01

Управление дифференциальными спектрами электронов при ионизации атомов бесселевым излучением

© М.Д. Киселев [1], С.М. Бурков [1], А.Н. Грум-Гржимайло [2]

[1] Лаборатория моделирования квантовых процессов, Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия
[2] Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: kiselevmd@my.msu.ru

Поступила в редакцию 2025 г.
В окончательной редакции 2025 г.
Принята к публикации 2026 г.

Из экспериментов по фотоионизации атомов плосковолновым излучением известно, что резонансы могут проявляться в разрешаемых по углу спектрах отличным, иногда кардинально иным, от интегральных образом. В настоящей работе исследовано, может ли этот эффект проявляться при ионизации закрученным излучением. Анализ проведен на примере частично-дырочного $4s^{-1}4p^6 5p\,[^1P]$ автоионизационного резонанса атома криптона в дифференциальной по углу фотоэмиссии вероятности ионизации. Обнаружено и рассчитано смещение положения резонанса и изменения профильного q-индекса Фано в зависимости от угла наблюдения и параметров закрученности.

Ключевые слова: закрученный свет, бесселево излучение, фотоионизация, резонанс, фотоэлектронный спектр.

DOI: 10.61011/OS.2026.07.63549.8857-26

1. Введение

Одной из основополагающих проблем квантовой механики и квантовой теории рассеяния, восходящей еще к работам Фешбаха, является то, что резонансы в реакциях рассеяния проявляются не при их истинной энергии, а могут быть сдвинуты в результате интерференции [1–3]. В атомной фотоионизации эффект смещения резонансов проявляется как лазерно индуцированная прозрачность или эффект Аутлера-Таунса. Позднее было показано, что любая билинейная комбинация амплитуд, в частности характеризующая угловые распределения, также проявляется в спектрах с положением и шириной, отличающейся от самого резонанса [4].

Исследования фотоэлектронной эмиссии являются одним из фундаментальных методов диагностики квантовых систем, позволяя получать информацию о внутренней структуре атомов, молекул и твердотельных объектов, а также о динамике электронных корреляций. Значительный прогресс в данной области был достигнут благодаря совершенствованию методов регистрации векторных характеристик фотопроцессов — таких как угловые распределения и поляризационные свойства фотоэлектронов, а также различные проявления дихроизма [5–8]. Исторически основным физическим параметром, управляющим кинематикой фотоионизации, являлась поляризация облучающего поля [9–14], что привело к развитию высокоточных методик контроля поляризационных состояний в экспериментах на синхротронах и лазерных источниках.

За последнее десятилетие ситуация существенно изменилась. Появление методов генерации световых полей с орбитальным угловым моментом (ОАМ) привело к обнаружению нового класса явлений, связанных с взаимодействием закрученного излучения с микроскопическими объектами [15–19]. В дополнение к различного рода теоретическим предсказаниям [20–23] в последние годы были реализованы прямые эксперименты по фотоэмиссии под действием света, несущего ОАМ [24–28].

Эти результаты подтверждают, что влияние орбитальной структуры излучения является не просто тонким теоретическим эффектом, но и практически реализуемым механизмом управления электронными степенями свободы. На этом фоне возрастает интерес к аналитическим моделям, позволяющим связать свойства пучков с ОАМ — такие как профиль интенсивности, фазовая структура и раскрытие конуса пучка в импульсном пространстве — с наблюдаемыми характеристиками фотоэмиссии.

Хорошо известно, что проявление автоионизационных резонансов в спектрах, снятых с разрешением по углу, может сильно отличаться от проявления в интегральных спектрах [4,29] и недавно нами было показано, что в области автоионизационных состояний (АИС) закрученность излучения проявляется намного ярче [30]. Учитывая прогресс, достигнутый в последнее время в детектировании дифференциальных характеристик в области АИС [31–33], естественно распространить наши исследования роли закрученности на дифференциальные спектры в области АИС.

