14

Анализ взаимосвязей между временными рядами трех биологических систем методом частичных вероятностей рекуррентности

© О.Е. Дик,[1] А.Л. Глазов[2]

[1] Институт физиологии им. И.П. Павлова РАН,
199034 Санкт-Петербург, Россия
[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: dickviola@gmail.com

Поступило в Редакцию 16 февраля 2026 г.
В окончательной редакции 20 апреля 2026 г.
Принято к публикации 28 апреля 2026 г.

Рассмотрена задача определения вариантов конфигурации парных и тройных взаимодействий трехосцилляторной сети методом оценки частичных условных вероятностей рекуррентности фазовых траекторий. Проверка правильности определения структуры связи проведена на примере двух моделей трех взаимосвязанных структурно одинаковых и структурно различных систем с известными однонаправленными связями. Этот подход применен к экспериментальным временным рядам для трех биологических систем (дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной). Выявлены различия в вариантах конфигурации парных и тройных взаимодействий колебаний дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной систем в нормальном и патологическом состояниях. В патологическом состоянии обнаружено влияние колебаний артериального давления как посредника влияния дыхательного ритма на нейрональную активность без прямой связи колебаний дыхательной и нервной систем. Этот вариант тройной конфигурации не обнаружен в нормальном состоянии.

Ключевые слова: вероятности рекуррентностей, биологические системы, конфигурации связей.

DOI: 10.61011/JTF.2026.08.63406.29-26

Введение

Задача выявления связности взаимодействующих осцилляторов считается чрезвычайно сложной и важной для распознавания структуры сети, т. е. направления и силы связей, особенно между системами большой сети [1–3]. Подобные задачи актуальны при анализе многоканальных электроэнцефалографических или магнитоэнцефалографических данных для выявления маркеров нарушений в связях мозга в прикладных нейробиологических исследованиях [4], а также при анализе кардиореспираторного взаимодействия [5,6] или сердечно-сосудистой, дыхательной и нервной систем [7,8] для определения маркеров нарушений в этих системах.

В настоящее время применяются разнообразные методы для определения структуры связности осцилляторов [9–12] и нахождения причинно-следственной связи по Грейнджеру [13]. Метод, основанный на пространстве состояний [14], зависит от структуры анализируемых систем и может неправильно определять связность в сложных хаотических системах [15]. Методы, основанные на различных мерах корреляции [16], синхронизации [17], связанные с определением передаточной информации [18], с вычислением индекса направленности с помощью реконструкции фазовой динамики [19–21], используются в основном для анализа двумерных временных рядов, т. е. для парного анализа связности. При этом меры корреляции или синхронности отражают ненаправленные функциональные связи, так как эти меры симметричны [2]. При отсутствии синхронности анализируемых временных рядов возможно выявление асимметричных мер, определяющих направленность связей [16]. При этом переходы к синхронизированным состояниям или, наоборот, десинхронизация могут быть связаны с патологическими состояниями, такими как стресс [22], умеренные когнитивные нарушения [23], эпилепсия [24].

Основанный на вычислении условных вероятностей рекуррентности двух фазовых траекторий, метод, предложенный в работе [16], позволяет выявлять направленность связи между сигналами двух слабо взаимодействующих систем или даже двух структурно различных систем — как теоретических [16], так и экспериментальных [7,25].

Методы с использованием моделирования фазовой динамики и выявлением связей между мгновенными фазами слабо взаимодействующих и зашумленных систем [26,27] широко применяются в биологии и климатологии. Но в отличие от методов, связанных с анализом рекуррентности фазовых траекторий анализируемых систем, которые являются помехоустойчивыми и не требуют узкополосной фильтрации [16,28], методы с использованием моделирования фазовой динамики тре-

буют достаточной фильтрации для качественной оценки мгновенных фаз и частот двух анализируемых временных рядов [29].

Важным направлением применения методов анализа направленности связи для биологии является изучение влияния усложненных или патологических состояний на направленность связей колебаний биологических систем. Считается, что доминирующее влияние дыхательной системы на сердечно-сосудистую может быть связано с состоянием обморока [30] или с состоянием беременности [25]. Взаимодействие между осцилляторами сердечно-сосудистой и дыхательной систем изменяется с увеличением возраста, что может быть связано с развитием патологического состояния [6]. Это определено на основе метода моделирования фазовой динамики [30] и на основе расчета условных рекуррентных вероятностей колебаний дыхательной и сердечно-сосудистой систем [25]. В работах [31,32] на основе метода моделирования фазовой динамики установлено, что патологические состояния могут приводить к изменению направленности попарных связей между сверхмедленными компонентами электроэнцефалографических сигналов, зарегистрированных в различных областях мозга.

Взаимность связей дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной систем считается не совсем ясной, но включение в изучаемую нейронную сеть низкочастотных колебаний, соответствующих сердечной и дыхательной активностям, может дать дополнительное понимание взаимодействия между различными физиологическими системами при развитии патологических состояний [6,33]. В работе [34] рассмотрены физиологические доказательства того, что дыхание может играть фундаментальную роль в координации нейрональной активности мозга, модулируя различные частотные диапазоны в динамике мозга. Эффекты дыхательных колебаний на нейрональную активность могут быть связаны с вариабельностью сердечного ритма при психических расстройствах [34].

Выявление влияния различных физиологических нарушений на направленность связей между одновременно экспериментально зарегистрированными сигналами трех биологических систем, т. е. нахождение конфигураций тройных связей между колебаниями дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной систем, представляет сложную актуальную задачу.

В работах [7,8,35] мы применили методы моделирования фазовой динамики и вычисления совместных рекуррентностей между двумя сигналами для одновременно зарегистрированных колебаний дыхательного ритма, артериального давления и нейрональной активности нейронов продолговатого мозга крыс. В большинстве данных были обнаружены однонаправленные парные связи с влиянием дыхательного ритма на артериальное давление и влияние артериального давления на нейрональную активность до и во время болевого воздействия. В работе [36] было выявлено, что болевое воздействие приводит к увеличению времен запаздывания влияния дыхательного осциллятора на артериальное давление и влияния артериального давления на нейрональную активность, но качественного изменения направленности парных связей во время болевого воздействия не обнаружено.

