02

Диссоциация дробных вихрей в тонкопленочных структурах на основе многозонных сверхпроводников

© Н.Д. Лобанов, Д.А. Савинов

Институт физики микроструктур РАН,
Нижний Новгород, Россия

E-mail: ndlobanov@ipmras.ru

Поступила в Редакцию 6 марта 2026 г.
В окончательной редакции 9 марта 2026 г.
Принята к публикации 13 марта 2026 г.

Рассматривается возможность диссоциации одноквантового вихря на дробные за счет пропускания транспортного тока в различных геометриях: пленка произвольной толщины, тонкопленочная периодическая структура сверхпроводник/диэлектрик (стек). Рассчитаны потенциалы взаимодействия двух дробных вихрей. Получены зависимости расстояния между дробными вихрями от тока, когда вихри движутся с одинаковой скоростью, найдены плотности токов диссоциации дробных вихрей j_d в различных геометриях. Проведено сравнение величин j_d для различных параметров сверхпроводящих структур.

Ключевые слова: многозонная сверхпроводимость, тонкие пленки, стек, дробные вихри, токи диссоциации вихрей.

DOI: 10.61011/FTT.2026.07.63643.19HH

1. Введение

Многозонная сверхпроводимость реализуется в различных соединениях, таких как MgB_2 [1] и в сверхпроводниках на основе железа [2]. В данных материалах имеется несколько поверхностей Ферми, в каждой из которых существует своя щель в спектре элементарных возбуждений. В многозонных сверхпроводниках были предсказаны уникальные явления, которые не имеют аналога в обычных сверхпроводниках [3–12]. За счет наличия нескольких параметров порядка, в системе возможно появление дробных вихрей, каждый из которых возникает в своем конденсате. Известно, что энергия взаимодействия дробных вихрей разных конденсатов логарифмически растет с увеличением межвихревого расстояния $U \sim \ln(r)$, поэтому дробные вихри в системе всегда притягиваются [13]. В основном состоянии дробные вихри образуют составной вихрь, который несет квант потока Φ_0. Некоторые механизмы наблюдения смешанного состояния с дробными вихрями были предложены в следующих работах: [13] — появление дробного вихря вблизи границы объемного сверхпроводника, [14] — диссоциация одноквантового вихря на дробные в объемном сверхпроводнике за счет пропускания транспортного тока, который создает силу Лоренца, действующую на вихрь. При малом токе сила Лоренца может быть скомпенсирована межзонным притяжением между вихрями в различных конденсатах. Однако при большом токе притяжение может быть недостаточным для компенсации силы Лоренца, поэтому происходит диссоциация, т.е. вихри в разных конденсатах движутся с разными скоростями. Ток, при котором происходит расщепление одноквантового вихря, называется током диссоциации.

В нашей работе мы рассматриваем диссоциацию дробных вихрей в тонкопленочных сверхпроводящих структурах. Важность и интерес нахождения токов диссоциации в таких геометриях заключается в том, что экспериментальными образцами являются именно пленки конечной толщины, а также сверхпроводящие структуры с сильной анизотропией. В столь анизотропных структурах взаимодействие вихрей можно описывать теоретически, моделируя образец в виде набора плоскопараллельных слоев сверхпроводник/диэлектрик, часто называемого стеком. Поэтому проведенный анализ предложенных в нашей работе тонкопленочных геометрий является актуальным с точки зрения проведения прямого эксперимента.

Заметим, что возникновение дробных вихрей в тонких пленках многозонных сверхпроводников возможно также за счет тепловых флуктуаций [15–17]. В частности, в работах [15,16] частично рассмотрены особенности перехода Березинского-Костерлица-Таулеса (БКТ), связанного с возникновением плазмы дробных вихрей вблизи критической температуры T_c. В работе [17] исследована возможность термической диссоциации одноквантовых вихрей на дробные при превышении некоторой характерной температуры T_{BKT}. В рамках настоящей работы мы будем предполагать, что данные эффекты пренебрежимо малы, что может быть достигнуто при температурах $T < T_{\text{BKT}}$. Заметим, что характерные температуры переходов БКТ находятся в непосредственной близости к T_c. Поэтому при рассмотрении диапазона температур $T < T_{\text{BKT}}$, условие $|T - T_c| \ll T_c$ не нарушается, что подтверждает справедливость применения модели Лондонов, которую мы используем для расчетов.

