

Заключение

Впервые предложено физико-математическое описание поступательного движения диска (толщиной $h = 1.5$ mm и радиусом $R = 3$ mm) из модельного поляризованного электрета во внешнем стационарном градиентном электрическом поле вакуумного кольцевого конденсатора. Для аналитической оценки закон движения диска, время и скорость его пролета в конденсаторе

получены в рамках формализма Лагранжа. Рассмотрено движение диска через кольцевой конденсатор с радиусами колец $R_1 = 15R$ и $R_2 = 5R$. Длина конденсатора равна $L = 3R$, а диаметр поперечного сечения цилиндрической проволоки, из которой свернуты кольцевые электроды конденсатора 1 mm. На кольцо радиусом $R_1 > R_2$ подается положительный электрический потенциал, а на кольцо радиусом R_2 — отрицательный потенциал; разность электрических потенциалов $0 < U \leq 290$ kV. Рассматривались значения напряженности градиентного электрического поля U/h до напряженностей электрического поля пробоя модельного электрета $E_{\text{bd}} \approx 2.13$ MV/cm. Показано, что для диска из электрета с поверхностной плотностью заряда ≈ 3.7 mC/m^2 при скорости на входе в конденсатор $v_{\text{in}} \to 0$ скорость диска на выходе из конденсатора $v_{\text{out}} \approx 4.7$ m/s.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь „Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] А.И. Грачев. ЖТФ, **89** (1), 5 (2019). DOI: 10.21883/jtf.2019.01.46953.16-18
[2] А.И. Грачев. ФТТ, **60** (4), 666 (2018). DOI: 10.21883/ftt.2018.04.45672.284
[3] А.И. Грачев. Письма в ЖТФ, **44** (16), 27 (2018). DOI: 10.21883/pjtf.2018.16.46473.17303
[4] G. Quincke. Ann. Phys. Chem., **59** (11), 417 (1896). DOI: 10.1002/andp.18962951102
[5] T.B. Jones. *Electromechanics of Particles* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005), DOI: 10.1017/CBO9780511574498
[6] А.И. Грачев. Письма в ЖТФ, **47** (13), 21 (2021). DOI: 10.21883/pjtf.2021.13.51116.18557
[7] Z. Zhang, H. Yuan, Y. Dou, M.O. de la Cruz, K.J.M. Bishop. Phys. Rev. Lett., **126** (25), 258001 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.258001
[8] D. Porotnikov, D. Harankahage, C. Ellison, M. Yang, J. Cassidy, M. Zamkov. Nano Lett., **21** (11), 4787 (2021). DOI: 10.1021/acs.nanolett.1c01327
[9] А.И. Грачев. ЖТФ, **90** (8), 1239 (2020). DOI: 10.21883/jtf.2020.08.49532.87-19
[10] М.А. Кожушнер, Б.В. Лидский, В.С. Посвянский, Л.И. Трахтенберг. Письма в ЖЭТФ, **108** (9), 670 (2018). DOI: 10.1134/s0370274x18210130
[11] В.А. Саранин. УФН, **182** (7), 749 (2012). DOI: 10.3367/UFNr.0182.201207e.0749
[12] Н.В. Карлов, Н.А. Кириченко. *Колебания, волны, структуры* (Физматлит, М., 2008)
[13] Н.А. Поклонский, А.И. Сягло, В.Т. Шнитко, В.А. Меркулов, М.О. Давиденя, А.И. Ковалев. Приборы и методы измерений, **1** (6), 64 (2013).
[14] J. Yao, K. Zhao, J. Lou, K. Zhang. Biosensors, **14** (9), 417 (2024). DOI: 10.3390/bios14090417
[15] J. Oh, H.F. Gleeson, I. Dierking. Phys. Rev. E, **95** (2), 022703 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.95.022703
[16] Z. Tian, X. Wang, J. Chen. Microsyst. Nanoeng., **10** (1), 117 (2024). DOI: 10.1038/s41378-024-00750-0
[17] P. García-Sánchez, J.E. Flores-Mena, A. Ramos. Micromachines, **10** (2), 100 (2019). DOI: 10.3390/mi10020100
[18] S. Gangwal, O.J. Cayre, M.Z. Bazant, O.D. Velev. Phys. Rev. Lett., **100** (5), 058302 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.058302
[19] T. Miloh. Phys. Fluids, **20** (6), 063303 (2008). DOI: 10.1063/1.2931080
[20] Ю.В. Гуляев, А.С. Бугаев, В.М. Розенбаум, Л.И. Трахтенберг. УФН, **190** (4), 337 (2020). DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038570
[21] E.M. Purcell, D.J. Morin. *Electricity and Magnetism* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013), DOI: 10.1017/CBO9781139012973
[22] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 2. Специальные функции* (Физматлит, М., 2003)
[23] I.N. Toptygin. *Foundations of Classical and Quantum Electrodynamics* (Wiley, Weinheim, 2014), DOI: 10.1002/9783527680429
[24] G.A. Korn, T.M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review* (Dover, NY., 2000)
[25] Ю.К. Братухин, В.А. Семенов. ЖЭТФ, **83** (6), 2170 (1982).
[26] H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko. *Classical Mechanics* (Pearson, Harlow, 2014)
[27] В.А. Шелюто. ЖТФ, **61** (2), 1 (1991).
[28] Ю.Я. Иоссель, Э.С. Кочанов, М.Г. Струнский. *Расчет электрической емкости* (Энергоиздат, Л., 1981)
[29] *Физико-механические свойства параленовых покрытий. Свойства парилена* (НПО „Парилен“), URL: https://parylene.ru/parylene-properties/
[30] S. Sabzpoushan, P. Woias. Nano Energy, **131**, 110167 (2024). DOI: 10.1016/j.nanoen.2024.110167
[31] H.-w. Lo, Y.-C. Tai. J. Micromech. Microeng., **18** (10), 104006 (2008). DOI: 10.1088/0960-1317/18/10/104006
[32] S. Diaham, M. Bechara, M.-L. Locatelli, R. Khazaka, C. Tenailleau, R. Kumar. J. Appl. Phys., **115** (5), 054102 (2014). DOI: 10.1063/1.4863877
[33] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Физматгиз, М., 1963)

