Устойчивость неоднородных стационарных состояний диода со встречными потоками релятивистских электронов и позитронов

© Л.А. Бакалейников, В.И. Кузнецов, Е.Ю Флегонтова

ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: bakal51@mail.ru

Поступило в Редакцию 20 апреля 2026 г.
В окончательной редакции 26 августа 2026 г.
Принято к публикации 23 октября 2026 г.

Изучена устойчивость неоднородных стационарных состояний плоского диода со встречными потоками релятивистских электронов и позитронов. С помощью оригинального численно-аналитического метода решено уравнение для амплитуды возмущения электрического поля и получено дисперсионное уравнение. Построены зависимости инкремента Γ и частоты ω собственной моды возмущения от величины безразмерного межэлектродного расстояния δ. Изучены дисперсионные свойства плазмы диода в зависимости от релятивистского фактора вылетающих с границы электронов γ_0. Показано, что влияние γ_0 сводится в основном к растягиванию зависимости $\Gamma(\delta)$ вдоль оси абсцисс. Установлено, что в широком диапазоне значений γ_0 все решения, соответствующие стационарным ветвям n_2 и n_4, оказываются неустойчивыми относительно малых возмущений.

Ключевые слова: плазменный диод, пучки релятивистских электронов и позитронов, устойчивость решений.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.24.64024.9491k

Изучение плазменных диодов со встречными потоками электронов и позитронов представляет интерес как для высокоэнергетических астрофизических объектов [1], так и для лабораторных экспериментов [2]. При изучении процессов в таких диодах в первую очередь необходимо проанализировать все стационарные состояния плазмы и изучить их устойчивость относительно малых возмущений.

В работе [3] построены и проанализированы решения уравнений для стационарных распределений потенциала (РП) в одномерном диоде со встречными потоками релятивистских электронов и позитронов. Оказалось, что все эти решения можно отнести к двум типам: 1) когда все заряженные частицы достигают противоположного электрода (режим без отражения частиц); 2) когда на РП имеются потенциальные барьеры, которые отражают часть частиц обратно на электрод, с которого частицы вылетели (режим с отражением). При заданной разности потенциалов между электродами все семейства решений удобно представлять набором непрерывных кривых на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$, где ε_0 и δ — безразмерные напряженность электрического поля у эмиттера и межэлектродное расстояние (рис. 1). Следующий этап — проанализировать устойчивость найденных решений относительно малых возмущений.

Изучение устойчивости стационарных решений в случае диода с релятивистскими встречными потоками электронов и позитронов начато в работе [4], где выведено интегродифференциальное уравнение для амплитуды возмущения электрического поля для режима без отражения заряженных частиц от потенциальных барьеров. Для случая однородного стационарного поля там получено его точное решение и изучены дисперсионные свойства плазмы. Обнаружен порог устойчивости решений по δ. В настоящей работе мы изучаем устойчивость неоднородных стационарных решений для режима без отражения, соответствующих ветвям стационарных решений n_2 и n_4, где нижний индекс показывает число экстремумов на распределении потенциала (рис. 1). Предлагается оригинальный численно-аналитический метод решения уравнения для амплитуды возмущения. Выводится дисперсионное уравнение. Изучение его решений показывает, что все стационарные

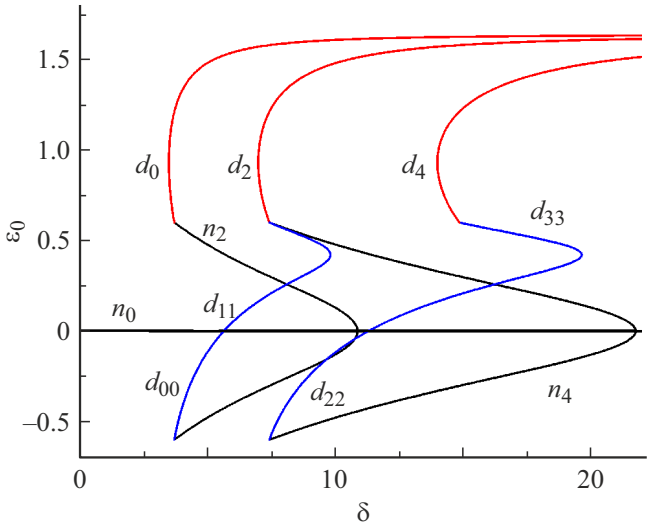


Рис. 1. Ветви стационарных решений при $\gamma_0 = 3$. $V = 0$.