2. Теоретическая модель. Объемный сверхпроводник

Рассмотрим функционал свободной энергии Лондонов для двухзонных сверхпроводников [13]:

$$F = \int dV \Big(\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{8\pi\lambda_i^2} \Big(\mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta_i \Big)^2 + \frac{1}{8\pi} (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2 + \gamma \cos(\theta_1 - \theta_2) \Big), \quad (1)$$

где $\lambda_i = \sqrt{\frac{m_i c^2}{4\pi n_i e^2}}$ — лондоновская длина для каждого конденсата с концентрацией сверхпроводящих электронов n_i и эффективной массой одного сверхпроводящего электрона m_i. Здесь $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, θ_i — фаза параметра порядка i-го сверхпроводящего конденсата, γ — константа связи джозефсоновского взаимодействия между конденсатами. Функционал свободной энергии можно преобразовать к виду:

$$F = \int dV \Big(\frac{1}{8\pi} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{8\pi} \lambda^2 (\mathrm{rot}\,\mathbf{B})^2 + \frac{\Phi_1\Phi_2}{32\pi^3\lambda^2} \big[\nabla(\theta_1 - \theta_2)\big]^2 + \gamma \cos(\theta_1 - \theta_2) \Big), \quad (2)$$

где $\lambda^{-2} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2}$. Выражение (2) можно разбить на три слагаемых:

$$F_m = \frac{1}{8\pi} \int dV \Big(\mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\mathrm{rot}\,\mathbf{B})^2 \Big), \quad (3)$$

$$F_{nc} = \frac{\Phi_1\Phi_2}{32\pi^3\lambda^2} \int dV \big[\nabla(\theta_1 - \theta_2)\big]^2, \quad (4)$$

$$F_{js} = \gamma \int dV \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (5)$$

Первое слагаемое (3) представляет собой сумму полной магнитной энергии и кинетической энергии сверхпроводящего тока, второе слагаемое (4) учитывает энергию взаимодействия, обусловленную разностью фаз конденсатов, третье слагаемое (5) — джозефсоновская связь. В дальнейшем мы считаем $\gamma = 0$.

Рассмотрим взаимодействие двух дробных вихрей Φ_1 и Φ_2. Дробные вихри — это вихри, которые несут магнитный поток, меньший кванта потока Φ_0. Значения магнитного потока дробных вихрей связаны с Φ_0 через соотношение $\Phi_{1,2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_{1,2}^2} \Phi_0$, где $\lambda^{-2} = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2}$. При этом циркуляция градиентов фазы параметров порядка в обоих конденсатах $\oint \nabla\theta_{1,2} dl = 2\pi$. Энергию взаимодействия (3) для пары дробных вихрей можно получить, используя уравнение Лондонов, которое соответствует условию равенства нулю первой вариации (1) по векторному потенциалу:

$$\mathbf{B} + \lambda^2 \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 \Phi_1 \delta(x) + \mathbf{z}_0 \Phi_2 \delta(x - R). \quad (6)$$

Далее, интегрируя выражения (3) и (4), получим полную энергию пары дробных вихрей в объемном сверхпроводнике:

$$F = D \left(f_1 + f_2 + \frac{\Phi_1\Phi_2}{8\pi^2\lambda^2} \left(K_0\Big(\frac{R}{\lambda}\Big) + \ln\Big(\frac{R}{\sqrt{\xi_1\xi_2}}\Big) \right) \right), \quad (7)$$

где

$$f_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}^2}{16\pi^2\lambda^2} \ln\Big(\frac{\lambda}{\xi_{1,2}}\Big)$$

— собственная энергия дробных вихрей на единицу длины, D — аксиальный размер объемного сверхпроводника (направленный вдоль оси вихря), R — межвихревое расстояние. В силу наличия логарифмического слагаемого в (7) дробные вихри притягиваются, и энергия достигает минимума при $R = 0$. Таким образом, магнитное поле проникает в многозонный сверхпроводник в виде вихрей, несущих квант потока Φ_0.