Поскольку парный анализ недостаточен для выявления сложных взаимодействий между системами, в работах [2,19] предложены методы тройного анализа для определения направленной связности малой сети систем методом реконструкции фазовой динамики из многомерных временных рядов. Сравнивая функции связи всех возможных триплетов осцилляторов, авторы продемонстрировали возможность надежного определения направленности существующих связей, доказав это на небольших сетях осцилляторов Ван дер Поля с известной направленностью связей и периодическими незашумленными сигналами [2,19].

В работе [1] предложен модифицированный метод с оценкой соотношений между частичными условными вероятностями рекуррентностей для трех связанных систем. Этот метод протестирован для трех связанных идентичных хаотических систем Лоренца [1].

Целью настоящей работы является выявление возможных конфигураций парных и тройных взаимодействий трех биологических систем (дыхательной, сердечно-сосудистой и нервной) с помощью метода оценки частичных условных вероятностей рекуррентности фазовых траекторий этих систем, а также выявление возможных различий в вариантах конфигурации взаимодействий колебаний этих систем в нормальном и патологическом состоянии.

В связи с тем, что в работе [37] установлены различия в определении обобщенной синхронизации методом рекуррентного анализа в связанных идентичных и неидентичных системах, в настоящей работе использованы модели трех взаимосвязанных структурно одинаковых и структурно различных систем (осцилляторов Ресслера и осцилляторов Ван дер Поля и Ресслера) с известными однонаправленными связями для проверки правильности вычисления частичных вероятностей рекуррентностей и правильности определения структуры связи трехосцилляторной сети.

В качестве экспериментальных данных использованы временные ряды, полученные из ритмов дыхания, артериального давления и нейрональной активности продолговатого мозга крыс для контрольной группы и группы с патологическим состоянием в форме экспериментально вызванного колита, и подробно описанные в работах [7,8,38].

1. Метод

Определение направленности связи между двумя осцилляторами X и Y на основе анализа совместных рекуррентностей [16] состоит в вычислении усредненных условных вероятностей рекуррентностей (MCR) в

соответствии с формулами:

$$MCR(X|Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p(x_i, y_i)}{p(y_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} JR_{i,j}^{X,Y}}{\sum\limits_{j=1}^{N} R_{i,j}^{Y}},$$

$$MCR(Y|X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p(x_i, y_i)}{p(x_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} JR_{i,j}^{X,Y}}{\sum\limits_{j=1}^{N} R_{i,j}^{X}}, \quad (1)$$

где $p(x_i)$ — вероятность возврата траектории x к точке x_i, $p(x_i, y_i)$ — вероятность одновременного возврата траекторий x и y к точкам x_i и y_i. Эти вероятности вычисляются как средние значения соответствующих столбцов матрицы совместной рекуррентности $JR_{i,j}^{X,Y}$ и матриц рекуррентностей $R_{i,j}^{X}$ и $R_{i,j}^{Y}$ [39]:

$$R_{i,j}^{X} = \Theta\big(\varepsilon_X - \|x_i - x_j\|\big),$$

$$R_{i,j}^{Y} = \Theta\big(\varepsilon_Y - \|y_i - y_j\|\big),$$

$$JR_{i.j}^{X,Y} = \Theta\big(\varepsilon_X - \|x_i - x_j\|\big)\Theta\big(\varepsilon_Y - \|y_i - y_j\|\big),$$

$$j = 1, \ldots, N, \quad (2)$$

где Θ — функция Хэвисайда, символ $\|\ \|$ означает евклидову норму, $N = n-(m-1)d$, n — длина анализируемых сигналов $X(t)$ и $Y(t)$, d — временная задержка, m — минимальная размерность пространства, в котором восстановленная с использованием метода временных задержек [40] фазовая траектория $x(t) = \big(X(t), X(t+d), \ldots, X(t+(m-1)d)\big)$ воспроизводит свойства исходной траектории осциллятора $X(t)$, ε_X и ε_Y — радиусы окрестностей точек фазовых траекторий $x(t)$ и $y(t)$.

При этом, если вычисленные значения соответствуют неравенству $MCR(X|Y) > MCR(Y|X)$, то считается, что осциллятор X однонаправленно управляет осциллятором Y, а если вычисленные значения соответствуют противоположному неравенству $MCR(X|Y) < MCR(Y|X)$, то, наоборот, осциллятор Y управляет осциллятором X [16].

Определение направленности связи между тремя осцилляторами X, Y и Z на основе анализа совместных рекуррентностей состоит в вычислении соотношений (3)–(5) в соответствии с формулами, предложенными в работе [1]:

$$\Delta MCR(X|Y)_Z = MCR\big(X|(Y,Z)\big) - MCR(X|Y),$$

$$\Delta MCR(X|Z)_Y = MCR\big(X|(Y,Z)\big) - MCR(X|Z), \quad (3)$$

$$\Delta MCR(Y|X)_Z = MCR\big(Y|(X,Z)\big) - MCR(Y|X),$$

$$\Delta MCR(Y|Z)_X = MCR\big(Y|(X,Z)\big) - MCR(Y|Z), \quad (4)$$

$$\Delta MCR(Z|X)_Y = MCR\big(Z|(X,Y)\big) - MCR(Z|X),$$

$$\Delta MCR(Z|Y)_X = MCR\big(Z|(X,Y)\big) - MCR(Z|Y). \quad (5)$$

Частичные средние условные вероятности рекуррентностей $MCR\big(X|(Y,Z)\big)$, $MCR\big(Y|(X,Z)\big)$ и $MCR\big(Z|(X,Y)\big)$ вычисляются по формулам:

$$MCR\big(X|(Y,Z)\big) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p(x_i, y_i, z_i)}{p(y_i, z_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} TR_{i,j}^{X,Y,Z}}{\sum\limits_{j=1}^{N} JR_{i,j}^{Y,Z}},$$

$$MCR\big(Y|(X,Z)\big) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p(x_i, y_i, z_i)}{p(x_i, z_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} TR_{i,j}^{X,Y,Z}}{\sum\limits_{j=1}^{N} JR_{i,j}^{X,Z}},$$

$$MCR\big(Z|(X,Y)\big) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{p(x_i, y_i, z_i)}{p(x_i, y_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\sum\limits_{j=1}^{N} TR_{i,j}^{X,Y,Z}}{\sum\limits_{j=1}^{N} JR_{i,j}^{X,Y}}, \quad (6)$$

где

$$TR_{i.j}^{X,Y,Z} = \Theta\big(\varepsilon_X - \|x_i - x_j\|\big)\Theta\big(\varepsilon_Y - \|y_i - y_j\|\big) \times \Theta\big(\varepsilon_Z - \|z_i a - z_j\|\big), \quad i, j = 1, \ldots, N, \quad (7)$$

определяет совместную рекуррентность между тремя осцилляторами.

