03

Возбуждение мод металлического капилляра сфокусированным светом: теория и оценки возможностей увеличения сигналов комбинационного рассеяния

© А.П. Коузов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: a.kouzov@spbu.ru

Поступила в редакцию 26.11.2025 г.
В окончательной редакции 17.03.2026 г.
Принята к публикации 07.04.2026 г.

Теоретически проанализированы возможности, открываемые использованием металлических капилляров (МК) для усиления сигналов комбинационного рассеяния (КР) света. Детально изучены характеристики возбуждения E- и H-мод круглого МК при фокусировке монохроматического луча на входное отверстие капилляра. Показано, что в мультимодовом режиме число возбуждаемых E_{1m}- и H_{1m}-мод существенно ограничивается числом осцилляций поля на дифракционной картине, возникающей на входе МК. По этой причине использование малых численных апертур сильно снижает число мод, участвующих в переносе световой энергии. Предложенная модификация метрики для расчета модовых амплитуд унифицирует расчет характеристик эванесцентных и распространяющихся волн и дает новое правило сумм для корней производной $J_1'(x)$ функции Бесселя. Построены поверхности пропускания как функции номера моды m и безразмерной комбинации поверхностного импеданса, внутреннего радиуса МК и длины оптического пути L. Эти данные сильно упрощают нахождение оптимального фокусного расстояния и дают возможность быстро рассчитать эффективную длину L для произвольного МК. По нашим оценкам H-волны при возбуждении светом с $\lambda = 0.5\,\mu$m могут распространяться в идеальном серебряном МК с внутренним радиусом 1 mm почти на 15 m, что намного превосходит длину распространения E-волн. При использовании такого МК в качестве оптической кюветы сигнал КР по сравнению со стандартной схемой возбуждения фокусировкой падающего луча в открытом пространстве может быть увеличен до трех десятичных порядков.

Ключевые слова: металлические световоды, оптическое возбуждение мод, спектроскопия комбинационного рассеяния.

DOI: 10.61011/OS.2026.10.63938.8825-26

Введение

В течении многих десятилетий металлические волноводы были досконально исследованы как теоретически, так и экспериментально из-за их высокой эффективности при передаче микроволнового излучения (МВ). Переход к коротковолновой радиации (ИК и видимому свету) существенно меняет характеристики ее распространения в капиллярных металлических световодах и требует нового анализа. Прежде всего при таком переходе на десятичные порядки увеличивается отношение внутреннего диаметра d металлического капилляра (МК) к длине волны λ и режим становится существенно многомодовым. Во-вторых, свойства металла также сильно изменяются с ростом частоты, и в-третьих, способы возбуждения волн внутри МК сильно отличаются от используемых в МВ-диапазоне. Все эти обстоятельства оказывают сильное влияние на спектр возбуждаемых мод, равно как и на характеристики их распространения по волноводам.

Имея в виду возможное применение МК для техники комбинационного рассеяния (КР), следует отметить, что свет, запертый внутри МК, взаимодействует с молекулами исследуемого вещества в объеме намного большем, чем околофокусный объем (каустика), из которого снимается полезный сигнал в стандартной („free-space“) схеме комбинационного рассеяния (СКР). Можно показать [1], что при неизменной мощности накачки выигрыш при переходе к МК пропорционален лишь линейному размеру объема взаимодействия и оценивается отношением $\eta = L/l$ длины МК к длине (l) каустики. Поскольку l составляет несколько миллиметров, а длины доступных МК измеряются метрами, то выигрыш в сигнале КР может быть гигантским. Последний ограничен потерями на стенках МК, что требует проведения теоретического анализа, являющегося целью данной работы.

С точки зрения теории перенос излучения в МК заметно проще аналогичных процессов в оптических волокнах, причем применение последних в качестве инструмента спектроскопии КР крайне ограничено. Первая попытка обойти это ограничение была сделана Уолрафеном и Стоуном [2], зарегистрировавшими гигантское увеличение сигнала КР от жидкости, наполнявшей полое оптоволокно (d =75 μm, L =25 m). Следует отметить, что этот результат обусловлен эффектом полного внут-

реннего отражения и применим лишь для жидкостей с показателем преломления большим, чем у стекла, и в противном случае (например, для газов) недостижим.

Как было показано исследованиями, начатыми в 1990 гг., утечки света через стенки полого оптоволокна можно избежать, если в его стенки внедрить регулярно расположенные продольные отверстия, что все вместе образует так называемое фотонное кристаллическое волокно („photonic crystal fiber“, PCF) [3]. Разработаны различные варианты PCF, находящие разнообразные применения в нелинейной оптике и лазерной технике [4]. Отсутствие утечки света через боковую поверхность вкупе с достаточной длиной PCF (1 m) позволило примерно стократно усилить сигнал КР [5] по сравнению со случаем СКР.

Относительно недавно полые стеклянные капилляры с посеребренной внутренней поверхностью были использованы в работах [6–9], в которых достигнутый выигрыш варьировался от тридцати до нескольких сотен раз. Хотя такой успех может быть частично приписан более эффективному сбору света из горловины узкой трубки, роль фактора η остается определяющей. Оба эти обстоятельства открывают новые возможности для спектроскопии КР газов и жидкостей. При этом контакт света со стеклом, присутствующий в PCF и вызывающий паразитную засветку (люминисценцию), минимизируется. С точки зрения теории стеклянные капилляры с достаточно толстым внутренним слоем металла эквивалентны МК, однако последние предпочтительны при работе с повышенными давлениями.

Из предыдущих теоретических исследований по данной тематике отметим работу Маркатили и Шмельтцера [10], которые оценили константу затухания моды TE_{01} в полом алюминиевом капилляре ($d = 0.5$ mm) для частот ИК- и видимого диапазона и получили длину пробега волны в 1 km. Конечная проводимость стенок круглого МК учитывалась при расчете переноса излучения в MHz/THz- [11,12], ИК- [13–15] и видимом [15] диапазонах. При этом изучались свойства мод низкого порядка, но характеристики спектра возбуждения не рассматривались.

Эти характеристики представляют для нас главный интерес, поскольку они являются определяющими для переноса энергии в МК. Следует отметить, что в КР-измерениях использовались МК с весьма разными параметрами. Так, внутренние диаметры [6–9] менялись от 0.3 [7] до 2 mm [9], а численные апертуры для ввода излучения в МК разнились более чем на порядок. Представляется необходимым проведение систематического теоретического анализа, нужного как для оптимизации измерений, так и для оценки ограничений на длины МК, обусловленные потерями. Такой анализ проводится в данной работе для МК со стенками идеально круглой формы и с магнитной проницаемостью равной единице, потери учитываются с помощью поверхностного импеданса [16]. На первом этапе применялась стандартная метрика [17,18], использующая вектор Умова-Пойнтинга, но при этом обнаружились определенные неудобства. Сделанная модификация метрики функционального пространства позволила единообразно рассчитывать амплитуды эванесцентных (короткоживущих) и распространяющихся волн, а также установить новое правило сумм для корней производной $J_1'(x)$ функции Бесселя.