Одним из возможных способов диссоциации дробных вихрей является пропускание через образец транспортного тока [14]. На дробные вихри будет действовать сила Лоренца $\mathbf{F}_i = \frac{1}{c}[\mathbf{j}_i \times \mathbf{\Phi}_i]$, за счет которой возможно расщепление одноквантовых вихрей на дробные, где $\mathbf{j}_{1,2} = -\frac{c}{4\pi\lambda_{1,2}^2} \mathbf{A}$ — компоненты транспортного тока в соответствующем конденсате. Под действием силы Лоренца вихри должны начать перемещаться, но этому перемещению препятствует вязкая сила, которая пропорциональна скорости $\mathbf{F}_i = -\eta_i \boldsymbol{\upsilon}_i$. Уравнения движения для двух дробных вихрей Φ_1 и Φ_2 выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \eta_1 \boldsymbol{\upsilon}_1 = \frac{1}{c}[\mathbf{j}_1 \times \Phi_1 \mathbf{z}_0] + \nabla_{x_1} U_{\mathrm{int}} \\ \eta_2 \boldsymbol{\upsilon}_2 = \frac{1}{c}[\mathbf{j}_2 \times \Phi_2 \mathbf{z}_0] + \nabla_{x_2} U_{\mathrm{int}} \end{cases}, \quad (8)$$

где U_{int} — энергия взаимодействия вихрей, $x_{1,2}$ — координаты вихрей $\Phi_{1,2}$, $\eta_{1,2}$ — коэффициент вязкости, $\nabla_{x_1} U_{\mathrm{int}} = -\nabla_{x_2} U_{\mathrm{int}}$. Поскольку движение вихрей является одномерным и направлено вдоль силы Лоренца, вектора в дальнейшем могут быть опущены. Для нахождения плотности тока диссоциации следует найти максимально возможное значение плотности транспортного тока j, при котором вихри будут двигаться с равными скоростями. Приравняв скорости дробных вихрей $\upsilon_1 = \upsilon_2$ и произведя замену переменных $R = x_1 - x_2$, получим:

$$A = \frac{\frac{\eta_1 \partial U_{\mathrm{int}}}{\eta_2 \partial R} + \frac{\partial U_{\mathrm{int}}}{\partial R}}{\frac{\Phi_1}{4\pi\lambda_1^2} - \frac{\eta_1 \Phi_2}{\eta_2 4\pi\lambda_2^2}}, \quad (9)$$

Формула (9) описывает зависимость расстояния между дробными вихрями от векторного потенциала, когда вихри движутся с одинаковой скоростью. Из выражения (9) легко получаем формулу для соответствующей плотности транспортного тока:

$$j = \frac{c}{\lambda^2} \frac{\frac{\eta_1 \partial U_{\mathrm{int}}}{\eta_2 \partial R} + \frac{\partial U_{\mathrm{int}}}{\partial R}}{\frac{\Phi_1}{\lambda_1^2} - \frac{\eta_1 \Phi_2}{\eta_2 \lambda_2^2}}. \quad (10)$$

Найдем условие экстремальности выражения (10):

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial R}+\frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial R}\right)=0. \tag{11}$$

Из (11) мы находим экстремальную точку R^*, и получаем ток диссоциации:

$$j_d = j(R^*). \tag{12}$$

3. Сверхпроводящая пленка произвольной толщины

Как известно, вихри проникают в сверхпроводник в виде решетки, и необходимо учитывать различные межвихревые взаимодействия при рассмотрении динамики отдельных вихрей. Это особенно важно для достаточно сильных внешних магнитных полей H, когда вихревая решетка очень плотная и имеет достаточно малый период a: $a \ll \lambda^2/D$ — для тонкой пленки с толщиной $D \ll \lambda$ и $a \ll \lambda$ — для пленки с толщиной $D > \lambda$ или для объемного сверхпроводника. В нашей работе мы рассмотрели случай разреженной вихревой решетки, когда значение внешнего поля $H < \Phi_0 D^2/\lambda^4$ для тонкой пленки и $H < \Phi_0/\lambda^2$ для пленки конечной толщины (или объемного сверхпроводника). Ввиду данного ограничения мы изучили возможность диссоциации одноквантовых вихрей, рассматривая их изолированными.