Соотношения вероятностей рекуррентностей $\Delta MCR(X|Y)_Z$ и $\Delta MCR(Y|X)_Z$ являются характеристиками, описывающими влияние осциллятора Z на $MCR(X|Y)$ и на $MCR(Y|X)$. Аналогично $\Delta MCR(X|Z)_Y$ и $\Delta MCR(Z|X)_Y$ определяют влияние осциллятора Y на $MCR(X|Z)$ и $MCR(Z|X)$. Величины $\Delta MCR(Y|Z)_X$ и $\Delta MCR(Z|Y)_X$ задают влияние осциллятора X на $MCR(Y|Z)$ и $MCR(Z|Y)$. В целом, для рассмотрения различных конфигураций связи трех осцилляторов используется нахождение трех соотношений в соответствии с формулами (3)–(5).

Величина оптимальной временной задержки d вычисляется путем нахождения минимума функции взаимной информации [41]. Величина оптимального параметра размерности вложения m определяется методом минимизации числа ближайших ложных соседей [42].

Определение направленности связи между взаимодействующими осцилляторами выполняется для данных в несинхронном режиме, для которых показатель фазовой синхронизации, вычисляемый для осцилляторов X и Y [28]:

$$CPR = \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\sum_{\tau=1}^{N/2}\big(P_X(\tau) - \overline{P_X(\tau)}\big)\big(P_Y(\tau) - \overline{P_Y(\tau)}\big) \quad (9)$$

не превышает значение 0.5, где $P_X(\tau)$ и $P_Y(\tau)$ — вероятности рекуррентности, определяющие возврат фазовых траекторий в окрестность предыдущего состояния

после τ временных шагов:

$$P_X(\tau) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} R^X_{i,i+\tau},$$

$$R^X_{i,i+\tau} = \Theta\big(\varepsilon_X - \|x_i - x_{i+\tau}\|\big),$$
$$i = 1, \ldots, N, \tag{10}$$

$\overline{P_X(\tau)}$ и $\overline{P_Y(\tau)}$ — средние значения, σ_X и σ_Y – стандартные отклонения вероятностей.

2. Результаты и обсуждение

2.1. Определение конфигурации направленной связи для трехмодельных систем

Рассмотрим две модели трех взаимосвязанных структурно одинаковых и структурно различных систем (осцилляторов Ресслера и осцилляторов Ван дер Поля и Ресслера) с известными однонаправленными связями для проверки правильности вычисления частичных вероятностей рекуррентностей и правильности определения структуры связи трехосцилляторной сети.

Первая модель описывает три взаимодействующих осциллятора Ресслера (X, Y и Z) с известными однонаправленными связями через вторые компоненты x_2, y_2, z_2:

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3,\\
\frac{dx_2}{dt} = x_1 + ax_2 + \mu_{YX}(y_2 - x_2) + \mu_{ZX}(z_2 - x_2),\\
\frac{dx_3}{dt} = b + x_3(x_1 - c),\\
\frac{dy_1}{dt} = -(1+\nu)y_2 - y_3,\\
\frac{dy_2}{dt} = (1+\nu)y_1 + ay_2 + \mu_{XY}(x_2 - y_2) + \mu_{ZY}(z_2 - y_2),\\
\frac{dy_3}{dt} = b + y_3(y_1 - c),\\
\frac{dz_1}{dt} = -(1-\nu)z_2 - z_3,\\
\frac{dz_2}{dt} = (1-\nu)z_1 + az_2 + \mu_{XZ}(x_2 - z_2) + \mu_{YZ}(y_2 - z_2),\\
\frac{dz_3}{dt} = b + z_3(z_1 - c)
\end{gathered} \tag{11}$$

с параметрами $a = 0.16$, $b = 0.1$, $c = 8.5$, задающими слабохаотический режим, и параметрами связи μ_{jk}, $j, k = X, Y, Z$, задающими однонаправленную связь только при обращении в ноль некоторых коэффициентов. Рассогласование частот с параметром $\nu = 0.08$ приводит к отсутствию фазовой синхронизации при малых значениях параметров связи ($\mu_{jk} < 0.09$).

Вторая модель описывает три взаимосвязанные структурно различные системы: две системы Ван дер Поля (X и Y) и систему Ресслера (Z) с известными однонаправленными связями через компоненты x, y, z_1:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2x}{dt^2} = 0.5(1-x^2)\frac{dx}{dt} - \omega_X^2 x + \mu_{YX}(y-x) + \mu_{ZX}(z_1 - x),\\
\frac{d^2y}{dt^2} = 0.5(1-y^2)\frac{dy}{dt} - \omega_Y^2 y + \mu_{YX}(y-x) + \mu_{ZY}(z_1 - y),\\
\frac{dz_1}{dt} = -\omega_Z z_2 - z_3 + \mu_{XZ}(x - z_1) + \mu_{YZ}(y - z_1),\\
\frac{dz_2}{dt} = \omega_Z z_1 + az_2,\\
\frac{dz_3}{dt} = b + z_3(z_1 - c)
\end{gathered} \tag{12}$$

с параметрами $a = 0.16$, $b = 0.1$, $c = 8.5$, задающими слабохаотический режим для осциллятора Ресслера и периодическими колебаниями для осцилляторов Ван дер Поля при нулевых значениях параметров связи μ_{jk}, $j, k = X, Y, Z$, задающими однонаправленную связь только при обращении в нуль некоторых коэффициентов. Рассогласование частот ($\omega_X = 1$, $\omega_Y = 1.088$, $\omega_Z = 0.925$) приводит к отсутствию фазовой синхронизации при значениях параметров связи ($\mu_{jk} < 0.1$).