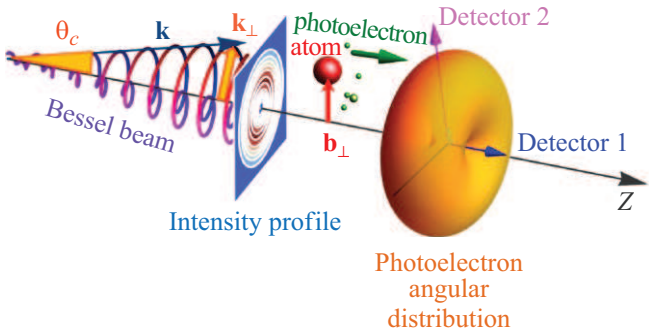

Рис. 1. Принципиальная схема ионизации атома бесселевым излучением.

2. Результаты

В настоящей работе анализируется фотоионизация бесселевым светом, распространяющимся вдоль оси квантования z, когда мишень однородна и представляет собой равномерно распределенные неполяризованные атомы в плоскости, перпендикулярной оси пучка. Бесселево состояние излучения будет характеризоваться продольной проекцией импульса k_z и проекцией полного углового момента (ТАМ) m_{tam} на ось z. Абсолютное значение поперечного импульса, $\kappa_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$, фиксировано и вместе с k_z определяет энергию падающего излучения: $\omega = c\sqrt{\kappa_\perp^2 + k_z^2}$, где c — скорость света в вакууме. Как показано в работе [34], такое бесселево состояние описывается векторным потенциалом

$$\mathbf{A}^{\text{tw}}_{\kappa_\perp m_{\text{tam}}\lambda} = \int \mathbf{u}_\lambda e^{i\mathbf{kr}} a_{\kappa_\perp m_{\text{tam}}}(\mathbf{k}_\perp)\frac{d^2\mathbf{k}_\perp}{4\pi^2}, \qquad (1)$$

где

$$a_{\kappa_\perp m_{\text{tam}}}(\mathbf{k}_\perp) = (-i)^{m_{\text{tam}}} e^{im_{\text{tam}}\phi_k}\sqrt{\frac{2\pi}{k_\perp}}\,\delta(k_\perp - \kappa_\perp), \qquad (2)$$

а $\mathbf{u}_\lambda$ — вектор поляризации со спиральностью $\lambda = \pm 1$.

Бесселеву волну, определяемую уравнениями (1), (2), в импульсном пространстве можно представить как когерентную суперпозицию плоских волн, волновые векторы $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_z)$ которых лежат на поверхности некоторого конуса с углом раскрытия $\text{tg}\,\theta_c = k_\perp/k_z$ (рис. 1). Положение атома в облучаемой мишени может быть задано вектором $\mathbf{b}_\perp$.

В рамках работы [30] авторами настоящего исследования было доказано оригинальное утверждение о том, что для исследуемой конфигурации мишени и падающего излучения влияние закрученности на угловое распределение фотоэлектронов сводится к домножению полиномов Лежандра от косинуса угла вылета фотоэлектрона $P_2(\cos\theta_p)$ на полином Лежандра того же порядка от косинуса угла раскрытия конуса закрученного пучка $P_2(\cos\theta_c)$. То есть если в рассматриваемой геометрии выражение для углового распределения фотоэлектронов под действием циркулярно поляризованной плоской волны выглядит известным образом:

$$\frac{d\sigma^{(\text{pl, circ})}}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi}\left(1 - \frac{\beta}{2}P_2(\cos\theta_p)\right), \qquad (3)$$

то под действием бесселевой волны оно примет вид:

$$\frac{d\sigma^{(\text{tw, circ})}}{d\Omega} = \frac{\sigma_0}{4\pi}\left(1 - \frac{\beta}{2}P_2(\cos\theta_p)P_2(\cos\theta_c)\right). \qquad (4)$$

В формулах (3) и (4) σ_0 — полное (интегральное) сечение ионизации, β — дипольный параметр анизотропии углового распределения.