По сравнению с объемным сверхпроводником, энергия взаимодействия вихрей в пленках содержит дополнительный дальнодействующий вклад, связанный с полями рассеяния. Этот вклад имеет характер отталкивания и поэтому может приводить к уменьшению тока диссоциации. Учет полей рассеяния приводит к существенной модификации вклада (3) в полную энергию взаимодействия. Заметим, что выражение для F_m может быть получено точно по той же схеме, что и в случае обычного однозонного сверхпроводника [13], поскольку сам вид функционала полностью совпадает с этим случаем, а уравнение для магнитного поля (уравнение Лондонов) имеет вид (6), который аналогичен рассмотрению двух одноквантовых вихрей в однозонном сверхпроводнике с точностью до замен: $\Phi_1 \to \Phi_0$ и $\Phi_2 \to \Phi_0$. С учетом данных замен для расчета энергии взаимодействия дробных вихрей в пленках конечной толщины мы используем подход, предложенный в работе [18]. Уравнения для магнитных полей внутри и вне пленки даются следующими выражениями:

$$\Delta \mathbf{B}^{\text{film}} + \lambda^2 \mathbf{B}^{\text{film}} = \mathbf{z}_0 \Phi_1 \delta(x) + \mathbf{z}_0 \Phi_2 \delta(x-R), \tag{13}$$

$$\mathbf{B}^{\text{vac}} = -\nabla\varphi, \tag{14}$$

$$\Delta\varphi = 0, \tag{15}$$

где $\mathbf{B}^{\text{film}}$ — магнитное поле внутри пленки, $\mathbf{B}^{\text{vac}}$ — магнитное поле вне пленки, φ — скалярный потенциал поля $\mathbf{B}^{\text{vac}}$. В результате получаются интегральные выражения

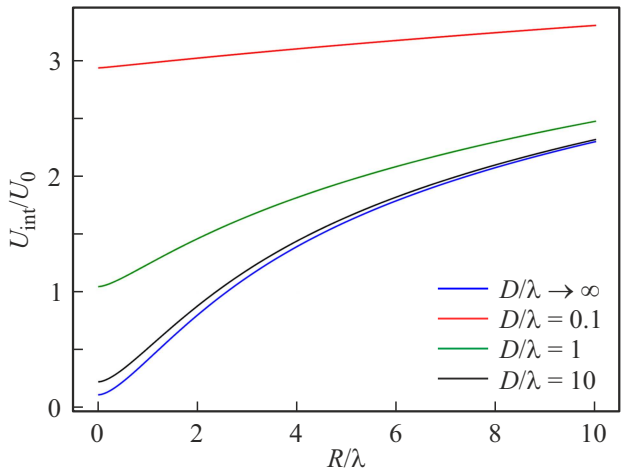


Рис. 1. Зависимость потенциала взаимодействия дробных вихрей в пленке конечной толщины при различных нормированных толщинах D/λ от межвихревого расстояния R/λ. Потенциал взаимодействия нормирован на величину $U_0 = \dfrac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}$.

для энергии взаимодействия дробных вихрей, которые совпадают с формулами работы [19] с точностью до замен: $\Phi_1 \to \Phi_0$ и $\Phi_2 \to \Phi_0$. Таким образом, для пленки конечной толщины полный вклад в F_m включает в себя собственные энергии дробных вихрей и два слагаемых, описывающих их взаимодействие: энергию взаимодействия в объеме сверхпроводника и энергию взаимодействия, обусловленную полями рассеяния $U_{\text{stray}}(R)$:

$$U_{\text{stray}}(R) = \frac{\Phi_1\Phi_2 D}{16\pi^3\lambda^2}\int d^2q\cos(\mathbf{qR})S(q), \tag{16}$$

$$S(q) = \frac{1}{Dq^2}\left(\frac{2(1-k^2)\{k\sinh L + k^2[\cosh L - 1]\}}{\sqrt{q^2+\lambda^{-2}}\{2k\cosh L + (1+k^2)\sinh L\}}\right), \tag{17}$$