Уравнения (11) и (12) проинтегрированы методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом 0.003 с и временем интегрирования 1800 s, что соответствовало 600 000 точек. Первые 100 000 точек удалены как возможный переходный процесс, затем выполнена передискретизация с шагом 0.3 для применения вычислений частичных вероятностей рекуррентностей. После численного интегрирования для второй модели для переменной y добавлен аддитивный шум с небольшим коэффициентом зашумления: $y(t) = 0.1\eta(t)$, где $\eta(t)$ — реализация гауссовского шума.

Рассмотрим три варианта однонаправленной связи. Для первого варианта параметры связи $\mu_{XY} > 0$ и $\mu_{XZ} > 0$, для второго варианта $\mu_{XY} > 0$ и $\mu_{YZ} > 0$, для третьего варианта $\mu_{XY} > 0$, $\mu_{YZ} > 0$ и $\mu_{XZ} > 0$, остальные значения параметров связи равны нулю.

На рис. 1, *a–c* изображены короткие фрагменты анализируемых компонент $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ для первой модели, на рис. 1, *g–i* изображены короткие фрагменты анализируемых компонент $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$ для второй модели для третьего варианта однонаправленной связи при $\mu_{XY} = \mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.03$. Фазовые траектории построены для этих компонент с использованием метода временных задержек [43] при значениях $d = 5$ и $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $m_3 = 5$ (рис. 1, *d–f*) для модели трех систем Ресслера и значениях $m_1 = 2$, $m_2 = 6$, $m_3 = 5$ (рис. 1, *j–l*) для модели взаимосвязанных систем Ван дер Поля и Ресслера. Значения оптимальной временной задержки d и оптимальной размерности вложения m определены путем нахождения минимума функции взаимной информации [41] и методом минимизации числа ближайших ложных соседей [42]. Зависимости усредненных показателей фазовой синхронизации от коэффициентов

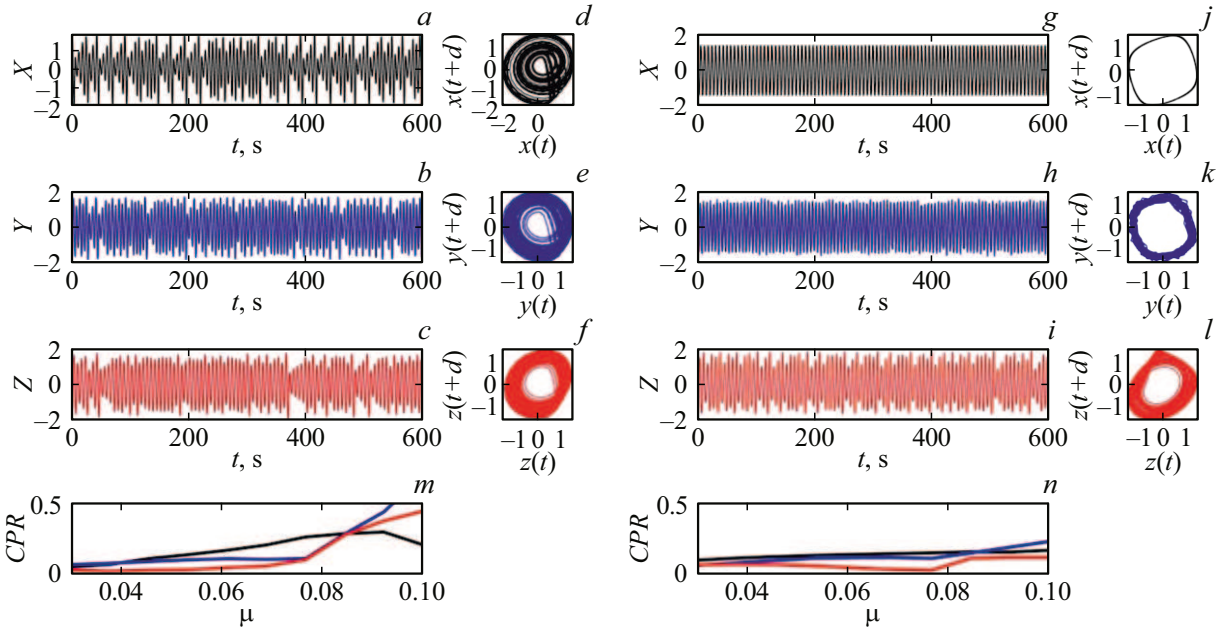


Рис. 1. Фрагменты анализируемых компонент $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ для первой модели (*a–c*), компонент $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$ для второй модели (*g–i*). Фазовые траектории этих компонент (*d–f*) и (*j–l*). Зависимости усредненных показателей фазовой синхронизации от коэффициентов μ связи $CPR_{XY}(\mu)$ (черные кривые), $CPR_{XZ}(\mu)$ (голубые кривые), $CPR_{YZ}(\mu)$ (красные кривые) (*m,n*).

μ связи $CPR_{XY}(\mu)$ (черные кривые), $CPR_{XZ}(\mu)$ (голубые кривые), $CPR_{YZ}(\mu)$ (красные кривые) (рис. 1, *m,n*) указывают на отсутствие фазовой синхронизации для анализируемых систем, так как эти значения меньше 0.5 для параметров связи $\mu < 0.09$ для первой модели и для $\mu < 0.1$ для второй модели. При значениях параметров связи $\mu_{jk} < 0.1$, $j, k = X, Y, Z$ наблюдается хаотичность колебаний всех трех систем первой модели, что подтверждается положительными значениями максимальных показателей Ляпунова ($\lambda\max_X > 0, \lambda\max_Y > 0, \lambda\max_Z > 0$). Для второй модели $\lambda\max_Z > 0$ (хаотичность системы Ресслера остается для $\mu_{jk} < 0.1$).