Важно отметить, что хотя в последнее время было показано, что закрученность также передается электронам, образованным в процессе фотоионизации [35], в рамках разработанной авторами модели конечное состояние фотоэлектрона описывается плоской волной с определенными импульсом и энергией. Такое приближение соответствует стандартной постановке задачи фотоионизации в рамках метода R-матрицы и является оправданным для рассматриваемых энергий фотоэлектрона, когда влияние остаточного ионного потенциала на угловое распределение может быть эффективно учтено через фазовые сдвиги парциальных волн.

Заметим также, что в выражении (4) отсутствует зависимость от ТАМ фотона m_{tam}. Это исключительное следствие применения модели мишени с равномерным распределением атомов, когда интегрирование по импакт-фактору $\mathbf{b}_\perp$ проводится с единичной функцией распределения (соответствующие математические выкладки можно найти в работе [30]). В случае использования других функций распределения зависимость от m_{tam} сохраняется. Однако вне экстремальных значений учет этой зависимости не дает существенного вклада.

Анализ влияния закрученности излучения на дифференциальные по углу характеристики спектра фотоэлектронов (интенсивность линий и форму профиля резонанса) проведен на примере ионизации мишени из атомов криптона в области частично-дырочного $4s^{-1}4p^6 5p$ автоионизационного резонанса. Такой резонанс распадается за счет электронов валентной $4p$-оболочки и возбужденной $5p$-оболочки, один из которых заполняет $4s$-вакансию, а другой — переходит в непрерывный спектр. В результате конечное состояние такой системы будет однократно заряженным ионом криптона Kr^+ $[4s^2 4p^5\,{}^2P_j]$ с возможными значениями полного момента $j = 3/2$ и $j = 1/2$. Далее по тексту для краткости линию спектра, которая соответствует фотоэлектрону, оставившему систему в состоянии $[4s^2 4p^5]_{j=3/2}$, будем называть $4p_{3/2}$-линией, а в состоянии $[4s^2 4p^5]_{j=1/2}$ — $4p_{1/2}$-линией.

Выбор атома криптона и частично-дырочного резонанса $4s^{-1}4p^6\,5p$ обусловлен тем, что этот резонанс хорошо изучен как теоретически, так и экспериментально, он имеет сравнительно узкий и хорошо выраженный фановский профиль, а также для него имеются надежные