1. Моды круглого цилиндрического капилляра

Собственные электромагнитные волны (моды), распространяющиеся с волновыми векторами k_z вдоль оси капилляра Oz[1], заполненного изотропным веществом с $\varepsilon = 1$, подразделяются на два типа [16] — тип E, для которого магнитное поле сугубо поперечно ($H_z = 0$), но электрическая часть содержит как поперечные (E_x, E_y), так и продольную (E_z) компоненты, и тип H с чисто поперечным электрическим полем ($\mathbf{E} \perp \mathbf{z}$) и магнитным полем, все три компонентам которого, H_x, H_y, H_z, не равны нулю [16]. Для волн обоих типов поперечные составляющие определяются через продольные компоненты $F_z (= E_z, H_z)$ (Приложение A), а последние — через функции Бесселя $J_n(u)$ порядка n безразмерной переменной $u_{nm}^{E/H} = r\chi_{nm}^{E/H}/a$:

$$F_{znm}^{E/H}(r, \varphi) = J_n(u^{E/H}) \begin{Bmatrix} \sin(n\varphi) \\ \cos(n\varphi) \end{Bmatrix};$$

$$F_{z0m}^{E/H}(r, \varphi) = J_0(u^{E/H}). \qquad (1)$$

Здесь $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ и φ обозначают радиальную и угловую координаты точки в плоскости xOy, a есть внутренний радиус МК, а $\chi_{nm}^{E/H}$ - корни $J_n(u)$ (случай E) или $J_n'(u) = [J_{n-1}(u) - J_{n+1}(u)]/2$ (случай H), нумеруемые индексом m в порядке их возрастания. При фиксированном n зависимость этих корней от m приближается к линейной по мере роста m.

Волны обоих типов могут распространяться при условии положительности их волновых векторов $k_z = \sqrt{k^2 - (\chi_{nm}^{E/H}/a)^2}$. Отсюда следует, что корни $\chi_{nm}^{E/H}$ должны быть меньше безразмерного параметра $\rho \equiv ka = 2\pi a/\lambda$, где $k = \omega/c$ есть волновой вектор в свободном пространстве. В противном случае ($\chi_{nm}^{E/H} > \rho$) спектр разрешенных мод обрезается, так как k_z становится мнимым, волны почти мгновенно затухают и в переносе энергии не участвуют. Тем не менее такие короткоживущие моды должны включаться в расчеты, так как иначе базисные векторные наборы, получаемые из (1), становятся неполными. В принципе, эванесцентные моды могут индуцировать процессы рассеяния света, но на фоне разрешенных мод их вклад при больших значениях параметра ρ весьма мал (разд. 2.2).

[1] Для сокращения записи фазовые факторы $\exp(ik_z z - i\omega t)$ будут далее опускаться.

Поле $\mathbf{F}$ внутри световода может быть представлено в виде линейной комбинации E- и H-базисных функций $\mathbf{F}_{nm}$ [18]

$$\mathbf{F} = \sum_{n,m} \langle \mathbf{F}, \mathbf{F}_{nm} \rangle \mathbf{F}_{nm}, \tag{2}$$

где скалярное произведение (метрика)

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_c = \int [\mathbf{E}_F \times \mathbf{H}_G^*]_z dS. \tag{3}$$

обычно определяется [17,18] через поперечные компоненты $\mathbf{E}_j$ и $\mathbf{H}_j$ $(j = F, G)$ электрических и магнитных составляющих полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, а интегрирование проводится по поперечному сечению S МК; $dS = rdrd\varphi$. Видим, что в случае $\mathbf{F} = \mathbf{G}$ интеграл (3) определяется вектором Умова-Пойнтинга, так что выбор метрики (3) удобен, когда напрямую рассчитываются характеристики переноса энергии в единицу времени как общие, так и связанные с определенной модой. В случае, когда необходимо знать стационарную плотность энергии, приходящейся на единицу длины световода, выбор метрики (3) не оптимален, так как часть базисных векторов, отнормированных при помощи (3), в случае эванесцентных мод будет содержать мнимые сомножители k_z. В таких случаях удобнее определять метрику непосредственно через плотность энергии, отвечающую поперечным составляющим поля $\mathbf{E}_t(t = x, y)$. Для расчета поперечных электрических компонент такая метрика может быть выбрана в виде

$$\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \rangle = \int (\mathbf{E}_{1t}, \mathbf{E}_{2t}) dS. \tag{4}$$

Если требуется знание продольной составляющей (E-случай) (например, для расчета поля молекулярного рассеяния внутри МК), то она может быть найдена из уравнений, связывающих ее с поперечными компонентами. В свою очередь, скорость переноса энергии конкретной модой находится умножением парциальной плотности энергии на скорость распространения волны ck_z/k [16]. Когда операция нахождения полного электрического поля внутри МК завершена, магнитное поле $\mathbf{H}$ находится из уравнений Максвелла. В свою очередь, если задано магнитное поле, то амплитуды могут быть рассчитаны заменой $\mathbf{E} \rightleftharpoons \mathbf{H}$ в уравнении (4).

Базисные компоненты e^H_{tnm} и e^E_{tnm} $(t = x, y)$ (Приложение А), найденные с помощью модифицированной метрики, сохраняют ортогональность, а после нормировки вообще не содержат волновых векторов. В результате амплитуды всех мод, включая эванесцентные, становятся однородными, т. е. либо чисто вещественными, либо чисто мнимыми. Выражения для магнитных базисных векторов $\mathbf{h}^E_{tnm}$ и $\mathbf{h}^H_{tnm}$ также приведены в Приложении А.