Приложение

Напряженность электрического поля в конденсаторе с кольцевыми электродами разного радиуса

Найдем вектор напряженности $\mathbf{E}_{\text{ex}}$ градиентного электрического поля, показанного на рис. П1. Рассмотрим случай тонких колец, т.е. когда диаметр d_{w} сечения цилиндрической проволоки, свернутой в кольца, меньше их радиусов R_1 и R_2: $d_{\text{w}} < R_1, R_2$. На кольце радиусом R_1 выделим бесконечно малый участок с зарядом $\mathrm{d}q_1 = (Q_1/2\pi)\,\mathrm{d}\theta_1$, где $Q_1 > 0$ — заряд кольца; θ_1 — угол между осью ξ и вектором $\mathbf{r}_1$, задающим расстояние

от точки начала координат O до элемента кольца с зарядом $\mathrm{d}q_1$.

Далее считаем, что заряд равномерно распределен по кольцу радиусом R_1, и тогда каждый элемент с зарядом $\mathrm{d}q_1$ создает в произвольной точке P потенциал

$$\mathrm{d}\varphi_1 = \frac{\mathrm{d}q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1P}}, \qquad (\Pi 1)$$

где r_{1P} — расстояние от элемента кольца радиусом R_1 с зарядом $\mathrm{d}q_1$ до точки наблюдения P.

Согласно рис. П1, расстояние r_{1P} есть:

$$r_{1P} = |\mathbf{r}_{1P}| = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1| = \sqrt{(\rho\cos\theta_P - R_1\cos\theta_1)^2 + (\rho\sin\theta_P - R_1\sin\theta_1)^2 + \xi^2}, \qquad (\Pi 2)$$

где $\mathbf{r}_P$ — вектор, направленный из точки начала координат O до точки наблюдения P, ρ — расстояние от оси ξ до точки наблюдения в цилиндрической системе координат, θ_P — угол между осью ξ и отрезком OP' в плоскости $O\xi\eta$ (точка P' — проекция точки наблюдения P на плоскость $O\xi\eta$).