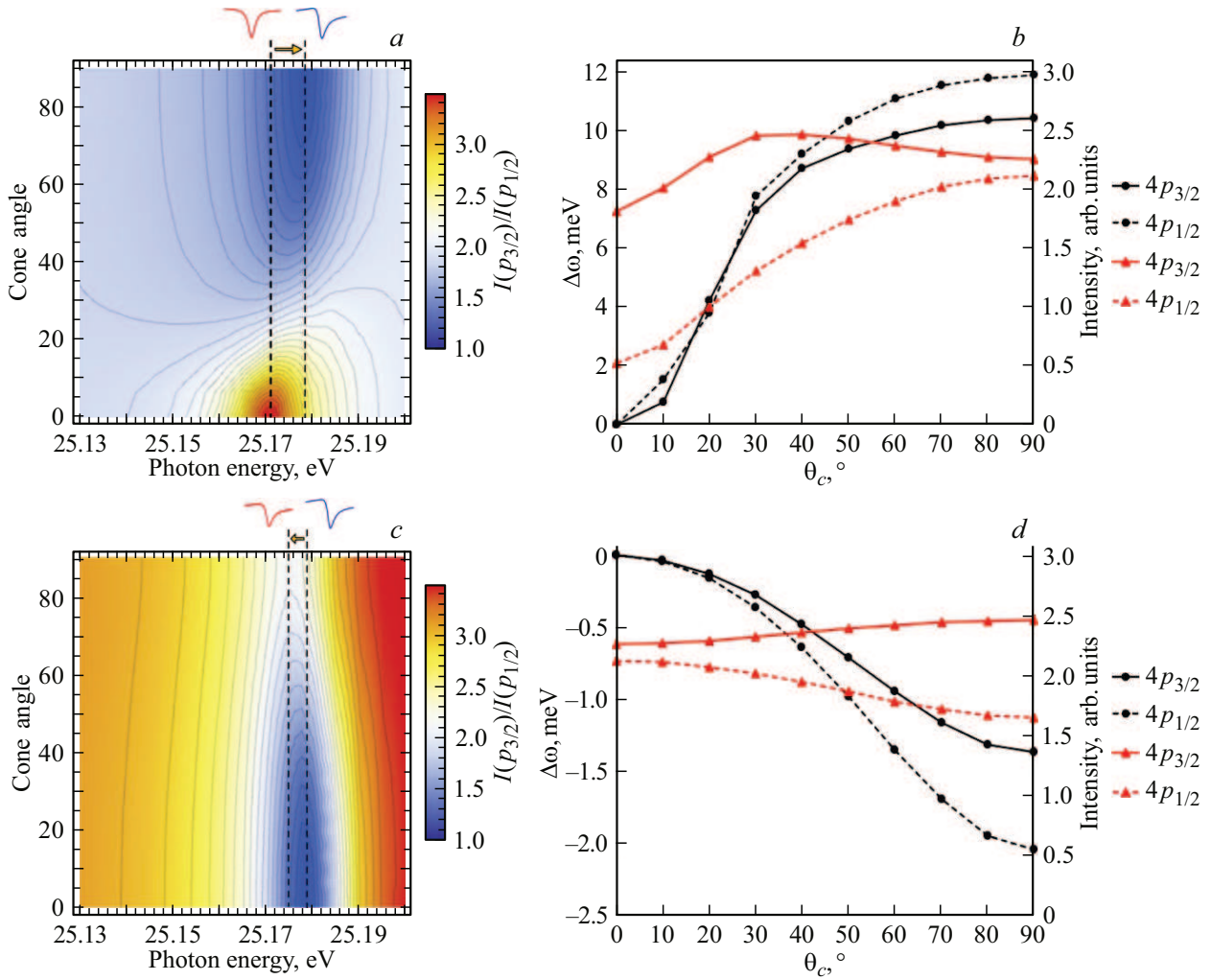

Рис. 2. (a, c) Отношение интенсивностей линий $4p_{3/2}$ и $4p_{1/2}$ спектра при наблюдении вдоль (a) и ортогонально (c) оси падающего бесселева пучка вблизи $4s^{-1}5p$-резонанса криптона в зависимости от энергии излучения и угла раскрытия конуса θ_c. (b, d) Смещение $\Delta\omega$ положения минимума профиля $4s^{-1}5p$-резонанса при облучении бесселевым светом относительно положения минимума при облучении плоской волной $(\theta_c = 0°)$ при наблюдении вдоль (b) и ортогонально (d) оси падающего пучка — левая ось, черные линии с кружками. Интенсивность линии в минимуме профиля $4s^{-1}5p$-резонанса — правая ось, красные линии с треугольниками. Сплошные кривые — линия $4p_{3/2}$, штриховые кривые — линия $4p_{1/2}$.

расчеты и экспериментальные данные для угловых распределений фотоэлектронов [36,37].

Расчеты волновых функций начального и конечного состояний системы произведены многоконфигурационным методом Хартри-Фока с помощью программного пакета MCHF [38] с последующим включением этих волновых функций в расчеты амплитуд ионизации, которые произведены методом R-матрицы средствами программного комплекса BSR [39]. Все состояния являются чистыми, без примесей дополнительных конфигураций. Начальное — Kr $[4s^24p^6]_{j=0}$, конечные — Kr^+ $[4s^24p^5]_{j=3/2;1/2}$ и Kr^+ $[4s^14p^6]_{j=1/2}$.