2. Возбуждение мод круглого МК фокусировкой света

Когда линейно поляризованный (вдоль Ox) монохроматический луч радиуса R_i и длиной волны λ сфокусирован на центр входного отверстия МК, распределение электрического поля $\mathbf{E}$ в фокальной плоскости (ниже мы ограничиваемся случаем больших чисел Френеля $F = R_i^2/f\lambda \gg 1$) дается формулой [19]

$$E_x = H_y \approx E_0 \frac{R_i}{r} J_1(kr\alpha)[1 + O(\alpha^2)]$$

$$E_y = H_x = E_z = H_z = 0, \tag{5}$$

в которой $\alpha = R_i/f$ обозначает численную апертуру, а f есть фокусное расстояние. Амплитуды мод $A^{E/H}_{nm}$, возбуждаемых этим полем, равны

$$A^{E/H}_{nm} = \langle \mathbf{E}, \mathbf{e}^{E/H*}_{nm} \rangle = \int E_x e^{E/H*}_{xnm} dS, \tag{6}$$

а их квадраты модулей имеют смысл парциальных плотностей энергии, приходящихся на единичную длину световода. Проинтегрировав по углу, мы заключаем, что только косинус-компонента (1) дает вклад в $A^{E/H}_{nm}$ и действует правило отбора $n = 1$. После этого получим интеграл по радиальной переменной $t = r/a$:

$$A^{E/H}_{nm} = -i\delta_{n1} \frac{i\pi E_0 R_i}{n^{E/H}_{nm}} \times \int_0^1 J_1(\rho\alpha t) \left[\frac{dJ_1(\chi^{E/H}_{1m} t)}{dt} + J_1(\chi^{E/H}_{1m} t)/t \right] dt$$

$$\equiv -i\delta_{n1} \frac{i\pi E_0 R_i}{n^{E/H}_{nm}} \Omega(\rho\alpha, \chi^{E/H}_{1m}), \tag{7}$$

который можно преобразовать, применив рекурентную формулу

$$dJ_n(z)/dz + nJ_n(z)/z = J_{n-1}(z). \tag{8}$$

Отсюда следует, что амплитуды A^E_{nm} и A^H_{nm} разнятся лишь нормировочными множителями (Приложение А) и аргументами интеграла перекрывания Ω

$$\Omega(\rho\alpha, \chi) = \int_0^1 J_1(\rho\alpha t) J_0(t\chi) dt. \tag{9}$$

2.1. Свойства интеграла перекрывания

Предел малых апертур

В случае $\rho\alpha \ll 1$ входное отверстия МК занято центральным пятном дифракционной картины. Используя $J_1(\rho\alpha t) \approx \rho\alpha t/2$, получаем

$$\Omega(\rho\alpha, \chi) \approx \frac{\rho\alpha}{2} \int_0^1 tJ_0(t\chi) dt = \frac{\rho\alpha}{2} J_1(\chi)/\chi. \tag{10}$$

Поскольку $J_1(\chi^E_{1m}) = 0$, для E_{1m}-мод интеграл Ω убывает быстрее, чем $\rho\alpha$, в то время как $\Omega(\rho\alpha, \chi^H_{1m})$ сохраняет

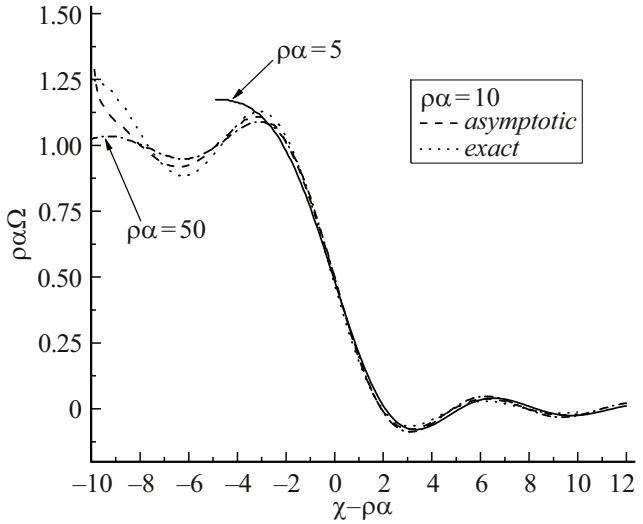


Рис. 1. Зависимость приведенного интеграла перекрывания Ω от аргумента χ вблизи границы срыва возбуждения при различных значениях параметра $\rho\alpha$.

линейную зависимость от $\rho\alpha$ с коэффициентами пропорциональности, зависящими от m. При проведении практических оценок следует также иметь в виду, что исходное выражение (5) справедливо для больших чисел Френеля $F = \alpha R_i/\lambda = \rho\alpha(R_i/2\pi a)$, т.е. при радиусе луча R_i много большем радиуса МК a. Итак, при малых $\rho\alpha$ и $F \gg 1$ возбуждаются лишь волны H_{1m}-типа и их интенсивности пропорциональны $(\rho\alpha)^2$.

Мультимодовый режим

Случай, когда оба параметра ρ и $\rho\alpha$ велики, имеет большее практическое значение и также позволяет исследовать асимптотику интеграла перекрывания. Для этого запишем Ω в виде разности двух интегралов Ω_1 и Ω_2, взятых соответственно по интервалам $(0, \infty)$ и $(1, \infty)$. Первый интеграл

$$\Omega_1(\rho\alpha, \chi) = \int_0^\infty J_1(\rho\alpha u)J_0(u\chi)du = \theta_s(\rho\alpha - \chi)/\rho\alpha \tag{11}$$

пропорционален симметричной функции Хевисайда ($\theta_s(0) = 1/2$), исчезающей при $\rho\alpha < \chi_{nm}^{E/H}$ и равной единице, если $\rho\alpha > \chi_{nm}^{E}$ [20]. Когда χ достаточно велико, то для расчета Ω_2 можно использовать асимптотическое поведение функций Бесселя [20] (Приложение B), что дает

$$\Omega \approx \frac{1}{\rho\alpha}\theta(\rho\alpha - \chi) - \frac{1}{2\sqrt{\rho\alpha\chi}} + \frac{1}{\pi\sqrt{\rho\alpha\chi}}Si(|\rho\alpha - \chi|), \tag{12}$$

где $\theta(x)$ есть несимметризованная функция Хевисайда ($\theta(0) = 1$). Функция интегрального синуса Si стремится к $\pi/2$, когда $|\rho\alpha - \chi| \to \infty$, что приводит к возрастающему сокращению второго и третьего слагаемых при увеличении отклонения χ от $\rho\alpha$. Поскольку функция $Si(x)$ нечетна, она исчезает при $\rho\alpha = \chi$, а член, входящий в (12) со знаком минус, уменьшает наполовину величину $\theta(0)$. Итак, следует ожидать, что Ω стремится к $1/\rho\alpha$ при $\rho\alpha > \chi$ и быстро убывает до нуля, когда χ намного превышает $\rho\alpha$. Другими словами, при больших значениях $\rho\alpha$ как E-, так и H-моды с $\chi_{1m}^{E/H} \geq \rho\alpha$ подавляются и их роль становится незаметной. Это также означает, что число эффективно возбуждаемых мод m_α по сравнению с полным числом мод m_{cr}, разрешенных стандартным условием $\chi_{1m}^{E/H} \leq \rho$, может быть радикально уменьшено до $m_\alpha \approx \alpha m_{cr}$, поскольку на практике условие $\alpha \ll 1$ легко реализуется.