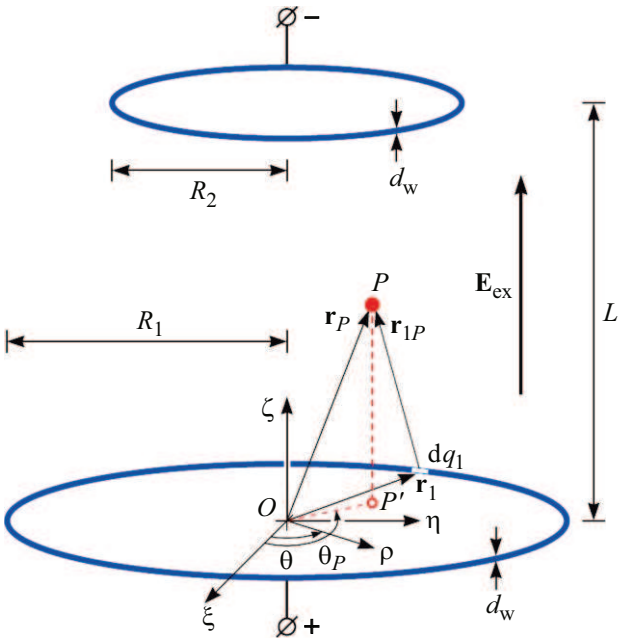


Рис. П1. Аксиально-симметричный конденсатор длиной L, состоящий из двух металлических колец радиусами R_1 и $R_2 < R_1$, создающий внешнее градиентное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_{ex}$; $d_w = 2r_w$ — диаметр сечения цилиндрической проволоки, свернутой в кольцо. Неподвижная декартова система координат $O\xi\eta\xi$ жестко связана с нижним электродом конденсатора, $\mathbf{r}_1$ — вектор, направленный из начала координат O до малого элемента с зарядом $\mathrm{d}q_1$ на кольце радиусом R_1, $\mathbf{r}_P$ — вектор, направленный из начала координат O до точки наблюдения P, $\mathbf{r}_{1P} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1$ — вектор, направленный от малого элемента с зарядом $\mathrm{d}q_1$ на кольце радиусом R_1 до точки наблюдения P.

Из (П2) имеем:

$$r_{1P} = \sqrt{\rho^2 + R_1^2 + \xi^2 - 2\rho R_1(\cos\theta_P\cos\theta_1 + \sin\theta_P\sin\theta_1)} = \sqrt{\rho^2 + R_1^2 + \xi^2 - 2\rho R_1\cos(\theta_P - \theta_1)}. \qquad (\Pi 3)$$

Тогда из (П1) при учете (П3) электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке, кольцом радиусом R_1 есть

$$\varphi_1(\rho,\xi) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta_1}{\sqrt{\rho^2 + R_1^2 + \xi^2 - 2\rho R_1\cos(\theta_P - \theta_1)}}. \qquad (\Pi 4)$$

Учтем, что в силу осевой симметрии потенциал не зависит от угла θ_P и можно считать, что $\theta_P = 0$. Далее введем обозначения: $a_1^2 = \rho^2 + R_1^2 + \xi^2$; $b_1 = 2\rho R_1$, $\theta_1 = \pi - 2\alpha_1$ и тогда из (П4) получим

$$\begin{aligned}\varphi_1(\rho,\xi) &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{-2\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1\cos(\pi - 2\alpha_1)}} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1(1 - 2\sin^2\alpha_1)}} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\alpha_1}} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1}}\frac{2}{\pi}\mathrm{K}(k_1) \\ &= \frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(\rho + R_1)^2 + \xi^2}}\mathrm{K}(k_1), \end{aligned} \qquad (\Pi 5)$$

где $k_1^2 = 2b_1/(a_1^2 + b_1) = 4\rho R_1/[(\rho + R_1)^2 + \xi^2]$ — квадрат модуля эллиптического интеграла; $\mathrm{K}(k_1)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [23]; учтена четность косинуса при замене пределов интегрирования $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \to 2\int_0^{\pi/2}$.

Далее найдем вектор напряженности электрического поля, создаваемого кольцом радиусом R_1:

$$\mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1 = -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\mathbf{e}_\xi\right) = E_{1\rho}\mathbf{e}_\rho + E_{1\theta}\mathbf{e}_\theta + E_{1\xi}\mathbf{e}_\xi, \qquad (\Pi 6)$$

где $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\xi$ — единичные векторы вдоль осей ρ, θ, ξ цилиндрической системы координат (рис. 1 и П1).