Дальнейшие обсуждения будут вестись в терминах угла раскрытия конуса пучка θ_c. Однако этот параметр может быть не всегда удобен для восприятия, в частности, с точки зрения эксперимента. Поэтому напомним, что θ_c связан с поперечным импульсом пучка $k_\perp$ соотношением $k_\perp = k \sin\theta_c$, где k — полный импульс пучка. Ниже в таблице для понимания масштаба приведено соответствие между θ_c и $k_\perp$ при энергии фотона $\omega = 25.18$ eV.

На рис. 2, a представлено изменение отношения интенсивности фотоэлектронных линий $4p_{3/2}$ и $4p_{1/2}$ спектра криптона в области его $4s^{-1}5p$-резонанса, наблюдаемых вдоль оси падающего бесселева излучения. При $\theta_c = 0°$ (соответсвует плоской волне) пиковое значение линии $4p_{3/2}$ доминирует над $4p_{1/2}$ в ~ 3.5 раза, что наблюдается в минимуме профиля резонанса при энергии $\omega^{4s\to5p}_{\min\,\|} \approx 25.17$ eV. С ростом параметра закрученности θ_c соотношение пиков начинает монотонно убывать и в пределе больших углов раскрытия $(\theta_c \to 90°)$ линии становятся очень близкими по интенсивности. Кроме

Таблица 1. Соответствие между углом раскрытия конуса бесселева пучка θ_c и поперечным импульсом $k_\perp$ для $k = 25.18$ eV

θ_c	$k_\perp/k$	$k_\perp$, eV
0°	0.00	4.37
10°	0.17	4.37
20°	0.34	8.61
30°	0.50	12.59
40°	0.64	16.18
50°	0.77	19.28
60°	0.87	21.80
70°	0.94	23.65
80°	0.98	24.79
90°	1.00	25.17

того, заметно и смещение резонанса по энергии на ~ 10 meV. Последнее связано с тем, что закрученность падающего излучения меняет профиль резонанса (меняется q-индекс Фано — см. детали в Приложении), из-за чего минимум последнего смещается в сторону больших энергий. Поведение смещения минимума резонансного профиля и интенсивности линии в нем показаны на рис. 2, *b*.

На рис. 2, *c* представлено аналогичное изменение отношения интенсивности исследуемых линий спектра, но наблюдаемых в направлении ортогональном оси падающего бесселева излучения. В этом случае наблюдается противоположная картина. В минимуме профиля резонанса при энергии $\omega^{4s\to 5p}_{\min\perp} \approx 25.18$ eV пиковые значения интенсивностей практически совпадают. Однако увеличивая параметр θ_c, можно добиться подавления линии $4p_{1/2}$ по отношению к $4p_{3/2}$ до 1.5 раз. Примечательно, что в данном случае смещение минимума резонанса выражено гораздо слабее и происходит в сторону меньших энергий не более чем на 2 meV (рис. 2, *d*).

Различие в поведении спектральных линий при наблюдении вдоль и перпендикулярно оси бесселева пучка обусловлено различной проекцией вектора поляризации и орбитального момента света на направление детектирования. То есть наблюдаемая несимметричность смещений минимума резонанса связана с различной эффективной геометрией возбуждаемой области мишени. Модуляцию относительной интенсивности линий можно связать с отличающимся вкладом разных зон волнового фронта в зависимости от геометрии наблюдения.

Следует подчеркнуть, что хотя продемонстрированные смещения составляют $\sim 10^{-2}$ eV по порядку величины, это является лишь частным результатом. Дальнейшие перспективы настоящего исследования связаны с распространением подхода на более сложные многоэлектронные системы, где спин-орбитальная связь сильнее и ожидаемый эффект может оказаться значительно выраженнее. Дополнительный интерес также представляет анализ динамики резонансов при возбуждении различными типами оптических мод с орбитальным моментом (лагерр-гауссовы и гибридные пучки) — в том числе с целью анализа устойчивости полученных результатов к выбору модели закрученного излучения. Мы ожидаем, что качественно все представленные тенденции сохранятся, однако может появиться количественный разброс в области больших значений углов раскрытия конуса пучка. Также в качестве предмета для дальнейшего анализа могут выступать нелинейные процессы, включая двухфотонную и резонансно-усиленную ионизацию.