Такой резкий обрыв спектра модового возбуждения подтверждается точными расчетами, проделанными при разных значениях $\rho\alpha$ и результаты которых представлены на рис. 1. Для наглядности значения интегралов перекрывания были умножены на $\rho\alpha$, а переменная χ изменялась непрерывным образом и отсчитывалась от границы обрыва $\chi = \rho\alpha$. Из графиков следует, что разность между точными и асимптотическими результатами весьма незначительна за исключением лишь интервала $0 < \chi \lesssim 3$, в котором лежит лишь одно собственное значение $\chi_{11}^H = 1.83$. Очевидно также, что с увеличением параметра $\rho\alpha$ число невозбужденных мод уменьшается, равно как и их роль в переносе энергии. Наоборот, при $\rho\alpha$ меньшем χ_{11}^H срыв возбуждения исчезает. При этом заметно возбуждаются лишь H_{1m}-моды, амплитуды которых волнообразно затухают в соответствии с формулой (10).

С математической точки зрения Ω_1 принадлежит к классу разрывных интегралов Сонина-Вебера-Шафтхайтлина [20], чьи величины зануляются, когда параметр подынтегральной функции пересекает некое граничное значение. В нашем случае это приводит к срыву возбуждения, когда (достаточно большое) число осцилляций поля в фокальной плоскости $m_\alpha = [\rho\alpha/\pi]$ (т.е. на входе МК) становится меньше числа радиальных полуволн $m \approx [\chi_{1m}^{E/H}/\pi]$, укладывающихся в поперечном сечении. Несколько неожиданным оказалось то, что такой эффект при точном расчете проявляется не в виде постепенного затухания амплитуд, а в практически полном занулении их при превышении критического значения m. Это явление может быть названо эффектом апертурного срыва возбуждения мод (АСВМ). Нам не удалось найти в литературе упоминания о подобном явлении.

Отметим, однако, что эффект АСВМ не является полным, как это происходит при нарушении стандартного условия $\chi_{1m}^{E/H} \leq \rho$. Остаточные амплитуды носят характер слабых закритических ондуляций (рис. 1), обусловленных интегралом Ω_2, и их уменьшение с ростом m довольно медленно. Роль ондуляций в докритической области (при $m \leq m_\alpha$) также невелика в отличие от роли нормировочных факторов, которые приводят к приближенной корневой ($\sqrt{\chi_{1m}^{E/H}} \sim \sqrt{m}$) зависимости амплитуд, следующей из асимптотики функций Бесселя [20]. В результате распределение парциальных плотностей

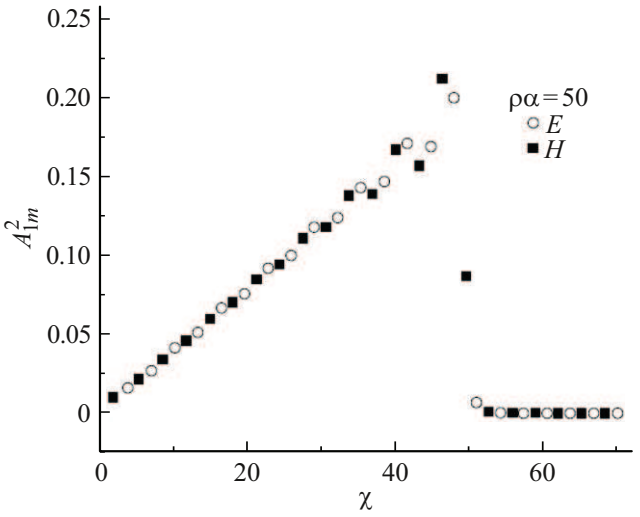


Рис. 2. Зависимость квадратов амплитуд возбужденных E- и H-мод от χ.

энергии, даваемых квадратами амплитуд E_{1m} и H_{1m}, приобретает вид прямоугольного треугольника, лежащего на катете с длиной $\rho\alpha$ (рис. 2). Видно, что плотность энергии, приходящаяся на единицу длины МК, при больших значениях параметра $\rho\alpha$ распределена между волнами E- и H-типов почти одинаково. Отметим также, что при $\alpha \ll 1$ скорости переноса мало отличаются от c, так что графики парциальных плотностей энергии подобны графикам соответствующих интенсивностей.

2.2. Проверка полноты базиса

В нашем случае полнота системы функций дает

$$\int E_x^2 dS = \sum_m (A_{1m}^E)^2 + (A_{1m}^H)^2. \qquad (13)$$

После сокращения общего множителя $(E_0 R_i)^2$ левая часть уравнения становится равной [20]

$$\int E_x^2 dS = 2\pi \int_0^1 J_1^2(\rho\alpha x)\frac{dx}{x} = \pi[1 - J_0^2(\rho\alpha) - J_1^2(\rho\alpha)] \qquad (14)$$

и ее асимптотическое поведение как при больших, так и при малых значениях параметра $\rho\alpha$ может быть легко найдено. Компьютерные расчеты обеих частей (13) не выявили разницы между ними, но дали возможность определить относительные вклады от мод различных типов. Так, они показывают, что при $\rho = 500$ и $\alpha = 0.1$, бегущие волны обеспечивают 99.85 % вклад в сумму (13), из которого 99.6 % приходится на АСВМ-разрешенные моды, а на эванесцентные моды приходится лишь 0.15 % плотности энергии.

Как показали наши расчеты, уменьшение численной апертуры (при фиксированном большом параметре ρ) приводит к ослаблению вклада E_{1m}-мод в плотность энергии и к возрастанию относительной роли H_{1m}-волн. Однако если параметр отсечки $\rho\alpha$ достаточно велик ($\rho\alpha \gtrsim 5$), то вклады как АСВМ-запрещенных, так и эванесцентных мод в правую часть уравнения (13) остаются весьма малыми. Поскольку многомодовый режим наиболее практичен для целей КР, то можно заключить, что эванесцентные моды в формировании сигнала рассеяния не играют заметной роли.