Вычислим радиальную компоненту (вдоль оси ρ) вектора напряженности электрического поля, создаваемого

кольцом радиусом R_1:

$$E_{1\rho} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho} = -\frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left[-\frac{\rho+R_1}{[(\rho+R_1)^2+\xi^2]^{3/2}}\mathrm{K}(k_1) + \frac{1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}}\frac{\partial\mathrm{K}(k_1)}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial\rho}\right]$$
$$= -\frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left\{-\frac{\rho+R_1}{[(\rho+R_1)^2+\xi^2]^{3/2}}\mathrm{K}(k_1)+\frac{1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\left[\frac{\mathrm{E}(k_1)}{k_1(1-k_1^2)}-\frac{\mathrm{K}(k_1)}{k_1}\right]\left[\frac{k_1}{2\rho}-\frac{k_1(\rho+R_1)}{(\rho+R_1)^2+\xi^2}\right]\right\}$$
$$= -\frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left\{\frac{\mathrm{E}(k_1)}{(1-k_1^2)\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\left[\frac{1}{2\rho}-\frac{(\rho+R_1)}{(\rho+R_1)^2+\xi^2}\right]-\frac{\mathrm{K}(k_1)}{2\rho\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}}\right\}$$
$$= \frac{Q_1}{4\pi^2\varepsilon_0\rho\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\left\{\mathrm{K}(k_1)-\frac{\mathrm{E}(k_1)}{1-k_1^2}\left[\frac{\rho^2+R_1^2+2\rho R_1+\xi^2-2\rho^2-2\rho R_1}{(\rho+R_1)^2+\xi^2}\right]\right\}$$
$$= \frac{Q_1}{4\pi^2\varepsilon_0\rho\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}}\left[\mathrm{K}(k_1)-\frac{R_1^2-\rho^2+\xi^2}{(\rho-R_1)^2+\xi^2}\mathrm{E}(k_1)\right], \quad (\text{П7})$$

где $\partial\mathrm{K}(k_1)/\partial k_1 = \mathrm{E}(k_1)/[k_1(1-k_1^2)] - \mathrm{K}(k_1)/k_1$; $\mathrm{E}(k_1)$ — полный эллиптический интеграл второго рода [23]; $\partial k_1/\partial\rho = (k_1/2\rho) - k_1(\rho+R_1)/[(\rho+R_1)^2+\xi^2]$; $1-k_1^2 = [(\rho-R_1)^2+\xi^2]/[(\rho+R_1)^2+\xi^2]$.

Далее вычислим аксиальную компоненту (вдоль оси ξ) вектора напряженности электрического поля, создаваемого кольцом радиусом R_1:

$$E_{1\xi} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi} = -\frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left[-\frac{\xi}{[(\rho+R_1)^2+\xi^2]^{3/2}}\mathrm{K}(k_1) + \frac{1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}}\frac{\partial\mathrm{K}(k_1)}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial\xi}\right]$$
$$= -\frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left\{-\frac{\xi}{[(\rho+R_1)^2+\xi^2]^{3/2}}\mathrm{K}(k_1)+\frac{1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\left[\frac{\mathrm{E}(k_1)}{k_1(1-k_1^2)}-\frac{\mathrm{K}(k_1)}{k_1}\right]\left[-\frac{\xi k_1}{(\rho+R_1)^2+\xi^2}\right]\right\}$$
$$= \frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{\xi}{[(\rho+R_1)^2+\xi^2]^{3/2}(1-k_1^2)}\mathrm{E}(k_1)$$
$$= \frac{Q_1}{2\pi^2\varepsilon_0}\frac{\xi}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}[(\rho-R_1)^2+\xi^2]}\mathrm{E}(k_1), \quad (\text{П8})$$

где учтено, что $\partial k_1/\partial\xi = -\xi k_1/[(\rho+R_1)^2+\xi^2]$.