состояния, лежащие на ветвях n_2 и n_4, неустойчивы относительно малых возмущений. Анализируется влияние релятивистского фактора γ_0 на дисперсионные ветви.

Рассматриваем одномерный диод. Обозначим расстояние между электродами d, а разность потенциалов между ними — U. Поток релятивистских электронов поступает с левого электрода, а поток релятивистских позитронов — с правого. Оба потока вылетают с монокинетическими функциями распределения по импульсам, с одинаковыми кинетическими энергиями и движутся в межэлектродном промежутке в самосогласованном электрическом поле, не испытывая столкновений. Считаем, что при достижении любого из электродов частица поглощается на нем. Пренебрегаем собственным магнитным полем заряженных частиц. Это предположение справедливо, если диод находится в сильном продольном магнитном поле, в котором ларморовский радиус частиц много меньше поперечного ларморовского радиуса, связанного с собственным полем. Введем релятивистские факторы частиц $\gamma_e = (1 - v_e^2/c^2)^{-1/2}$, $\gamma_p = (1 - v_p^2/c^2)^{-1/2}$, где v_e, v_p — скорости электронов и позитронов, а c — скорость света в вакууме. Массы покоя электронов и позитронов одинаковы: $m_p = m_e = m$. Считаем, что и релятивистские факторы частиц на электродах равны: $\gamma_{e0} = \gamma_{p0} = \gamma_0$.

Стационарные состояния такого диода проанализированы в работе [3]. Все такие решения удобно представлять на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Пример такой плоскости для $\gamma_0 = 3$ показан на рис. 1.

В работе [4] разработана теория устойчивости стационарных решений для режима без отражения заряженных частиц. Предварительно перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве единиц энергии и длины энергию потока W_0 и длину Дебая–Хюккеля λ_D на левой границе:

$$W_0 = (\gamma_0 - 1)\, m c^2, \quad \lambda_D = \left[(2\tilde{\varepsilon}_0 W_0)/(e^2 n_0)\right]^{1/2}. \qquad (1)$$

Здесь e — заряд электрона, а $\tilde{\varepsilon}_0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума. Тогда для безразмерных координаты, скорости, времени, потенциала и напряженности электрического поля имеем соответственно $\xi = z/\lambda_D$, $u = v/v_{e0}$, $\tau = t/(\lambda_D/v_{e0})$, $\eta = e\varphi/(2W_0)$, $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_0)$. Безразмерные межэлектродное расстояние и разность потенциалов между электродами определяются как $\delta = d/\lambda_D$, $V = eU/(2W_0)$.

В работе [4] РП $\eta(\tau, \xi)$ представлялось в виде $\eta_0(\xi) + \tilde{\eta}(\xi)\exp(-i\Omega\tau)$, где $\eta_0(\xi)$ — стационарное решение, а $\tilde{\eta}(\xi)$ — малое возмущение потенциала. Для амплитуды возмущения потенциала $\tilde{\eta}(\xi)$ было выведено следующее уравнение:

$$\tilde{\eta}'(\xi) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\int_0^{\xi}\frac{dx}{u_{e0}^3(x)\gamma_{e0}^3(x)}\int_0^{x} dy\,\tilde{\eta}'(y)\,\exp\{i\,\Omega\,[\tau_{e0}(\xi) - \tau_{e0}(y)]\} + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\int_{\xi}^{\delta}\frac{dx}{|u_{p0}(x)|^3\gamma_{p0}^3(x)}\int_x^{\delta} dy\,\tilde{\eta}'(y) \times \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(\xi) - \tau_{p0}(y)]\} = \tilde{\eta}'(0) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \times \int_0^{\delta}\frac{dx}{|u_{p0}(x)|^3\gamma_{p0}^3(x)}\int_x^{\delta} dy\,\tilde{\eta}'(y)\exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(0) - \tau_{p0}(y)]\}. \qquad (2)$$