Тем не менее, их учет с использованием метрики (4) позволяет установить новое свойство корней χ_{1m}^H, для чего следует рассмотреть поведение обоих вкладов в правую часть (13) при малых величинах $\rho\alpha$. Согласно формуле (14) левая часть уравнения (13) ведет себя как $\pi(\rho\alpha/2)^2$. Расчет амплитуд (разд. 2.1) показывает что вклад E_{1m}-волн убывает быстрее, чем квадрат $\rho\alpha$, а зависимость $\Omega(\rho\alpha, \chi_{1m}^H)$ от $\rho\alpha$ линейна с коэффициентами пропорциональности, находимыми из свойств функций Бесселя. Используя равенство $J_2(\chi_{1m}^H$, следующее из (8), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}(A_{1m}^H)^2 \approx 2\pi(\frac{\rho\alpha}{2})^2 \times \sum_{m=1}^{\infty}[J_1^2(\chi_{1m}^H) - J_2^2(\chi_{1m}^H)]^{-1}[J_1(\chi_{1m}^H)/\chi_{1m}^H]^2 = 2\pi(\frac{\rho\alpha}{2})^2 \sum_{m=1}^{\infty}[(\chi_{1m}^H)^2 - 1]^{-1}. \qquad (15)$$

Приравнивая коэффициенты при $(\rho\alpha)^2$ в обеих частях уравнения (13), заключаем, что корни x_m функции $J_1'(x)$ должны удовлетворять равенству

$$\sum_{m=1}^{\infty}(x_m^2 - 1)^{-1} = 1/2, \qquad (16)$$

которое было проверено компьютерным расчетом.

3. Потери в круглом металлическом капилляре

3.1. Коэффициенты затухания

Экспоненциальное затухание E- и H- амплитуд с расстоянием L характеризуется коэффициентами затухания $\eta_{nm}^{E/H}$ [16]:

$$\eta_{nm}^E = \frac{\omega\xi'}{cak_z} = \frac{\xi'}{a\sqrt{1 - (\chi_{nm}^E/\rho)^2}}, \qquad (17)$$

$$\eta_{nm}^H = \frac{\xi'}{a\sqrt{1 - (\chi_{nm}^H/\rho)^2}}[(\chi_{nm}^H/\rho)^2 + \frac{n^2}{(\chi_{nm}^H)^2 - n^2}], \qquad (18)$$

пропорциональными поверхностному импедансу металла ξ' [16], определяющему потери на стенках. Как было сказано, радикалы в уравнениях (17), (18) в большинстве практических случаев мало отличаются от единицы.

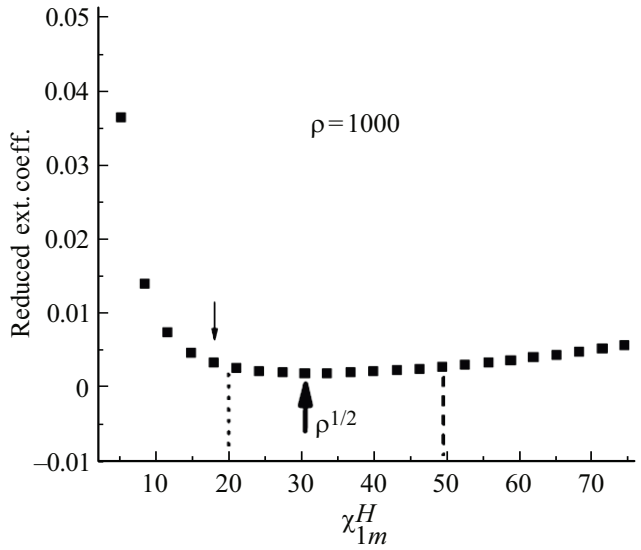


Рис. 3. Пример, иллюстрирующий расчет минимального значения приведенного коэффициента затухания H_{1m}-мод при $\rho = 1000$ (см. текст) для двух значений численных апертур $\alpha = 0.05$ (случай I, штриховая линия) и $\alpha = 0.02$ (случай II, точечная линия). Оптимальные значения χ^H_{1m} отмечены толстой (I) и тонкой (II) стрелками.

По этой причине все E_{1m}-моды имеют коэффициенты затухания $\eta^E_{1m} \approx \xi'/a \equiv \eta^E$, мало отличающиеся друг от друга, в то время как для H_{1m}-волн отношение

$$\tilde{\eta}^H_{1m} \equiv \eta^H_{1m}/\eta^E \approx (\chi^H_{1m}/\rho)^2 + \frac{1}{(\chi^H_{1m})^2 - 1}], \qquad (19)$$

за исключением лишь случая, когда χ^H_{1m} сравнимо с единицей, весьма мало. Следовательно, большая часть H_{1m}-волн может распространяться вдоль капилляра на расстояния большие, чем волны E_{1m}. Пренебрегая первым слагаемым в формуле (19) (которое заведомо меньше α^2), видим, что H_{11}-волна, для которой $\chi^H_{11} \approx 1.83$, имеет наибольшой коэффициент потерь $\eta^H_{11} = 0.43\eta^E$, в то время, как для волны $m = 2$ этот коэффициент меньше на порядок ($\eta^H_{12} = 0.04\eta^E$).

Зависимость $\tilde{\eta}^H_{1m}$ от χ^H_{1m} (рис. 3) определяется конкуренцией двух слагаемых (19), первое из которых с увеличением χ^H_{1m} растет, а второе падает. Характеристики этой зависимости легко оценить, рассматривая χ^H_{1m} как непрерывную переменную. Минимум функции (19)

$$\tilde{\eta}^H_{1m\min} \approx 2/\rho \qquad (20)$$

формально соотвествует $(\chi^H_{1m})_{\min} \approx \sqrt{\rho}$. С практической точки зрения это имеет место, когда $(\chi^H_{1m})_{\min}$ меньше параметра АСВМ $\rho\alpha$ (случай I, для которого $\alpha > \rho^{-1/2}$).

Когда $\alpha < \rho^{-1/2}$ (случай II, который может быть реализован либо для очень узких МК, либо используя малые апертуры) минимум функции (19) достигается в области Н-волн, практически не участвующих в переносе энергии. Поэтому физически значимые величины $\tilde{\eta}^H_{1m\min}$ соответствуют границе АСВМ:

$$\tilde{\eta}^H_{1m\min} \approx \alpha^2 + (\rho\alpha)^{-2}. \qquad (21)$$

Разумеется, это значение больше вычисленного по формуле (20), исключая лишь случай $\alpha = \rho^{-1/2}$, когда обе оценки совпадают.