Вектор напряженности электрического поля, создаваемого кольцом радиусом R_2, находящимся на расстоянии L вдоль оси ξ от кольца радиусом $R_1 > R_2$, задается выражением

$$\mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2 = E_{2\rho}\mathbf{e}_\rho + E_{2\theta}\mathbf{e}_\theta + E_{2\xi}\mathbf{e}_\xi,$$

где $\varphi_2 = (Q_2/2\pi^2\varepsilon_0)[\mathrm{K}(k_2)/\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}]$; $Q_2 < 0$ — электрический заряд кольца радиусом R_2; $k_2^2 = 4\rho R_2/[(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2]$.

Радиальная $E_{2\rho}$ и аксиальная $E_{2\xi}$ компоненты вектора напряженности $\mathbf{E}_2$ электрического поля, создаваемого кольцом радиусом R_2 выводятся аналогично формулам (П7) и (П8) и их можно получить путем замен в формулах (П7) и (П8) величины ξ на $\xi - L$ и индексов „1“ на индексы „2“, где L — расстояние вдоль оси ξ от кольца радиусом R_1 до кольца радиусом R_2. Тогда имеем

$$E_{2\rho} = \frac{Q_2}{4\pi^2\varepsilon_0\rho\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}} \times\left[\mathrm{K}(k_2)-\frac{R_2^2-\rho^2+(\xi-L)^2}{(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2}\mathrm{E}(k_2)\right],$$
$$E_{2\xi} = \frac{Q_2}{2\pi^2\varepsilon_0\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}} \times\frac{(\xi-L)}{(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2}\mathrm{E}(k_2). \quad (\text{П9})$$

Учтем принцип суперпозиции для вектора напряженности стационарного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E_\rho\mathbf{e}_\rho + E_\theta\mathbf{e}_\theta + E_\xi\mathbf{e}_\xi$ системы из двух заряженных колец. Тогда из (П7)–(П9) следует, что радиальная E_ρ и аксиальная E_ξ компоненты вектора $\mathbf{E}$ при учете $E_\theta = E_{1\theta} + E_{2\theta} = 0$ имеют в вид

$$E_\rho = E_{1\rho} + E_{2\rho} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0\rho}\left\{\frac{Q_1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\left[\mathrm{K}(k_1)-\frac{R_1^2-\rho^2+\xi^2}{(\rho-R_1)^2+\xi^2}\mathrm{E}(k_1)\right]+\frac{Q_2}{\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}} \times\left[\mathrm{K}(k_2)-\frac{R_2^2-\rho^2+(\xi-L)^2}{(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2}\mathrm{E}(k_2)\right]\right\},$$
$$E_\xi = E_{1\xi} + E_{2\xi} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_0}\left[\frac{\xi Q_1}{\sqrt{(\rho+R_1)^2+\xi^2}} \times\frac{\mathrm{E}(k_1)}{(\rho-R_1)^2+\xi^2}+\frac{(\xi-L)Q_2}{\sqrt{(\rho+R_2)^2+(\xi-L)^2}} \times\frac{\mathrm{E}(k_2)}{(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2}\right]. \quad (\text{П10})$$

Электрическая емкость конденсатора с кольцевыми электродами разного радиуса

Рассчитаем электрическую емкость конденсатора, показанного на рис. П1.

Электрическая емкость конденсатора из двух колец может быть представлена в виде [26,27]:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}} - \frac{2}{C_{12}}, \qquad (\Pi 11)$$

где C_{11} и C_{22} — собственные емкости колец радиусами R_1 и R_2 соответственно; C_{12} — взаимная емкость колец радиусами R_1 и R_2.

Для вычисления собственных и взаимной емкостей, входящих в (П11), предположим, что кольца радиусами R_1 и R_2 изготовлены из цилиндрической проволоки, радиус поперечного сечения которой есть r_{w}, т.е. рассматриваем случай тора. Тогда рассмотрим тор с образующим центр радиусом R_1 и выделим бесконечно малый участок с зарядом $\mathrm{d}q_1 = \sigma_1\,\mathrm{d}S = (Q_1/4\pi^2 R_1)(R_1 + r_{\mathrm{w}}\cos\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta_1$, где $\sigma_1 = Q_1/4\pi^2 R_1 r_{\mathrm{w}}$ — поверхностная плотность заряда; Q_1 — полный заряд кольца; $\mathrm{d}S = r_{\mathrm{w}}(R_1 + r_{\mathrm{w}}\cos\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta_1 \equiv r_{\mathrm{w}}\Xi(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta_1$ — площадь бесконечно малого участка; $\Xi(\beta) = R_1 + r_{\mathrm{w}}\cos\beta$; β — угол обхода вокруг сечения проволоки; θ_1 — угол между осью ξ и вектором $\mathbf{r}_1$, задающим расстояние от точки начала координат O до малого элемента тора с зарядом $\mathrm{d}q_1$.