Здесь $u_{e0}(\xi)$, $\tau_{e0}(\xi)$, $\gamma_{e0}(\xi)$ — скорость, время пролета электрона от левого электрода до точки ξ и релятивистский фактор на невозмущенной траектории, а $u_{p0}(\xi)$, $\tau_{p0}(\xi)$, $\gamma_{p0}(\xi)$ — аналогичные параметры (но относительно правой границы) для позитрона:

$$u_{e0}(\xi) = \frac{\gamma_0}{(\gamma_0^2-1)^{1/2}}\frac{\left\{[\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)\,\eta(\xi)]^2 - 1\right\}^{1/2}}{\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)\,\eta(\xi)},$$

$$\tau_{e0}(\xi) = \int_0^{\xi}\frac{dx}{u_{e0}(x)}, \quad \gamma_{e0}(\xi) = \left(1 - [(\gamma_0^2-1)/\gamma_0^2]u_{e0}^2(\xi)\right)^{-1/2},$$

$$u_{p0}(\xi) = \frac{\gamma_0}{(\gamma_0^2-1)^{1/2}}\frac{\left\{(\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)\,[V-\eta_0(\xi)])^2 - 1\right\}^{1/2}}{\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)\,[V-\eta_0(\xi)]},$$

$$\tau_{p0}(\xi) = \int_{\xi}^{\delta}\frac{dx}{|u_{p0}(x)|}, \quad \gamma_{p0}(\xi) = \left(1 - [(\gamma_0^2-1)/\gamma_0^2]u_{p0}^2(\xi)\right)^{-1/2}. \qquad (3)$$

Поскольку значения потенциала на электродах фиксированы,

$$\tilde{\eta}(0) = 0, \quad \tilde{\eta}(\delta) = 0. \qquad (4)$$

Для вычисления всех величин в формулах (3) нужно знать стационарное РП в диоде. В режиме без отражения частиц каждое РП является функцией волнового типа с минимумами η_m и максимумами η_M. Для нахождения РП в работе [3] используется связь между напряженностями в двух точках ξ и ξ_1:

$$\left[\frac{d\eta}{d\xi}(\xi)\right]^2 - \left[\frac{d\eta}{d\xi}(\xi_1)\right]^2 = G(\eta) - G(\eta_1), \qquad (5)$$

где $\eta = \eta(\xi)$, $\eta_1 = \eta(\xi_1)$, а

$$G(x) = \frac{\sqrt{\gamma_0+1}}{\gamma_0\sqrt{\gamma_0-1}}\Big(\left\{[\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)x]^2 - 1\right\}^{1/2} + \left\{[\gamma_0 + 2(\gamma_0-1)(V-x)]^2 - 1\right\}^{1/2}\Big). \qquad (6)$$

Использование соотношения (5) на участке от минимума η_m до максимума η_M потенциала дает связь между ними: $\eta_M = V - \eta_m$. Использование (5) на участке от эмиттера до минимума позволяет найти зависимость между напряженностью электрического поля у эмиттера ε_0 и η_m:

$$\varepsilon_0^2 = G(0) - G(\eta_m). \tag{7}$$

При построении РП удобно выбрать в качестве параметра η_m. Изменяя его от 0 до $-1/2$ и используя (5), находим РП в неявном виде для ряда последовательных участков. В настоящей работе будем рассматривать только диод с $V = 0$. В этом случае РП является нечетно-симметричной функцией относительно центра зазора, и все стационарные решения для электрон-позитронного диода могут принадлежать только к однородной ветви и ветвям n_{2s}, $s = 1, 2, \ldots$ (рис. 1). Нижние части ветвей решений без отражения n_{2s} начинаются с решений, для которых $\eta_m = -1/2$, а завершаются на однородных решениях ($\eta_m = 0$). Далее идут верхние части этих ветвей, которые завершаются на решениях, у которых $\eta_m = -1/2$. После этого ветви n_{2s} переходят в ветви с отражением электронов d_{2s-2}.