где D — толщина пленки, $k = q/\sqrt{q^2+\lambda^2}$, $L = D\sqrt{q^2+\lambda^{-2}}$. Таким образом, полное выражение для энергии взаимодействия в пленке дается следующей формулой:

$$U_{\text{int}}(R) = \frac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}\left(K_0\left(\frac{R}{\lambda}\right) + \ln\left(\frac{R}{\sqrt{\xi_1\xi_2}}\right)\right) + U_{\text{stray}}(R). \tag{18}$$

Как показали расчеты (см. рис. 1), с уменьшением толщины пленки область межвихревых расстояний, где зависимость $U_{\text{int}}(R)$ становится квазипостоянной, увеличивается. Это должно приводить к уменьшению плотности тока диссоциации. Используя уравнение (10), мы построили зависимость $j(R)$ при различных толщинах пленки (рис. 2).

На участке $j < j_d$ происходит постепенное расщепление одноквантового вихря, далее при $j > j_d$ происходит диссоциация, и вихри двигаются с разными скоростями. Из зависимостей видно, что происходит уменьшение тока диссоциации по сравнению с объемным сверхпровод-

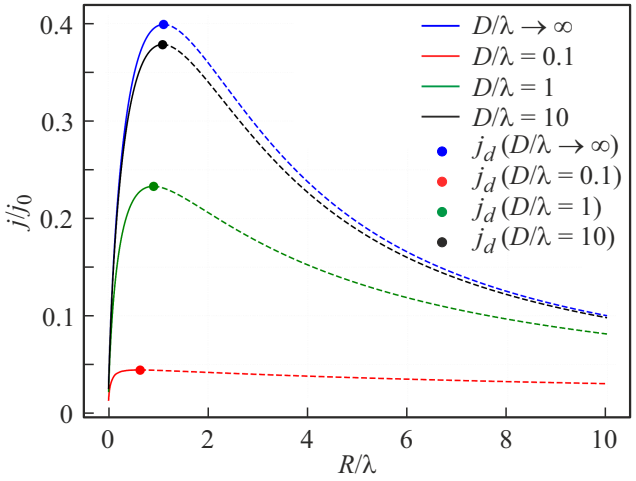


Рис. 2. Зависимость межвихревого расстояния R от транспортного тока j для систем с одинаковой вязкостью $\eta_1 = \eta_2$ и различными значениями толщины D в случае, когда дробные вихри движутся с одинаковой скоростью. Величина j_0 определена формулой: $j_0 = \dfrac{cD}{8\pi^2\lambda^3}\,\dfrac{\Phi_1\Phi_2}{\lambda^2\Phi_1\lambda_1^2 - \lambda^2\Phi_2\lambda_2^2}$. Жирные точки на кривых определяют значения токов диссоциации.

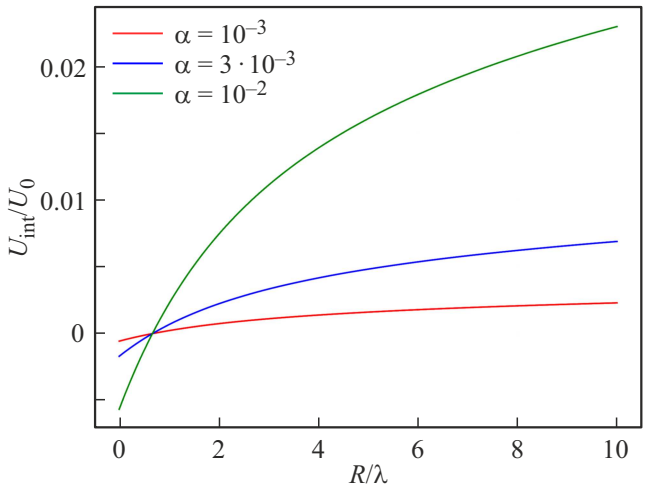


Рис. 4. Зависимость потенциала взаимодействия дробных вихрей в стеке при различных значениях параметра α от межвихревого расстояния R. Потенциал взаимодействия нормирован на величину $U_0 = \dfrac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}$.