3.2. Поверхностный импеданс

Когда магнитная проницаемость равна единице, поверхностный импеданс ξ' [16] может быть найден через показатель преломления n_ω и коэффициент экстинкции κ:

$$\xi' = Re\varepsilon^{-1/2} = n_\omega^{-1} Re(1 + i\kappa)^{-1} = \frac{n_\omega}{n_\omega^2 + (n_\omega\kappa)^2}. \qquad (22)$$

Рассматривая серебро (Ag) как оптимальный для наших целей металл, для которого уточненные значения компонент комплексной диэлектрической постоянной $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ равны [21]: $\varepsilon_1 = -9.64; \varepsilon_2 = 0.32$ (для $\lambda \approx 0.5\,\mu$m). Поскольку отношение $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ мало, оптические константы можно найти по формулам

$$\kappa \approx -2\varepsilon_1/\varepsilon_2, n \approx \frac{1}{2}\varepsilon_2/\sqrt{-\varepsilon_1}, \qquad (23)$$

дающим $\kappa = 60.3, n = 0.052$ и $\xi' = 0.0053$; последняя величина разумно согласуется с $\xi' = 0.0045$, вычисленной в работе [22]. Оба значения импеданса примерно в три раза меньше величины $\xi' = 0.017$, найденной из более старых данных из книги [19]; по-видимому, это расхождение отражает факт высокой чувствительности результатов измерений к качеству поверхности металла. Из-за этого наши результаты, найденные для идеальной поверхности, следует рассматривать как верхнюю оценку возможной длины МК.

3.3. Численные примеры

Из уравнения (17) следует, что амплитуды всех E-волн убывают в e раз при $L_{cr} = a/\xi'$. Используя усредненное значение $\xi'_{Ag} = 0.005$ [21,22], получим $L_{cr} \approx 200a$. Интенсивности пропорциональны квадратам амплитуд и затухают в два раза быстрее. Так, например, серебряный МК с $a = 1$ mm относительно прозрачен для E-волн для L меньших 100 mm. Поскольку входная интенсивность (для относительно толстых МК) делится между E- и H-волнами практически поровну, то в таком капилляре интенсивность света быстро затухнет наполовину на длинах порядка 100 mm.

Остающаяся интенсивность относится к H-волнам, которые могут распространяться на гораздо большие расстояния. Рассмотрим измерения с фиксированным ρ, т.е. при заданных частоте ω и радиусе капилляра a, и выберем оптимальное значение апертуры $\alpha_{cr} = \rho^{-1/2}$. Более конкретно при $\lambda \approx 0.5893\,\mu$m и $a = 1$ mm имеем $\rho = 2\pi \times 10^3/0.5893 = 10662$, что

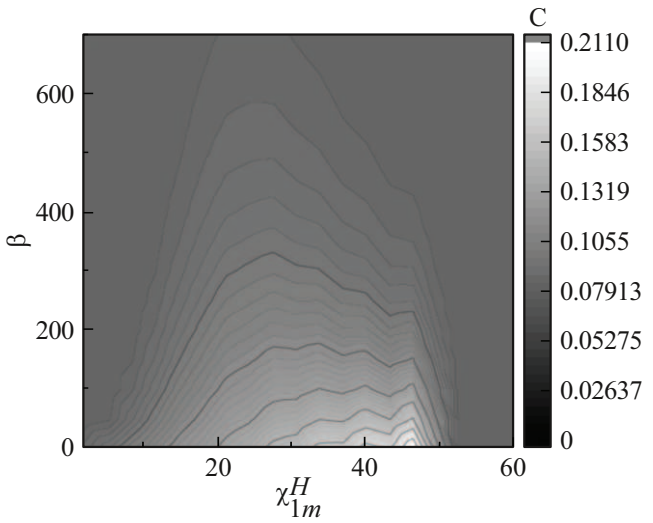


Рис. 4. Контурные изображения поверхности пропускания как функции χ^H_{1m} и приведенной длины β; ρ=500, $\rho\alpha$ =50.

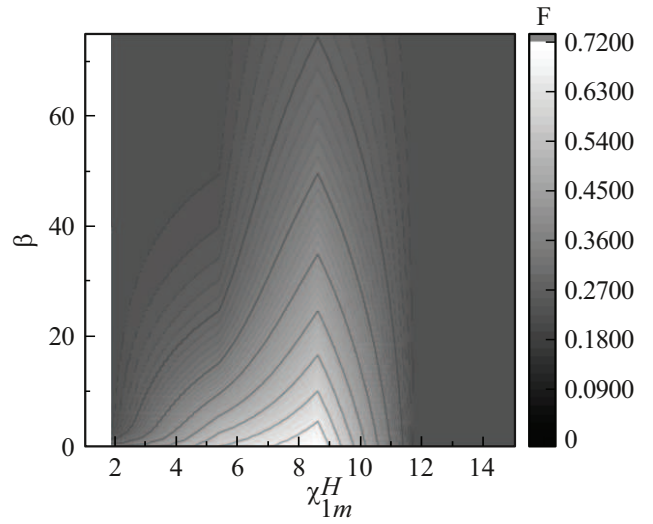


Рис. 5. Контурные изображения поверхности пропускания как функции χ^H_{1m} и приведенной длины β; ρ=1000, $\rho\alpha$ =10.

дает $\alpha_{cr} = 0.0103$. Таким образом, для лазерного луча с радиусом $R_i = 2$ mm оптимальная фокусная длина равна $f = 2/0.0103 = 194$ mm. Поскольку $\rho \sim a$, то $\alpha_{cr} \sim a^{-1/2}$, и для более тонкого МК с $a = 0.5$ mm получим $f = 137$ mm.

Корни производной функции Бесселя $J'_1(x)$ примерно эквидистантны и для больших m имеем $\chi^H_{1m} \approx \pi(2m-1)/2$; отсюда находим, что H_{1m}-амплитуды обрываются на $m_{cr} = \rho\alpha/\pi + 0.5$. Взяв для примера случай $a = 0.1$ mm и $\lambda = 0.5893\,\mu$m, получим $\rho = 1066$, $\sqrt{\rho} = 33$ и, если используется апертура $\alpha = 0.1$, то параметр $\rho\alpha$ оказывается большим, чем $\rho^{-1/2} = 1/30$ (случай I) и значение $\tilde{\eta}_H(1,m)_{\min} = 2/\rho \approx 530$ достигается при $\chi^H_{1m} = \sqrt{\rho}$, т.е. при $m \approx 11$, которое меньше критического $m_{cr} = 106.6/\pi + 0.5 = 34$. Это показывает, что наименее ослабляемая H_{1m}-волна с $m = 11$ может распространяться на дистанцию в 530 раз длиннее, чем E-волны. Последние имеют эффективную длину распространения $L^E(\mathrm{Ag}) \approx 100a = 10$ mm, а значит $H_{1,11}$-волна может пройти в серебряном МК радиуса 0.1 mm около 5 m. Если α уменьшается до $\rho^{-1/2} = 1/30$, то $\eta_H(1,m)_{\min}$ остается неизменным, но при меньших апертурах (случай II) потери начинают расти согласно уравнению (21), а номер моды $m_{\min} \approx \rho\alpha/\pi + 0.5$ с наименьшим поглощением уменьшается.