Пусть ξ_m — положение минимума η_m. Чтобы построить неоднородное РП для режима без отражения, достаточно рассмотреть только участок $(0, \xi_m)$, поскольку на участке $(0, 2\xi_m)$ РП симметрично относительно положения минимума потенциала. По достижении точки $\xi = 2\xi_m$ потенциал обращается в нуль, и продолжить зависимость $\xi(\eta)$ можно из соображений нечетной симметрии. Таким образом получаем зависимость РП для ветви n_2, которая завершается при $\delta = 4\xi_m$. Чтобы последовательно строить РП, соответствующие ветвям n_{2s} $(s > 1)$, нужно добавлять к полученной зависимости потенциала от координаты еще одну волну. На участке $(0, \xi)$, где $\xi < \xi_m$, зависимость $\xi(\eta)$ дается формулой

$$\xi = \int_{\eta}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + G(x) - G(0)}}. \tag{8}$$

Следует отметить, что в случае неоднородных решений, соответствующих ветвям n_{2s}, зависимости $\varepsilon_0(\delta)$ могут пересекать ось $\varepsilon_0 = 0$ только в точках $\delta_s = \sqrt{\gamma_0(\gamma_0+1)}\,\pi\, s$ [3].

После небольшого экскурса в стационарные решения перейдем к решению уравнения (2). Введем новую искомую функцию $\varphi(\xi) = \tilde{\eta}'(\xi)$. Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$\varphi(\xi) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \int_0^{\xi} \frac{dx}{u_{e0}^3(x)\gamma_{e0}^3(x)} \int_0^{x} dy\, \varphi(y)\, \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{e0}(\xi) - \tau_{e0}(y)]\} + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \int_{\xi}^{\delta} \frac{dx}{|u_{p0}(x)|^3\gamma_{p0}^3(x)} \int_{x}^{\delta} dy\, \varphi(y) \times \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(\xi) - \tau_{p0}(y)]\} = \varphi(0) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \times \int_0^{\delta} \frac{dx}{|u_{p0}(x)|^3\gamma_{p0}^3(x)} \int_{x}^{\delta} dy\, \varphi(y)\, \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(0) - \tau_{p0}(y)]\}. \tag{9}$$

Заметим, что, если рассмотреть уравнение (9) в точке $\xi = \delta$, в правой части этого уравнения можно перейти от константы $\varphi(0)$ к константе $\varphi(\delta)$. Далее в полученном уравнении изменим порядок интегрирования в двойных интегралах. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\varphi(\xi) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \int_0^{\xi} dx\, \varphi(x)\, \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{e0}(\xi) - \tau_{e0}(x)]\} \times \int_x^{\xi} \frac{dy}{u_{e0}^3(y)\gamma_{e0}^3(y)} + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \int_{\xi}^{\delta} dx\, \varphi(x)\, \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(\xi) - \tau_{p0}(x)]\} \int_{\xi}^{x} \frac{dy}{u_{p0}^3(y)\gamma_{p0}^3(y)} = \varphi(\delta) + \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1} \int_0^{\delta} dx\, \varphi(x) \times \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{e0}(\delta) - \tau_{e0}(x)]\} \int_x^{\delta} \frac{dy}{u_{e0}^3(y)\gamma_{e0}^3(y)}. \tag{10}$$

Таким образом, задача свелась к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(\xi)$.

Далее вводим следующие функции:

$$K(\xi, x; \Omega) = \frac{2\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\, Q(\xi, x; \Omega)\, P(\xi, x),$$

$$P(\xi, x) = \begin{cases} \int\limits_x^{\xi} dy\, u_{e0}^{-3}(y)\gamma_{e0}^{-3}(y), & x \le \xi, \\ \int\limits_{\xi}^{x} dy\, u_{p0}^{-3}(y)\gamma_{p0}^{-3}(y), & x \ge \xi, \end{cases}$$

$$Q(\xi, x; \Omega) = \begin{cases} \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{e0}(\xi) - \tau_{e0}(x)]\}, & x \le \xi, \\ \exp\{i\,\Omega\,[\tau_{p0}(\xi) - \tau_{p0}(x)]\}, & x \ge \xi. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что решение уравнения (10) определено с точностью до мультипликативной константы, определяемой значением возмущения электрического поля на

правой границе, т. е. величиной $-\tilde{\eta}'(\delta)$. Поэтому можно считать, что $\tilde{\eta}'(\delta) = 1$. С учетом этого замечания и соотношений (11) уравнение (10) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi(\xi;\Omega) + \int_0^\delta dx\ [K(\xi, x;\Omega) - K(\delta, x;\Omega)]\,\varphi(x;\Omega) = 1. \tag{12}$$