3. Заключение

Полученные на основе ранее развитой авторами теории результаты демонстрируют, что закрученность падающего излучения оказывает существенное влияние на динамику автоионизации и формирование фотоэлектронного спектра вблизи резонанса. Показано, что вариация угла раскрытия бесселева пучка приводит к заметному перераспределению интенсивностей спин-орбитальных каналов в зависимости от направления наблюдения, а также к деформации фановского профиля. Продемонстрировано, что даже умеренная закрученность приводит к измеримому смещению минимума резонанса, что подчеркивает высокую чувствительность интерференционного механизма к структуре векторного потенциала ионизирующего излучения. На примере ионизации мишени из атомов криптона показано, что значение такого смещения в зависимости от условий наблюдения может достигать от нескольких единиц до десятка meV.

В целом можно заключить, что закрученность электромагнитного поля служит инструментом тонкой настройки интерференционного механизма, позволяя, в частности, управлять относительным вкладом спин-орбитальных компонент в итоговый спектр. Такая управляемость открывает перспективы селективного усиления ионизационных каналов в многоэлектронных системах, что может иметь прикладное значение в прецизионной спектроскопии и квантовом управлении атомными состояниями.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FEME-2024-0005). Для выполнения расчетов были использованы вычислительные ресурсы ЦКП „Центр данных ДВО РАН“. Исследование выполнено в рамках государственного задания Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Конфликт интересов

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение
q-индексы Фано и методика их извлечения

Хорошо известно, что форма резонансов фановского типа описывается формулой

$$\sigma(\omega) = \sigma_n \frac{(q + \frac{\omega-\omega_0}{\Gamma/2})^2}{1 + (\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma/2})^2}, \qquad (\text{П1})$$

где σ_n — нормировочный множитель, ω — энергия фотона, ω_0 — энергия резонанса, Γ — ширина резонанса, q — индекс Фано, описывающий степень асимметрии профиля резонанса (q-индекс).

В расчетах фотоионизации методом R-матрицы профильный индекс Фано не определяется в явном виде, однако его можно извлечь, аппроксимируя рассчитанный спектр: интегральный или под конкретным углом [40]. Рассматривая спектр в узкой области резонанса, фон от прямого процесса ионизации можно аппроксимировать линейно убывающей функцией, поэтому профиль резонанса в этом диапазоне можно приблизить функцией вида

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{\sigma}_n \frac{(q + \frac{\omega-\omega_0}{\Gamma/2})^2}{1 + (\frac{\omega-\omega_0}{\Gamma/2})^2} + A + B(\omega - \omega_0). \qquad (\text{П2})$$

Описывая форму резонанса функцией (П2), в которой $\tilde{\sigma}_n$, ω_0, Γ, A, B и q являются наилучшим образом подбираемыми параметрами, извлекаются значения q-индексов. Результаты аппроксимаций при разных значениях θ_c представлены в таблице.

Отметим, что параметры $\tilde{\sigma}_n$, A и B естественным образом меняются для разных углов θ_c, но при этом оценка для ω_0 и Γ устойчива и показывает $\omega_0 = 25.17$ eV, $\Gamma = 0.05$ eV.

Таблица 2. Восстановленные значения q-индексов Фано для профилей $4s^{-1}5p$-резонанса криптона при ионизации бесселевым излучением с углом раскрытия конуса θ_c при наблюдении вдоль ($q_{\parallel}$) и ортогонально ($q_{\perp}$) направления распространения пучка.