4. Затухание интенсивности

Для практических целей нужно оценить мощность P, вводимую в МК, по отношению к полной мощности P_0 падающего луча. Отношение $\mathcal{R}_0 \equiv P/P_0$ может быть найдено, используя уравнение (5):

$$\mathcal{R}_0 = \int_0^a J_1^2(kr\alpha)r^{-1}dr \Big/ \int_0^\infty J_1^2(kr\alpha)r^{-1}dr$$
$$= 1 - J_0^2(\rho\alpha) - J_1^2(\rho\alpha) \qquad (24)$$

и свойства функций Бесселя [20], откуда получим, что $\mathcal{R}_0$ при $\rho\alpha \gg 1$ близко к единице, но в противоположном пределе ($\rho\alpha \ll 1$) захватывается лишь часть дифракционного пятна и $\mathcal{R}_0$ падает до $(\rho\alpha)^2/4$.

Простая структура η^H_{nm} позволяет представить пропускание в достаточно общем виде, пригодном для произвольного МК, введя приведенную длину $\beta = \xi' L/a$. В случае $\rho\alpha \gg 1$ мощность P^H_{1m} моды H_{1m} по отношению к мощности пучка $P_0 = (E_0 R_i)^2 c/4\pi$

$$\mathcal{R}^H_{1m} = P^H_{1m}/P_0 = (\tilde{A}^H_{1m})^2 \exp[-2\beta\tilde{\eta}^H_{1m}] \qquad (25)$$

есть функция χ^H_{1m} и β и параметрически зависит от α и ρ; $\tilde{A}^H_{1m} \equiv A^H_{1m}/E_0 R_i$. Контурные графики $\mathcal{R}^H_{1m}(\chi^H_{1m}, \beta)$ представлены на рис. 4 и 5. Из рис. 2 и 4 (случай I: $\rho = 500, \rho\alpha = 50$) видим, что вблизи входного отверстия МК (т.е. при малых β) интенсивность максимальна при значении χ^H_{1m}, которое является ближайшим слева от границы срыва возбуждения $\rho\alpha$ (рис. 2). По мере увеличения β интенсивность падает, но ее изначально асимметричное поведение по отношению к χ^H_{1m} постепенно сглаживается, а максимум движется к меньшим χ, приближаясь к положению моды $\chi^H_{1m} = \sqrt{\rho} \approx 22$ с минимальным поглощением. Случай II ($\rho = 1000$, $\rho\alpha = 10$) представлен на рис. 5, показывающем, что максимум интенсивности остается вблизи границы отсечки для любой длины пробега.

Хотя все парциальные интенсивности экспоненциально затухают с расстоянием с существенно разными скоростями, интенсивность $\mathcal{R}^H(\beta)$, просуммированная по парциальным вкладам $\mathcal{R}^H_{1m}$, убывает в многомодовом режиме практически моноэкспоненциально, что видно на графике рис. 6, рассчитанном при $\rho = 500$ и $\alpha = 0.1$. При этих параметрах $\mathcal{R}^H(\beta)$ затухает в e раз при

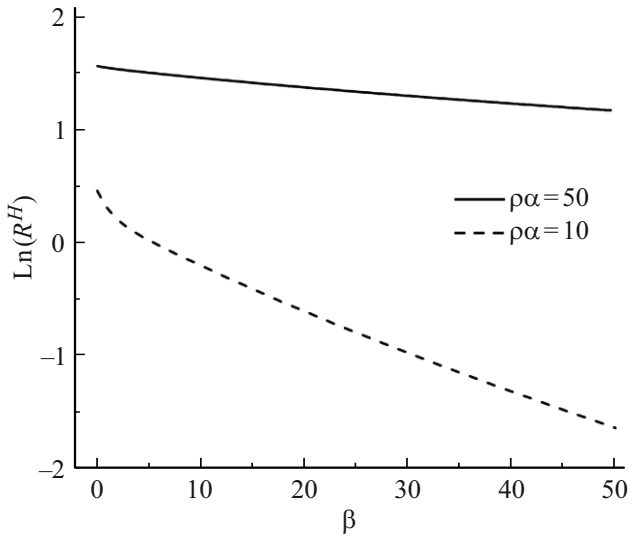


Рис. 6. Полное пропускание как функция приведенного расстояния (см. текст) для разных значения параметра $\rho\alpha$.

$\beta = \beta_0 \approx 90$. Следовательно, пригодная длина МК L равна $a\beta_0/\xi'$ и составляет для серебрянного капилляра с $a = 0.1\,\text{mm} \approx 180$ cm. Если радиус МК a увеличен, а апертура уменьшена, но так, что значение $\rho\alpha$ =50 не изменилось, то L меняется практически как a и, используя более толстые МК, можно пропорционально увеличить как оптический путь, так и отклик КР. Так, при радиусе $a = 1\,\text{mm}$ и $\alpha = 0.01$ допустимо использовать серебряный МК с $L \approx 18\,\text{m}$.

Для умеренных значений $\rho\alpha$ коэффициенты ослабления возрастают, $\mathcal{R}^H(\beta)$ уменьшается (рис. 6), а ее падение с длиной становится не моноэкспоненциальным. При дальнейшем уменьшении $\rho\alpha$ потери увеличиваются еще сильнее, что вдобавок сопровождается понижением эффективности ввода мощности в МК (24); такой режим непрактичен.

5. Заключение

Показано, что прямая фокусировка монохроматического луча на центр входного отверстия полого круглого МК приводит почти исключительно к возбуждению собственных волн E_{1m} и H_{1m}. При этом возникает интересное явление — срыв возбуждения мод, чьи собственные значения превышают параметр $\alpha\omega/c$, где α есть отношение радиуса луча к фокусной длине линзы (численная апертура). Это дает возможность кардинального снижения числа бегущих волн, участвующих в переносе энергии. Теория показывает, что H_{1m}-волны распространяются в капилляре на гораздо большие расстояния, чем волны E_{1m}, причем коэффициенты потерь у первых имеют сильную зависимость от номера моды m. Построенные графики пропускания как интегрального, так и характеризующего отдельные моды, позволяют выявить оптимальные условия для увеличения оптического пути, проходимого светом без сильных потерь. Для света с $\lambda = 0.5\,\mu$m этот путь в серебряных капиллярах может достигать порядка 10 m. По сравнению со стандартной (free-space) схемой, использующей сбор рассеянного света из каустики лазерного луча, кардинальное увеличение объема взаимодействия света с веществом, находящегося внутри МК, может дать огромный, до трех десятичных порядков, выигрыш в сигнале КР. Основным препятствием в его достижении является трудность контроля качества внутренней поверхности МК. Начато исследование прямоугольного металлического световода, конструкцию которого можно сделать разборной и допускающей контроль внутренней поверхности.