Для определения направленности связи пороговые значения ε_X, ε_Z и ε_Y были выбраны таким образом, чтобы при силе связи, равной нулю, плотность рекуррентных точек

$$RR_X = \frac{1}{N^2}\sum_{i,j=l}^{N} R^X_{i,j}$$

была одинаковой (в нашем случае 0.03) для матрицы рекуррентности для каждой системы X, Y и Z в соответствии с [16]. Значения оптимальной временной задержки d и оптимальной размерности вложения m были выбраны как $d = 5$ и $m = \max\{m_1, m_2, m_3\} = \{3, 4, 5\} = 5$ для первой модели и $m = \max\{m_1, m_2, m_3\} = \{2, 6, 5\} = 6$ для второй модели.

На рис. 2 представлены кривые средних значений $\Delta MCRp(\mu)$ со стандартными отклонениями для частичных MCR, вычисленные по 100 траекториям для равномерно распределенных начальных условий фазовых траекторий. В этом первом варианте конфигурации связи осциллятор X одновременно управляет осцилляторами Y и Z. Вычисленные соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей для систем первой модели, описывающей три взаимодействующих осциллятора Ресслера, соответствуют следующим неравенствам: $\Delta MCR(X|Y)_Z < \Delta MCR(X|Z)_Y$ (рис. 2, *a*), $\Delta MCR(Y|X)_Z < \Delta MCR(Y|Z)_X$ (рис. 2, *b*), $\Delta MCR(Z|X)_Y < \Delta MCR(Z|Y)_X$ (рис. 2, *c*) для всех анализируемых параметров связи $0.03 \le \mu \le 0.1$, т.е. в этой конфигурации осциллятор Z практически не влияет на $MCR(X|Y)$ и на $MCR(Y|X)$, так как $\Delta MCR(X|Y)_Z \approx 0$, $\Delta MCR(Y|X)_Z \approx 0$ (рис. 2, *a,b*); осциллятор Y практически не влияет на $MCR(Z|X)$, потому что $\Delta MCR(Z|X)_Y \approx 0$ (рис. 2, *c*). Эти результаты совпадают с оценкой соотношений между частичными условными вероятностями рекуррентностей, выполненной в работе [1] для трех связанных структурно одинаковых хаотичных систем Лоренца. Для второй модели с тремя взаимосвязанными структурно различными системами соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей в форме $\Delta MCR(X|Y)_Z < \Delta MCR(X|Z)_Y$ (рис. 2, *d*), $\Delta MCR(Y|X)_Z < \Delta MCR(Y|Z)_X$ (рис. 2, *e*), $\Delta MCR(Z|X)_Y < \Delta MCR(Z|Y)_X$ (рис. 2, *f*) характерны только для больших значений параметров связи $0.07 < \mu \le 0.1$.

Во втором варианте конфигурации осциллятор X управляет осциллятором Y, осциллятор Y управляет осциллятором Z, т.е. осциллятор Y является посредником передачи информации от X к Z.

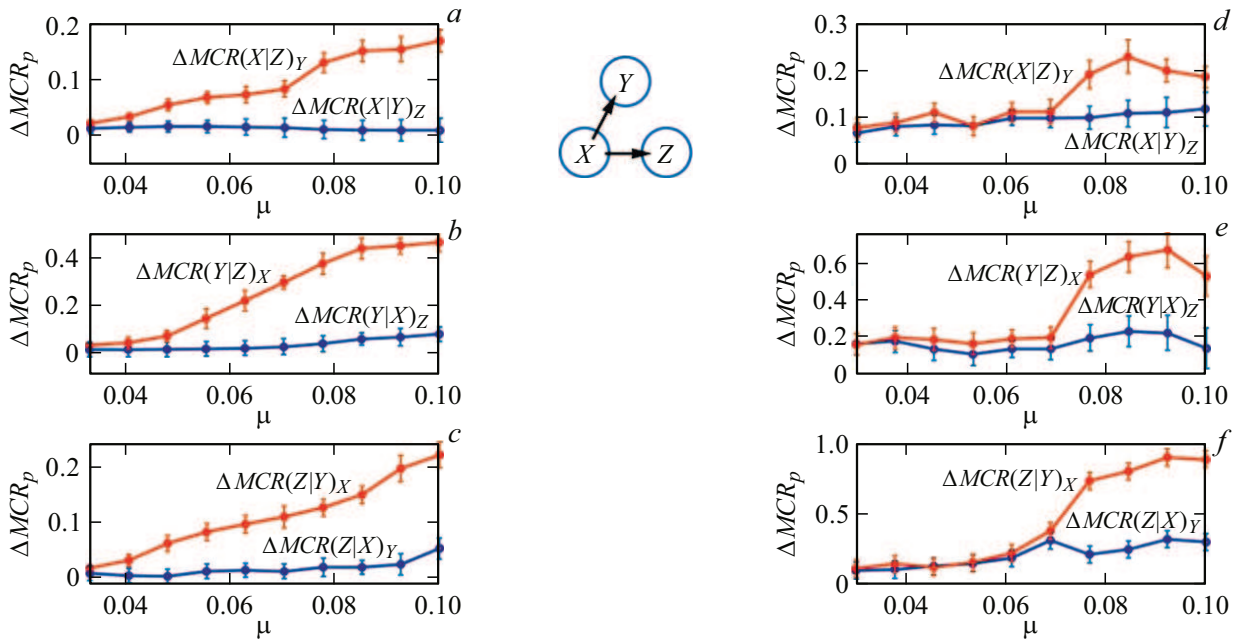


Рис. 2. Первый вариант конфигурации связи (осциллятор X одновременно управляет осцилляторами Y и Z). Соотношения между частичными усредненными условными вероятностями рекуррентностей компонент $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ для первой модели (*a–c*) и компонент $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$ для второй модели (*d–f*).