θ_c	Линия $4p_{3/2}$		Линия $4p_{1/2}$	
	$q_{\parallel}$	$q_{\perp}$	$q_{\parallel}$	$q_{\perp}$
0°	−0.044	−0.456	−0.038	−0.515
10°	−0.173	−0.453	−0.168	−0.514
20°	−0.217	−0.451	−0.291	−0.510
30°	−0.310	−0.446	−0.342	−0.503
40°	−0.375	−0.437	−0.415	−0.493
50°	−0.412	−0.429	−0.460	−0.481
60°	−0.434	−0.418	−0.488	−0.467
70°	−0.447	−0.407	−0.504	−0.458
80°	−0.454	−0.399	−0.512	−0.444
90°	−0.456	−0.395	−0.515	−0.435

Список литературы

[1] H. Feshbach. Ann. Phys., **5**, 357 (1958). DOI: 10.1016/0003-4916(58)90007-1

[2] H. Feshbach. Ann. Phys., **43**, 410 (1967). DOI: 10.1016/0003-4916(67)90163-7

[3] F.H. Mies. Phys. Rev., **175**, 164 (1968). DOI: 10.1103/PhysRev.175.164

[4] A.N. Grum-Grzhimailo, S. Fritzsche, P. O.Keeffe, M. Meyer. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **38**, 2545 (2005). DOI: 10.1088/0953-4075/38/14/017

[5] U. Becker, D.A. Shirley. *VUV and Soft X-Ray Photoionization* (Plenum Press, New York and London, 1996).

[6] F.J. Wuilleumier, M. Meyer. J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys., **39**, R425 (2006). DOI: 10.1088/0953-4075/39/23/R01

[7] Н.Б. Делоне, М.В. Федоров. УФН, **158**, 215 (1989). DOI: 10.3367/UFNr.0158.198906b.0215 [N.B. Delone, M.V. Fedorov, Sov. Phys. Usp. **32**, 500 (1989). DOI: 10.1070/PU1989v032n06ABEH002725]

[8] H. Kleinpoppen, B. Lohmann, A.N. Grum-Grzhimailo. *Perfect/Complete Scattering Experiments* (Springer Berlin, Heidelberg, 2013).

[9] P. Lambropoulos. Phys. Rev. Lett., **28**, 585 (1972). DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.585

[10] V.L. Jacobs. J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys., **6**, 1461 (1973). DOI: 10.1088/0022-3700/6/8/024

[11] H.R. Reiss. Phys. Rev. Lett., **29**, 1129 (1972). DOI: 10.1103/PhysRevLett.29.1129

[12] Н.Л. Манаков, А.В. Меремьянин. ЖЭТФ, **111**, 1984 (1997). [N.L. Manakov, A.V. Merem.yanin. JETP, **84**, 1080 (1997). DOI: 10.1134/1.558244]

[13] T.S. Sarantseva, A.A. Romanov, A.A. Silaev, N.V. Vvedenskii, M.V. Frolov. Phys. Rev. A., **107**, 023113 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.107.023113

[14] A.S. Maxwell, S.V. Popruzhenko, C. Figueira de Morisson Faria. Phys. Rev. A., **98**, 063423 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063423

[15] B.A. Knyazev, V.G. Serbo. Phys.-Usp., **61**, 449 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2018.02.038306

[16] M. Babiker, D.L. Andrews, V.E. Lembessis. J. Opt., **21**, 013001 (2018). DOI: 10.1088/2040-8986/aaed14

[17] S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, S.V. Karpeev, M.A. Butt. Micromachines, **11**, 997 (2020). DOI: 10.3390/mi11110997

[18] W. Fuscaldo, P. Burghignoli, A. Galli. Optik, **240**, 166834 (2021). DOI: 10.1016/j.ijleo.2021.166834

[19] A. Schimmoller, S. Walker, A.S. Landsman. Photonics, **11**, 871 (2024). DOI: 10.3390/photonics11090871

[20] D. Seipt, R.A. Müller, A. Surzhykov, S. Fritzsche. Phys. Rev. A, **94**, 053420 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053420

[21] V.P. Kosheleva, V.A. Zaytsev, R.A. Müller, A. Surzhykov, S. Fritzsche. Phys. Rev. A, **102**, 063115 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063115