ником. Участок зависимости $j(R)$, который соответствует $R > R^*$, обозначенный пунктирной линией, является метастабильным. Он соответствует тому, что дробные вихри на расстояниях $R > R^*$ двигаются с одинаковой скоростью. Это становится возможным при первоначальном пропускании тока $j > j_d$ с последующим его постепенным понижением до значений, меньших j_d.

4. Стек

Стек представляет собой периодическую структуру сверхпроводник/диэлектрик, которая схематично представлена на рис. 3, где D — толщина сверхпроводящих пластин (предполагается $D \ll \lambda$) и s — толщина диэлектрических слоев. Рассмотрим взаимодействие двух изолированных вихрей в разных фазах параметра порядка в центральном сверхпроводящем слое.

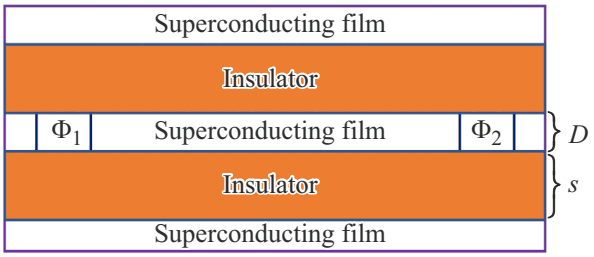


Рис. 3. Изображение стека с дробными панкейками в одном слое. D — толщина сверхпроводящего слоя, s — расстояние между сверхпроводящими слоями.

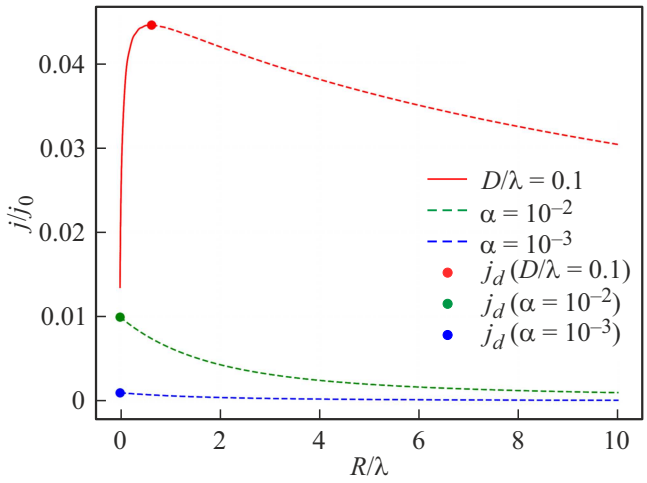


Рис. 5. Зависимость межвихревого расстояния R от транспортного тока j для пленки толщины $D = 0.1\lambda$ и стека с параметрами $\alpha = 10^{-2}$ и 10^{-3} в случае, когда дробные вихри движутся с одинаковой скоростью. Система характеризуется одинаковой вязкостью — $\eta_1 = \eta_2$. Величина j_0 определена формулой: $j_0 = \dfrac{cD}{8\pi^2\lambda^3}\,\dfrac{\Phi_1\Phi_2}{\lambda^2\Phi_1/\lambda_1^2 - \lambda^2\Phi_2/\lambda_2^2}$. Жирные точки на кривых определяют значения токов диссоциации.