Уравнение (12) будем решать численным методом, модернизируя метод, который мы предложили ранее для изучения устойчивости неоднородных стационарных решений в случае нерелятивистского диода [5]. Разобьем весь интервал $[0, \delta]$ на N интервалов длиной h и заменим интегралы суммами. Значения $\varphi(\xi_i;\Omega)$ неизвестной функции в узлах ξ_i обозначим φ_i. Получаем систему линейных уравнений для φ_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$\varphi_i + h\sum_{j=1}^{N-1}[K(\xi_i, y_j;\Omega) - K(\delta, y_j;\Omega)]\,\varphi_j + \frac{h}{2}\left[\left(K(\xi_i, 0;\Omega) - K(\delta, 0;\Omega)\right)\varphi_0 + K(\xi_i, \delta;\Omega) - K(\delta, \delta;\Omega)\right] = 1. \tag{13}$$

Здесь учтено, что $\varphi_N = 1$. Решение линейной системы (13), естественно, зависит от частоты Ω, т. е. $\varphi_i = \varphi_i(\Omega)$. Как упоминалось выше, возмущение потенциала на электродах равно нулю. Для отыскания возмущения потенциала $\tilde{\eta}(\xi)$ проинтегрируем найденное решение, учитывая условие $\tilde{\eta}(0) = 0$. Приравнивая к нулю значение $\tilde{\eta}(\delta)$, получаем уравнение, связывающее Ω и δ, т. е. дисперсионное уравнение

$$h\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_i(\Omega) + \frac{h}{2}\,[\varphi_0(\Omega) + 1] = 0. \tag{14}$$

Это уравнение позволяет построить как апериодические, так и колебательные дисперсионные ветви и изучить устойчивость стационарных решений.

Нами были рассчитаны зависимости Ω от величины межэлектродного зазора δ для стационарных РП, соответствующих ветвям n_2 и n_4 при $V = 0$ и различных значениях γ_0. Инкремент собственной моды возмущения Γ определяется мнимой частью Ω, а частота ω — ее вещественной частью. Результаты расчетов для ветви n_2 приведены на рис. 2, а для ветви n_4 — на рис. 3. Видно, что, как и в нерелятивистском случае, стационарные решения, соответствующие ветви n_2, апериодически неустойчивы (для всех величин δ имеются ветви с инкрементом $\Gamma > 0$). Отметим, что у всех этих решений дисперсионные колебательные ветви оказались устойчивыми.

Для стационарных решений, соответствующих ветви n_4, дело обстоит интереснее. Здесь дисперсионное уравнение (14) при фиксированной величине зазора также

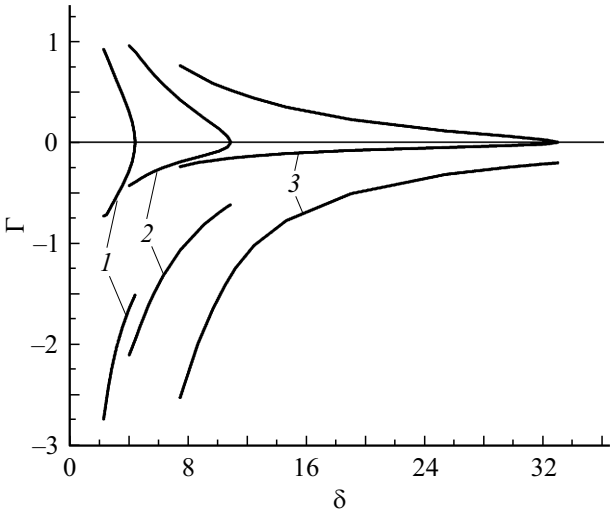


Рис. 2. Зависимости инкремента апериодических дисперсионных ветвей от величины межэлектродного зазора для решений, соответствующих ветви n_2, для ряда величин релятивистского фактора: $\gamma_0 = 1$ (*1*), 3 (*2*) и 10 (*3*). $V = 0$.