[22] I.P. Ivanov. Ann. Phys., **534**, 2100128 (2022). DOI: 10.1002/andp.202100128

[23] M.D. Kiselev, E.V. Gryzlova, A.N. Grum-Grzhimailo. Phys. Rev. A, **109**, 023108 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevA.109.023108

[24] C.T. Schmiegelow, J. Schulz, H. Kaufmann, T. Ruster, U.G. Poschinger, F. Schmidt-Kaler. Nat. Commun., **7**, 12998 (2016). DOI: 0.1038/ncomms12998

[25] R. Geneaux, A. Camper, T. Auguste, O. Gobert, J. Caillat, R. Taieb, T. Ruchon. Nat. Commun., **7**, 12583 (2016). DOI: 10.1038/ncomms12583

[26] T. Kaneyasu, Y. Hikosaka, M. Fujimoto, T. Konomi, M. Katoh, H. Iwayama, E. Shigemasa. Phys. Rev. A, **95**, 023413 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.95.023413
[27] G. De Ninno, J. Watzel, P. Ribic *et al.* Nat. Photonics, **14**, 554 (2020). DOI: 10.1038/s41566-020-0669-y
[28] Y. Fang, Z. Guo, P. Ge, Y. Dou, Y. Deng, Q. Gong. Light Sci. Appl., **11**, 34 (2022). DOI: 10.1038/s41377-022-00726-7
[29] P.O. Keeffe, E.V. Gryzlova, D. Cubaynes, G.A. Garcia, L. Nahon, A.N. Grum-Grzhimailo, M. Meyer. Phys. Rev. Lett., **111**, 243002 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.243002
[30] M.D. Kiselev, E.V. Gryzlova, A.N. Grum-Grzhimailo. Phys. Rev. A, **108**, 023117 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.108.023117
[31] E.V. Gryzlova, R. Ma, H. Fukuzawa *et al.* Phys. Rev. A, **84**, 063405 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.84.063405
[32] P.A. Carpeggiani, E.V. Gryzlova, M. Reduzzi *et al.* Nat. Physics, **15**, 170 (2019). DOI: 10.1038/s41567-018-0340-4
[33] S. Augustin, M. Schulz, G. Schmid *et al.* Phys. Rev. A, **98**, 033408 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.033408
[34] O. Matula, A.G. Hayrapetyan, V.G. Serbo, A. Surzhykov, S. Fritzsche. J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys., **46**, 205002 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/20/205002
[35] I.I. Pavlov, A.D. Chaikovskaia, D.V. Karlovets. Phys. Rev. A, **110**, L031101 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevA.110.L031101
[36] A. Neogi, E.T. Kennedy, J.-P. Mosnier, P. van Kampen, J.T. Costello, G.O. Sullivan, M.W.D. Mansfield, Ph.V. Demekhin, B.M. Lagutin, V.L. Sukhorukov. Phys. Rev. A, **67**, 042707 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevA.67.042707
[37] M.D. Kiselev, P.A Carpeggiani, E.V Gryzlova, S.M Burkov, M. Reduzzi, A. Dubrouil, D. Faccial., M. Negro, K. Ueda, F. Frassetto, F. Stienkemeier, Y. Ovcharenko, M Meyer, M. Di Fraia, O. Plekan, K.C. Prince, C. Callegari, G. Sansone, A.N. Grum-Grzhimailo. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **53**, 244006 (2020). DOI: 10.1088/1361-6455/abc2c5
[38] C. Froese Fischer, T. Brage, P. Jönsson. *Computational Atomic Structure. An MCHF Approach* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1997).
[39] O. Zatsarinny. Comput. Phys. Comm., **174**, 273–356 (2006). DOI: 10.1016/j.cpc.2005.10.006
[40] M.M. Popova, M.D. Kiselev, S.M. Burkov, E.V. Gryzlova, A.N. Grum-Grzhimailo. Atoms, **10**, 102 (2022). DOI: 10.3390/atoms10040102