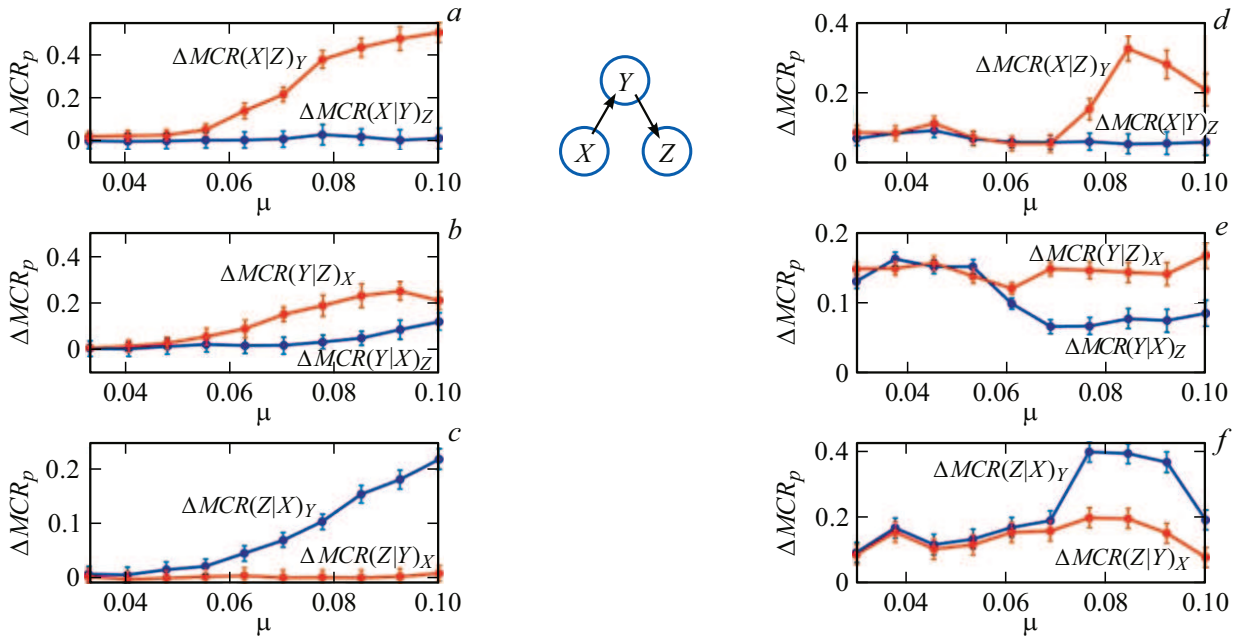


Рис. 3. Второй вариант конфигурации связи (осциллятор X управляет осциллятором Y, Y управляет Z). Соотношения между частичными усредненными условными вероятностями рекуррентностей компонент $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ для первой модели (*a–c*) и компонент $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$ для второй модели (*d–f*).

Соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей для первой модели удовлетворяют неравенствам: $\Delta MCR(X|Y)_Z < \Delta MCR(X|Z)_Y$ (рис. 3, *a*), $\Delta MCR(Y|X)_Z < \Delta MCR(Y|Z)_X$ (рис. 3, *b*), $\Delta MCR(Z|X)_Y > \Delta MCR(Z|Y)_X$ (рис. 3, *c*) для всех анализируемых параметров связи $0.03 \le \mu \le 0.1$, а для второй модели эти соотношения существуют, как и в первом варианте, для параметров связи $0.07 < \mu \le 0.1$ (рис. 3, *d–f*). При этом осциллятор Y существенно влияет на $MCR(X|Z)$ (рис. 3, *a,d*) и на $MCR(Z|X)$ (рис. 3, *c,f*), т. е. посредник Y приводит к косвенной связи между осцилляторами X и Z, что определено также

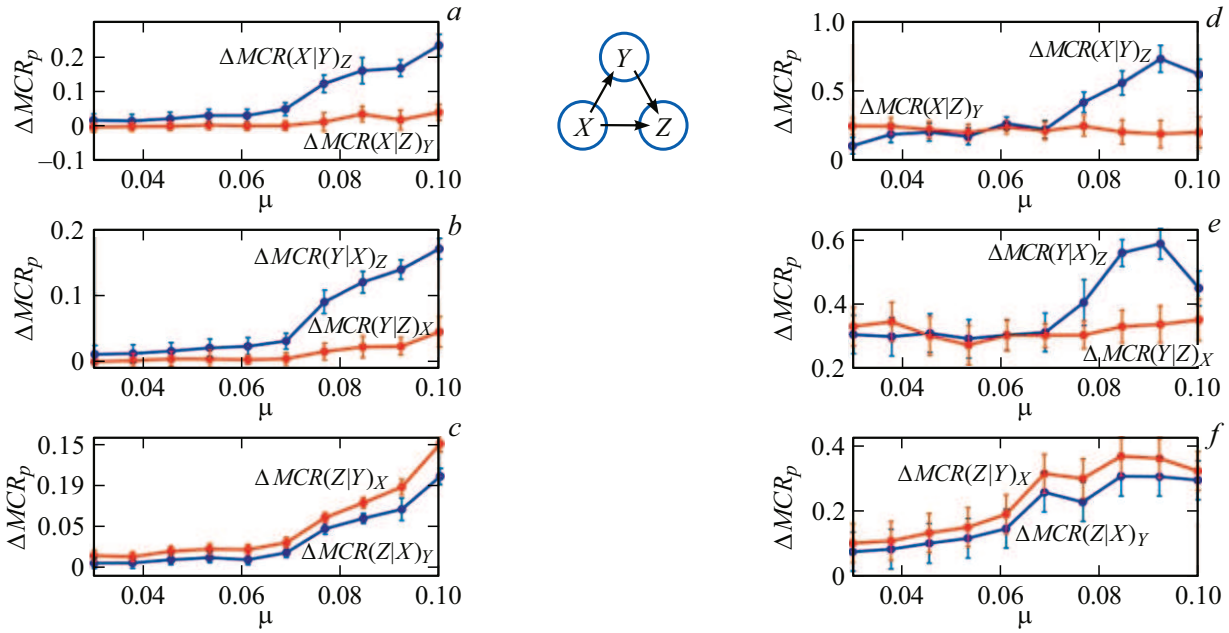


Рис. 4. Третий вариант конфигурации связи (осциллятор Z контролируется осцилляторами X и Y, осциллятор X управляет осциллятором Y). Соотношения между частичными усредненными условными вероятностями рекуррентностей компонент $x_2(t)$, $y_2(t)$, $z_2(t)$ для первой модели (*a–c*) и компонент $x(t)$, $y(t)$, $z_1(t)$ для второй модели (*d–f*).