имеет несколько апериодических решений, и среди них имеются решения с положительным инкрементом, что приводит к экспоненциальному росту возмущения. Однако у апериодических мод появляются „окна“, в которых моды с положительным инкрементом Γ отсутствуют, и остаются только моды с $\Gamma < 0$, т. е. в этих окнах все апериодические моды экспоненциально затухают (рис. 3, левые фрагменты). Но эти окна как раз заполняют ветви с неустойчивыми колебательными модами (показаны штриховой линией и цифрой *1*). Зависимости частоты от величины зазора, соответствующие колебательным модам, приведены на правых фрагментах. Как показывают результаты численного решения уравнения (14), у остальных колебательных мод инкремент $\Gamma < 0$. Таким образом, все стационарные решения, соответствующие ветви n_4, оказываются неустойчивыми.

Влияние релятивистского фактора на зависимость $\Gamma(\delta)$ проявляется в основном в том, что эта зависимость растягивается вдоль оси абсцисс и сжимается вдоль оси ординат с ростом величины γ_0. Можно также отметить, что у апериодических ветвей решений дисперсионного уравнения, соответствующих стационарным ветвям n_{2s}, зависимости $\Gamma(\delta)$ пересекают ось $\Gamma = 0$ только в точках $\delta_s = \sqrt{\gamma_0(\gamma_0+1)}\,\pi s$, т. е. там же, где неоднородные стационарные решения пересекают ось $\varepsilon_0 = 0$. Этот результат — обобщение результата, полученного в работе [5], на релятивистский случай.

Для одномерного диода, в котором релятивистские потоки электронов и позитронов поступают с противоположных электродов и движутся в плазме, не испытывая столкновений, изучена устойчивость неоднородных стационарных решений без отражения частиц от потенциальных барьеров. Исследования проводились с использованием теории устойчивости, разработанной