Финансирование работы

Данная работа была выполнена по проекту 24-23-00194 Российского научного фонда.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Приложение

Приложение A

Используя модифицированную метрику (4), получим

$$e^E_{xnm} = i(n^E_{nm})^{-1}\frac{\partial E_{znm}}{\partial x},\ e^E_{ynm} = i(n^E_{nm})^{-1}\frac{\partial E_{znm}}{\partial y}, \quad (\text{П1})$$

$$h^E_{xnm} = -i(n^E_{nm})^{-1}\frac{\partial E_{znm}}{\partial y},\ h^E_{ynm} = i(n^E_{nm})^{-1}\frac{\partial E_{znm}}{\partial x}, \quad (\text{П2})$$

$$e^H_{xnm} = i(n^H_{nm})^{-1}\frac{\partial H_{znm}}{\partial x},\ e^H_{ynm} = i(n^H_{nm})^{-1}\frac{\partial H_{znm}}{\partial y}, \quad (\text{П3})$$

$$h^H_{xnm} = -i(n^H_{nm})^{-1}\frac{\partial H_{znm}}{\partial y},\ h^H_{ynm} = i(n^H_{nm})^{-1}\ \frac{\partial H_{znm}}{\partial x}, \quad (\text{П4})$$

где E_{znm} и H_{znm} даются уравнениями (1) и

$$(n^H_{nm})^2 = \frac{\pi(1+\delta_{n0})}{2}[J^2_n(\chi^H_{nm}) - J^2_{n+1}(\chi^H_{nm})], \quad (\text{П5})$$

$$(n^E_{nm})^2 = \frac{\pi(1+\delta_{n0})}{2}J^2_{n-1}(\chi^E_{nm}). \quad (\text{П6})$$

Приложение B

С помощью формулы

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - n\pi/2 - \pi/4) \quad (\text{П7})$$

получаем асимптотическое выражение

$$\Omega_2 = \int_1^\infty J_1(\rho\alpha x) J_0(x\chi_{1m}^E) dx$$
$$\approx \frac{2}{\pi\sqrt{\rho\alpha\chi_{1m}^E}} \int_1^\infty \frac{\sin(\rho\alpha x - \pi/4)\cos(\chi_{1m}^E x - \pi/4)}{x} dx$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\rho\alpha\chi_{1m}^E}} \{\pi/2 - Si(|\rho\alpha - \chi_{1m}^E|) + Ci(\rho\alpha + \chi_{1m}^E)\}, \quad (П8)$$

в котором при больших $\rho\alpha$ вкладом интегрального косинуса можно пренебречь, что приводит нас к уравнению (12).

Список литературы

[1] V.V. Vitkin, A.P. Kouzov, N.N. Filippov, E.E. Popov, I.K. Chubchenko. In: *Proc. of the Int. Conf. Laser Optics* (Saint Petersburg, Russian Federation, 2024), p. 305. DOI: 10.1109/ICLO59702.2024.10624059

[2] G.E. Walrafen, J. Stone. Appl. Spectrosc., **26**, 585 (1972).

[3] P. Russell. Science, **299**, 358 (2003). DOI: 10.1126/science.1079280

[4] A.D. Pryamikov, A.V. Gladyshev, A.F. Kosolapov, I.A. Bufetov. Physics - Uspekhi, **67**, 129156 (2024). DOI: 10.3367/UFNe.2023.12.039616

[5] M.P. Buric, K.P. Chen, J. Falk, S.D. Woodruff. Appl. Opt., **47**, 4255 (2008). DOI: 10.1364/AO.47.004255

[6] W.F. Pearman, J.C. Carter, S.M. Angel, J. Chan Wai-Jeung. Appl. Spectrosc., **62**, 285 (2008).

[7] M.P. Buric, K.P. Chen, J. Falk, R. Velez, S.D. Woodruff. Proc. SPIE, **7316**, 731608 (2009). DOI: 10.1117/12.818746

[8] S. Rupp, T.M. James, H.H. Telle, M. Schlósser, B. Bornschein. Fusion Sci. Technol., **67**, 547 (2015). DOI: 10.13182/FST14-T76

[9] S. Rupp, A. Off, H. Seitz-Moskaliuk, T.M. James, H.H. Telle. Sensors, **15**, 23110 (2015). DOI: 10.3390/s150923110

[10] E.A.T. Marcatili, R.A. Schmeltzer. Bell Syst. Tech. J., **43**, 1783 (1964).

[11] B. Bowden, J.A. Harrington, O. Mitrofanov. Appl. Phys. Lett., **93**, 181104 (2008). DOI: 10.1063/1.3013585

[12] C.A. Leal-Sevillano, J.A. Ruiz-Cruz, J.R. Montejo-Garai, J.M. Rebolla. IEEE Trans. Microw. Theory Tech., **59**, 3013 (2011).

[13] Y. Kato, M. Miyagi. IEEE Trans. Microw. Theory Tech., **40**, 679 (1992).

[14] F.E. Vermeulen, A.M. Robinson, C.R. James, J.N. McMullin. IEEE Trans. Microw. Theory Tech., **42**, 1932 (1994).

[15] L. Novotny, C. Hafner. Phys Rev. E, **50**, 4094 (1994). DOI: 10.1103/PhysRevE.50.4094

[16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика, т. 8 (Электродинамика сплошных сред)* (Наука, Москва, 1982), гл. 10.

[17] L.B. Felsen, V. Marcuvitz. *Radiation and Scattering of Waves* (Wiley & Sons, Hoboken, 2003).

[18] A.W. Snyder, J.D. Love. *Optical Waveguide Theory* (Chapman and Hall, London, 1983), ch. 11.

[19] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[20] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1945).

[21] S. Babar, J.H. Weaver. Appl. Optics, **54**, 477 (2015). DOI: 10.1364/AO.54.000477

[22] P.B. Johnson, R.W. Christy. Phys. Rev. B, **6**, 4370 (1972). DOI: 10.1103/PhysRevB.6.4370