для трех систем Лоренца в работе [1]. Однако вклад косвенной связи от X к Z меньше вклада прямой связи от Y к Z, поэтому выявляются следующие соотношения: $MCR(X|Z) < MCR(X|Y)$ и $MCR(Z|X) < MCR(Z|Y)$, что приводит к $\Delta MCR(X|Y)_Z < \Delta MCR(X|Z)_Y$ (рис. 3, *a,d*) и $\Delta MCR(Z|X)_Y > \Delta MCR(Z|Y)_X$ (рис. 3, *c,f*).

В третьем варианте конфигурации связи осциллятор Z является общим приемником информации и управляется двумя осцилляторами X и Y, а осциллятор X управляет осциллятором Y. Соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей соответствуют неравенствам: $\Delta MCR(X|Y)_Z > \Delta MCR(X|Z)_Y$ (рис. 4, *a,d*), $\Delta MCR(Y|X)_Z > \Delta MCR(Y|Z)_X$ (рис. 4, *b,e*), $\Delta MCR(Z|X)_Y \approx \Delta MCR(Z|Y)_X$ (рис. 4, *c,f*) для первой модели для $0.03 \le \mu \le 0.1$, для второй модели для $0.07 < \mu \le 0.1$, т.е. в этой конфигурации влияние осциллятора X на $MCR(Z|Y)$ и влияние осциллятора Y на $MCR(Z|X)$ практически совпадают, а осциллятор Z управляется осцилляторами X и Y, между которыми косвенной связи нет, а есть прямая связь.

Таким образом, в рассматриваемых конфигурациях однонаправленной связи трех взаимодействующих осцилляторов идентичных систем для коэффициентов связи $0.03 \le \mu \le 0.1$ и неидентичных систем для коэффициентов связи $0.07 < \mu \le 0.1$ выявлены следующие соотношения: $\Delta_1 = \Delta MCR(X|Y)_Z - \Delta MCR(X|Z)_Y < 0$ для первого и второго вариантов, $\Delta_1 > 0$ для третьего варианта; $\Delta_2 = \Delta MCR(Y|X)_Z - \Delta MCR(Y|Z)_X < 0$ для первого и второго вариантов и $\Delta_2 > 0$ для третьего варианта; $\Delta_3 = \Delta MCR(Z|X)_Y - \Delta MCR(Z|Y)_X < 0$ для первого варианта, $\Delta_3 > 0$ для второго варианта, $\Delta_3 \approx 0$ для третьего варианта.

Полученные результаты совпадают с оценкой соотношений между частичными условными вероятностями рекуррентностей, выполненной в работе [1] для трех идентичных хаотических систем Лоренца. Это свидетельствует о правильности вычисления частичных условных вероятностей рекуррентностей для выявления структуры связи трехосцилляторной сети с известными однонаправленными связями для идентичных систем и о меньшей возможности выявления структуры связи для неидентичных систем.

2.2. Определение конфигурации направленной связи ритмов нервной, сердечно-сосудистой и дыхательной систем за счет связи временных рядов *NAV*, *BPV*, *RES*

Исходные экспериментальные данные, зарегистрированные для двух групп крыс (контрольной группы и группы с патологическим состоянием в форме экспериментально вызванного колита), подробно описаны в работах [7,8,38]. Анализ нейрональной активности ретикулярной формации продолговатого мозга связан с тем, что именно в этой области находятся нейроны, связанные с патологией кишечника, т.е. с колитом. Анализируемые в настоящей работе временные ряды вариабельности нейрональной активности (NAV) продолговатого мозга и артериального давления (BPV) означают временные последовательности, полученные на

основе нахождения локальных максимумов нейрональной активности и колебаний артериального давления. Неэквидистантные последовательности преобразуются в эквидистантные последовательности с использованием аппроксимации кубическими сплайнами и удалением нелинейных трендов.

В настоящей работе для выявления конфигурации тройных связей мы использовали для каждой группы 15 временных рядов BPV, NAV, RES длительностью 55 s с полосовой фильтрацией в диапазоне [1,2.5] Hz с основными частотами, близкими к частоте дыхательного ритма (RES) и нормализацией для обеспечения одинаковой амплитуды, предпочтительной для анализа рекуррентностей [39].

В предыдущих работах [7,8,38] эти данные были использованы для выявления фазовой синхронизации между попарными временными рядами, в работах [7,35,36] для определения направленности влияния сигналов одной системы на другую и выяснения изменения характеристик взаимосвязи во время болевого воздействия. При этом мы выявили статистически значимые однонаправленные парные связи $RES \to BPV$ или $BPV \to NAV$ в большем количестве анализируемых наборов данных, по сравнению с двунаправленными парными связями [7,35]. В настоящей работе для определения вариантов конфигурации тройных взаимодействий применены временные ряды BPV, NAV и RES с ранее рассчитанным преобладающим влиянием дыхательного ритма на вариабельность артериального давления или с влиянием вариабельности артериального давления на вариабельность нейрональной активности, т.е. при наличии парных связей $RES \to BPV$ или $BPV \to NAV$.

Для определения конфигурации направленной связи для трех временных рядов NAV, BPV, RES вычислены значения оптимальных параметров размерности вложения m и временной задержки d, равные в среднем $m_1 = 3$, $d_1 = 20$ для RES, $m_2 = 4$, $d_2 = 17$ для BPV, $m_3 = 5$, $d_3 = 15$ для NAV. Матрицы совместных рекуррентностей вычислялись при значениях $m = \max\{m_1, m_2, m_3\} = 5$ и $d = \min\{d_1, d_2, d_3\} = 15$. Для вычисления MCR пороговые значения были выбраны $\varepsilon_X = \varepsilon_Y = \varepsilon_Z = \varepsilon = 0.1$.

Гистограммы вероятностей рекуррентностей $P_{RES}(\tau)$, $P_{BPV}(\tau)$ и $P_{NAV}(\tau)$ построены при пороговом значении $\varepsilon = 0.3$ для улучшения визуализации гистограмм.