Далее считаем, что заряд равномерно распределен по кольцу радиусом R_1. Тогда каждый элемент с зарядом $\mathrm{d}q_1$ в произвольной точке создает потенциал:

$$\mathrm{d}\varphi_1 = \frac{\mathrm{d}q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1P}}, \qquad (\Pi 12)$$

где r_{1P} — расстояние от элемента кольца радиусом R_1 с зарядом $\mathrm{d}q_1$ до точки наблюдения P.

Расстояние от элемента кольца радиусом R_1 с зарядом $\mathrm{d}q_1$ до точки наблюдения есть [ср. (П2)]:

$$r_{1P} = |\mathbf{r}_{1P}| = |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_1| = [(\rho\cos\theta_P - \Xi(\beta)\cos\theta_1)^2 + (\rho\sin\theta_P - \Xi(\beta)\sin\theta_1)^2 + \Theta^2(\xi,\beta)]^{1/2}, \qquad (\Pi 13)$$

где ρ — расстояние от оси ξ до точки наблюдения в цилиндрической системе координат, θ_P — угол между осью ξ и отрезком OP' в плоскости $O\xi\eta$ (точка P' — проекция точки наблюдения P на плоскость $O\xi\eta$); $\Theta(\xi,\beta) = \xi - r_{\mathrm{w}}\sin\beta$.

Из (П13) имеем [ср. (П3)]:

$$r_{1P} = [\rho^2 + \Xi^2(\beta) + \Theta^2(\xi,\beta) - 2\rho\Xi(\beta)(\cos\theta_P\cos\theta_1 + \sin\theta_P\sin\theta_1)]^{1/2} = \sqrt{\rho^2 + \Xi^2(\beta) + \Theta^2(\xi,\beta) - 2\rho\Xi(\beta)\cos(\theta_P - \theta_1)}. \qquad (\Pi 14)$$

Тогда из (П12) электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке, тором радиусом R_1 и радиусом образующей r_{w} есть

$$\varphi_1(\rho,\xi) = \frac{Q_1}{16\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Xi(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\theta_1}{r_{1P}(\beta,\theta_1)}, \qquad (\Pi 15)$$

где $r_{1P}(\beta,\theta_1)$ дается выражением (П14).

Учтем, что в силу осевой симметрии потенциал не зависит от угла θ_P, можно считать $\theta_P = 0$. Далее введем обозначения: $a_{1\beta}^2 = \rho^2 + \Xi^2(\beta) + \Theta^2(\xi,\beta)$; $b_{1\beta} = 2\rho\Xi(\beta)$, $\theta_1 = \pi - 2\alpha_1$, и тогда из (П15) получим:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\rho,\xi) &= \frac{Q_1}{16\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{-2\Xi(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{a_{1\beta}^2 - b_{1\beta}\cos(\pi - 2\alpha_1)}} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{\Xi(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{a_{1\beta}^2 + b_{1\beta}(1 - 2\sin^2\alpha_1)}} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{\Xi(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{a_{1\beta}^2 + b_{1\beta}}\sqrt{1 - k_{1\beta}^2\sin^2\alpha_1}} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_0^{2\pi}\frac{\Xi(\beta)\,\mathrm{K}(k_{1\beta})\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{a_{1\beta}^2 + b_{1\beta}}} \\
&= \frac{Q_1}{4\pi^3\varepsilon_0 R_1}\int_0^{2\pi}\frac{\Xi(\beta)\,\mathrm{K}(k_{1\beta})\,\mathrm{d}\beta}{\sqrt{[\rho + \Xi(\beta)]^2 + \Theta^2(\xi,\beta)}},
\end{aligned} \qquad (\Pi 16)$$