Аналогично рассуждениям предыдущего раздела, для анализа энергии взаимодействия дробных вихрей (вклад F_m) мы использовали схему, соответствующую случаю обычного однозонного сверхпроводника. Для данной геометрии подобный расчет был произведен в работе [20]. Выполнив его обобщение, получаем:

$$U_m^{\rm int}(R) = \frac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}\Big(-\ln(R) + \alpha\big(\ln(R) + \Gamma(0, R)\big)\Big), \quad (19)$$

где $\Gamma(0, R)$ — неполная гамма-функция, $\alpha = \frac{s}{2\lambda_\parallel}$, $\lambda_\parallel^{-2} = \lambda^{-2}\frac{D}{s}$. Окончательное выражение для полной энергии взаимодействия дается выражением:

$$U_{\text{int}}(R) = U_m^{\text{int}} + \frac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}\ln(R)$$
$$= \frac{\Phi_1\Phi_2 D}{8\pi^2\lambda^2}\Big(\alpha\big(\ln(R) + \Gamma(0, R)\big)\Big). \qquad (20)$$

Зависимости энергии взаимодействия от межвихревого расстояния при различных параметрах α представлены на рис. 4, из которых следует, что образование дробных панкейков также энергетически невыгодно.

Заметим, что α является малой величиной [20], поэтому можно ожидать существенного снижения тока диссоциации, чем при рассмотрении случая изолированной тонкой пленки. Для некоторых значений α это демонстрируется на рис. 5.

5. Заключение

В настоящей работе проведены исследования диссоциации дробных вихрей для тонких сверхпроводящих пленок различной толщины и стека. Найдены распределения потенциалов взаимодействия дробных вихрей для разных тонкопленочных геометрий. Показано, что дробные вихри притягиваются. Проанализированы зависимости межвихревого расстояния от транспортного тока. Получена формула для нахождения токов диссоциации для рассмотренных систем. Выяснено, что ток диссоциации уменьшается с уменьшением толщины пленки. При этом в геометрии типа стека ток диссоциации оказывается наименьшим среди рассмотренных сверхпроводящих систем.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института прикладной физики Российской академии наук (ИПФ РАН), тема ГЗ: FFUF-2025-0006.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, J. Akimitsu. Nature (London) **410**, 63 (2001).
[2] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, H. Hosono. J. Am. Chem Soc. **130**, 3296 (2008).
[3] A.J. Leggett. Prog. Theor. Phys. **36**, 901 (1966).
[4] Y. Tanaka. Phys. Rev. Lett. **88**, 017002 (2001).
[5] E. Babaev. Phys. Rev. Lett. **89**, 067001 (2002).
[6] A. Gurevich, V.M. Vinokur. Phys. Rev. Lett. **90**, 047004 (2003).
[7] A. Gurevich. Phys. Rev. B **67**, 184515 (2003).
[8] E. Babaev, M. Speight. Phys. Rev. B **72**, 180502 (2005).
[9] E. Smorgrav, J. Smiseth, E. Babaev, A. Sudbo. Phys. Rev. Lett. **94**, 096401 (2005).
[10] A. Gurevich, V.M. Vinokur. Phys. Rev. Lett. **97**, 137003 (2006).
[11] L. Komendova, Y. Chen, A.A. Shanenko, M.V. Milošević, F.M. Peeters. Phys. Rev. Lett. **108**, 207002 (2012).
[12] S.-Z. Lin, X. Hu. Phys. Rev. Lett. **108**, 177005 (2012).
[13] M.A. Silaev. Phys. Rev. B **83**, 144519 (2011).
[14] S.-Z. Lin, L.N. Bulaevskii. Phys. Rev. Lett. **110**, 087003 (2013).
[15] E. Babaev. Nucl. Phys. B **686**, 397–412 (2004).
[16] E. Smorgrav, J. Smiseth, E. Babaev, A. Sudbo. Phys. Rev. Lett. **94**, 096401 (2005).
[17] J. Goryo, S. Soma, H. Matsukawa. Europhys. Lett. **80**, 17002 (2007).
[18] G. Carneiro, E.H. Brandt. Phys. Rev. B **61**, 6370–6376 (2000).
[19] A.V. Samokhvalov, D.A. Savinov, A.S. Mel'nikov, A.I. Buzdin. Phys. Rev. B **82**, 104511 (2010)
[20] J.R. Clem. Phys. Rev. B **43**, *10*, 7837 (1991).

Редактор Ю.Э. Китаев