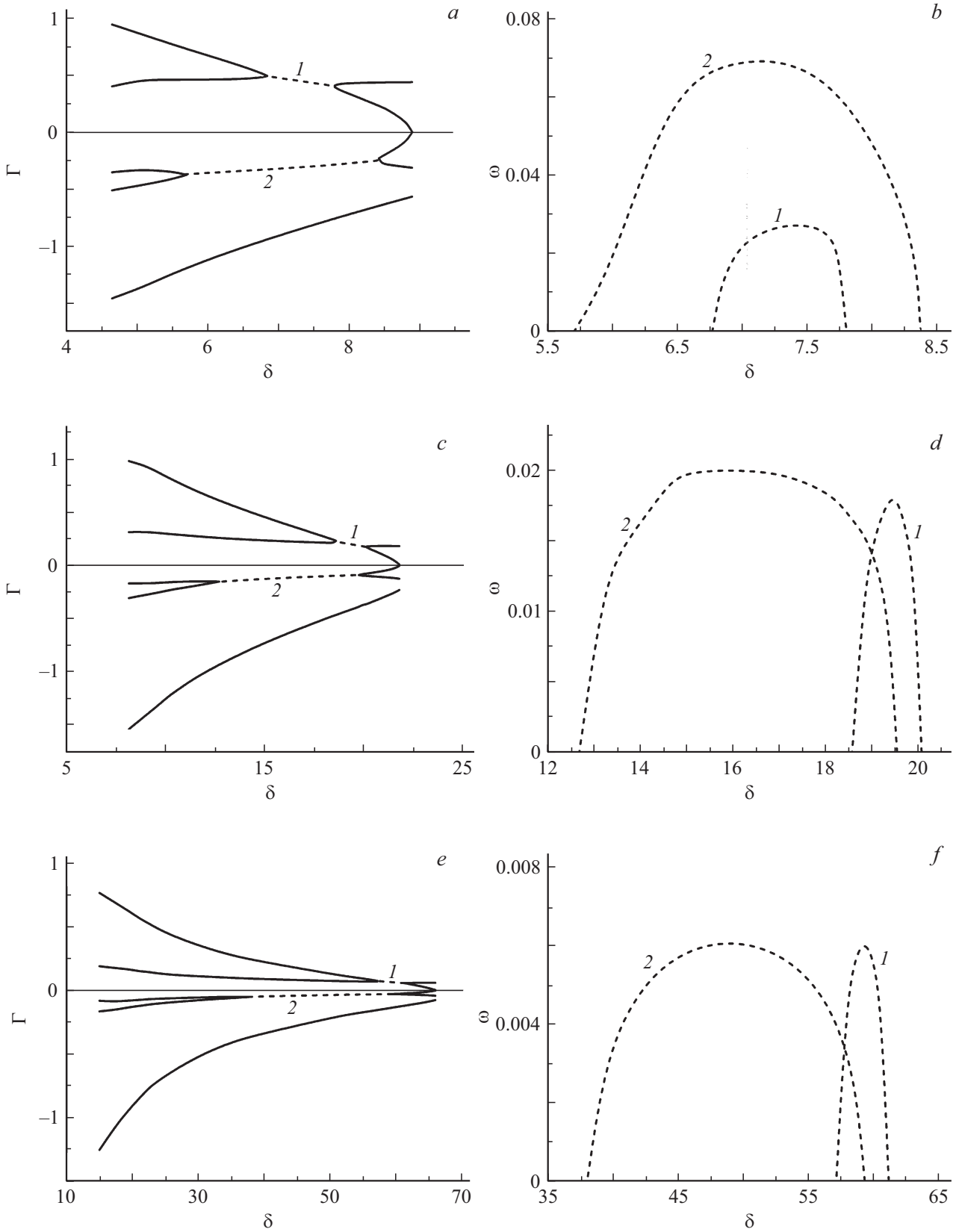


Рис. 3. Зависимости инкремента Γ (*a*, *c*, *e*) и частоты ω (*b*, *d*, *f*) дисперсионных ветвей от величины межэлектродного зазора δ для решений, соответствующих ветви n_4, для ряда значений релятивистского фактора: $\gamma_0 = 1$ (*a*, *b*), 3 (*c*, *d*) и 10 (*e*, *f*). $V = 0$. Сплошные кривые соответствуют апериодическим модам, штриховые — колебательным. Цифрой *1* на штриховых кривых помечена неустойчивая ветвь ($\Gamma > 0$), а цифрой *2* — устойчивая ($\Gamma < 0$).

нами ранее [4]. Предложен численно-аналитический метод решения интегродифференциального уравнения для амплитуды возмущения электрического поля. Показано, что все стационарные решения, соответствующие ветвям n_2 и n_4, являются неустойчивыми относительно малых возмущений. Этот результат справедлив для всех величин релятивистского фактора γ_0.

Таким образом, результаты, полученные в настоящей работе и работе [4], позволяют утверждать, что у релятивистского диода в режиме без отражения частиц из всех стационарных решений устойчивы только однородные решения для величин межэлектродного расстояния δ, меньших $\sqrt{\gamma_0(\gamma_0+1)}\,\pi$.

Для завершения исследований устойчивости стационарных решений в следующей работе мы изучим устойчивость решений для режима с отражением заряженных частиц.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] В.С. Бескин, УФН, **188** (4), 377 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2017.10.038216 [V.S. Beskin, Phys. Usp., **61** (4), 353 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.10.038216].
[2] C.D. Arrowsmith, P. Simon, P.J. Bilbao, A.F.A. Bott, S. Burger, H. Chen, F.D. Cruz, T. Davenne, I. Efthymiopoulos, D.H. Froula, A. Goillot, J.T. Gudmundsson, D. Haberberger, J.W.D. Halliday, T. Hodge, B.T. Huffman, S. Iaquinta, F. Miniati, B. Reville, S. Sarkar, A.A. Schekochihin, L.O. Silva, R. Simpson, V. Stergiou, R.M.G.M. Trines, T. Vieu, N. Charitonidis, R. Bingham, G. Gregori, Nat. Commun., **15**, 5029 (2024). DOI: 10.1038/s41467-024-49346-2
[3] V.I. Kuznetsov, L.A. Bakaleinikov, I.K. Morozov, E.Yu. Flegontova, Plasma Phys. Rep., **51** (3), 299 (2025). DOI: 10.1134/S1063780X25602329
[4] L.A. Bakaleinikov, V.I. Kuznetsov, E.Yu. Flegontova, Phys. Plasmas, **33** (3), 032106 (2026). DOI: 10.1063/5.0300681
[5] L.A. Bakaleinikov, V.I. Kuznetsov, E.Yu. Flegontova, D.P. Barsukov, I.K. Morozov, Phys. Plasmas, **30** (12), 122107 (2023). DOI: 10.1063/5.0168756