где $k_{1\beta}^2 = 2b_{1\beta}/(a_{1\beta}^2 + b_{1\beta}) = 4\rho\Xi(\beta)/\{[\rho + \Xi(\beta)]^2 + \Theta^2(\xi,\beta)\}$; $\mathrm{K}(k_{1\beta})$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Далее считаем, что радиус r_{w} сечения проволоки меньше образующего центр радиуса R_1, т.е. $r_{\mathrm{w}} \ll R_1$. Тогда из (П16) при этом условии для $\rho = R_1 + r_{\mathrm{w}}$ и $\xi = 0$ имеем [ср. (П5)]:

$$\varphi_1(\rho{=}R_1{+}r_{\mathrm{w}}, \xi{=}0) \approx \frac{Q_1}{4\pi^2\varepsilon_0 R_1}\ln\left(\frac{8R_1}{r_{\mathrm{w}}}\right), \qquad (\Pi 17)$$

где учтена асимптотика [33]

$$\lim_{k_{1\beta}\to 1}\mathrm{K}(k_{1\beta}) \approx \ln(4/\sqrt{1 - k_{1\beta}^2}),$$

$$1 - k_{1\beta}^2 \approx [(\rho - R_1)^2 + \xi^2]/(\rho + R_1)^2.$$

Тогда собственная электрическая емкость кольца радиусом R_1 при $R_1 \gg r_{\mathrm{w}}$ есть

$$C_{11} = \frac{Q_1}{\varphi_1(R_1{+}r_{\mathrm{w}}, 0)} \approx 4\pi^2\varepsilon_0 R_1\ln^{-1}\left(\frac{8R_1}{r_{\mathrm{w}}}\right), \qquad (\Pi 18)$$

где φ_1 дается формулой (П17).

По аналогии с формулой (П17) электрический потенциал, создаваемый в произвольной точке, кольцом радиусом R_2 при радиусе сечения $r_{\mathrm{w}} \ll R_2$, расположенным на расстоянии L от кольца радиусом R_1, есть:

$$\varphi_2(\rho{=}R_2{+}r_{\mathrm{w}}, \xi{=}L) \approx \frac{Q_2}{4\pi^2\varepsilon_0 R_2}\ln\left(\frac{8R_2}{r_{\mathrm{w}}}\right). \qquad (\Pi 19)$$

Тогда собственная электрическая емкость кольца радиусом R_2 при $R_2 \gg r_{\mathrm{w}}$ с учетом (П19) есть

$$C_{22} = \frac{Q_2}{\varphi_2(R_2{+}r_{\mathrm{w}}, L)} \approx 4\pi^2\varepsilon_0 R_2\ln^{-1}\left(\frac{8R_2}{r_{\mathrm{w}}}\right), \qquad (\Pi 20)$$

где учтена асимптотика [33]

$$\lim_{k_{2\beta}\to 1} \mathrm{K}(k_{2\beta}) \approx \ln(4/\sqrt{1-k_{2\beta}^2}),$$

$$1-k_{2\beta}^2 \approx [(\rho-R_2)^2+(\xi-L)^2]/(\rho+R_2)^2.$$

Далее вычислим взаимную электрическую емкость C_{12}. Согласно формуле (П5), имеем

$$C_{12} = \frac{Q_1}{\varphi_1(R_2, L)} = \frac{Q_2}{\varphi_2(R_1, 0)} = 2\pi^2\varepsilon_0 \frac{\sqrt{(R_1+R_2)^2+L^2}}{\mathrm{K}(k_{12})}, \qquad (\text{П21})$$

где $k_{12}^2 = 4R_1R_2/[(R_1+R_2)^2+L^2]$.

Тогда из (П11) с учетом (П18), (П20), полная электрическая емкость конденсатора с кольцевыми электродами определяется выражением

$$C^{-1} = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\left(\frac{\ln(8R_1/r_\mathrm{w})}{R_1} + \frac{\ln(8R_2/r_\mathrm{w})}{R_2} - \frac{4\,\mathrm{K}(k_{12})}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+L^2}}\right), \qquad (\text{П22})$$

где $r_\mathrm{w} = d_\mathrm{w}/2$ — радиус поперечного сечения цилиндрической проволоки, свернутой в кольца радиусами R_1 и R_2.