На рис. 5 представлены короткие фрагменты временных рядов RES (рис. 5, a), BPV (рис. 5, b) и NAV (рис. 5, c) для данных A из контрольной группы, а также гистограммы вероятностей рекуррентностей для парных временных рядов $P_{RES}(\tau)$ (черная штрихпунктирная кривая), $P_{BPV}(\tau)$ (синяя кривая) и $P_{NAV}(\tau)$ (красная кривая) (рис. 5, d–f). Видно, что максимумы попарных вероятностей не совпадают. $CPR_{RES-BPV} = 0.183$, $CPR_{BPV-NAV} = 0.072$, $CPR_{RES-NAV} = 0.231$ меньше 0.6, что свидетельствует об отсутствии фазовой синхронизации между RES и BPV, BPV и NAV, и RES и NAV.

Полученные соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей этих временных рядов соответствуют неравенствам:

$$\Delta MCR(RES|BPV)_{NAV} = 0.079 < \Delta MCR(RES|NAV)_{BPV} = 0.269,$$

$$\Delta MCR(BPV|RES)_{NAV} = 0.062 < \Delta MCR(BPV|NAV)_{RES} = 0.354,$$

$$\Delta MCR(NAV|RES)_{BPV} = 0.053 < \Delta MCR(NAV|BPV)_{RES} = 0.196,$$

свидетельствующим о наличии двух прямых связей $RES \to BPV$ и $RES \to NAV$ и отсутствию связей между временными рядами BPV и NAV, т.е. полученные результаты соответствуют первому варианту конфигурации (рис. 2).

Гистограммы вероятностей рекуррентностей для парных временных рядов $P_{RES}(\tau)$ (черная кривая), $P_{BPV}(\tau)$ (синяя кривая) и $P_{NAV}(\tau)$ (красная кривая) для крысы B из контрольной группы (рис. 6, a–c) и для крысы C из группы с колитом (рис. 6, d–f) также показывают несовпадение максимумов попарных вероятностей и отсутствие фазовой синхронизации. Показатели фазовой синхронизации для крысы B равны $CPR_{RES-BPV} = 0.169$, $CPR_{BPV-NAV} = 0.108$, $CPR_{RES-NAV} = 0.214$, а для крысы C равны $CPR_{RES-BPV} = 0.325$, $CPR_{BPV-NAV} = 0.087$, $CPR_{RES-NAV} = 0.207$.

Вычисленные соотношения между частичными условными вероятностями рекуррентностей временных рядов RES, BPV и NAV для крысы B из контрольной группы соответствуют неравенствам:

$$\Delta MCR(RES|BPV)_{NAV} = 0.193 > \Delta MCR(RES|NAV)_{BPV} = 0.081,$$

$$\Delta MCR(BPV|RES)_{NAV} = 0.247 > \Delta MCR(BPV|NAV)_{RES} = 0.025,$$

$$\Delta MCR(NAV|RES)_{BPV} = 0.057 \approx \Delta MCR(NAV|BPV)_{RES} = 0.063,$$

что свидетельствует о наличии трех прямых связей $RES \to BPV$, $RES \to NAV$ и $BPV \to NAV$, т.е. полученные результаты соответствуют третьему варианту конфигурации (рис. 4).

Для временных рядов RES, BPV и NAV крысы C из группы с колитом получены неравенства:

$$\Delta MCR(RES|BPV)_{NAV} = 0.104 < \Delta MCR(RES|NAV)_{BPV} = 0.416,$$

$$\Delta MCR(BPV|RES)_{NAV} = 0.135 < \Delta MCR(BPV|NAV)_{RES} = 0.319,$$

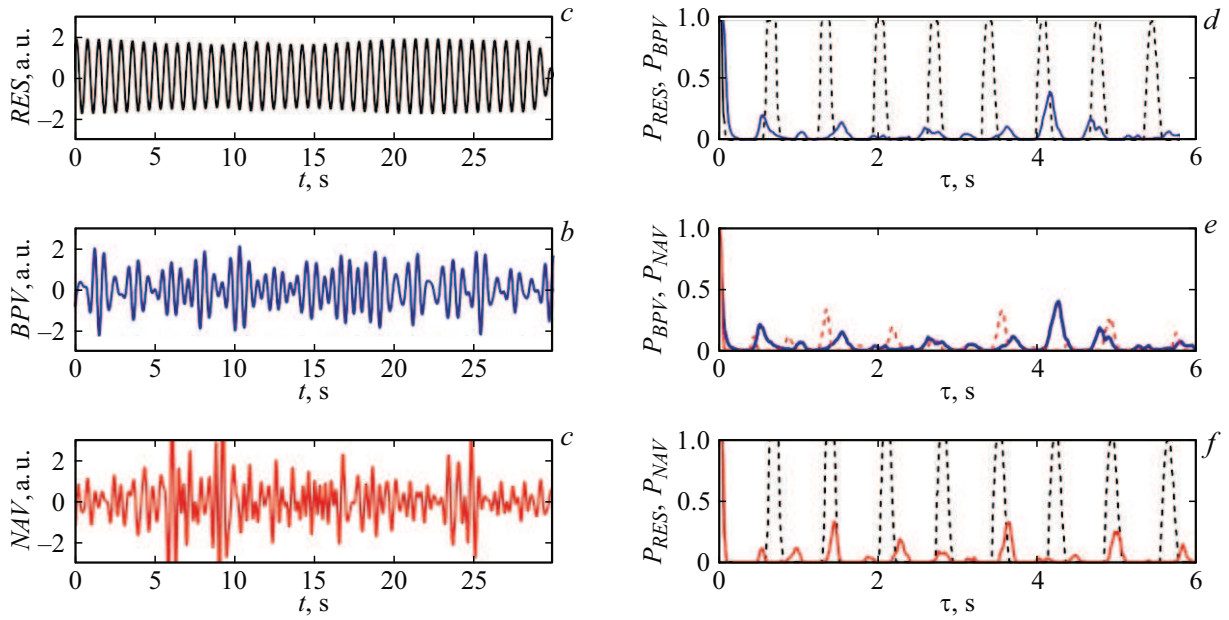


Рис. 5. Фрагменты временных рядов RES (a), BPV (b) и NAV (c) для крысы A из контрольной группы. Гистограммы вероятностей рекуррентностей $P_{RES}(\tau)$ (черная штрихпунктирная кривая), $P_{BPV}(\tau)$ (синяя кривая) и $P_{NAV}(\tau)$ (красная кривая) (d–f).

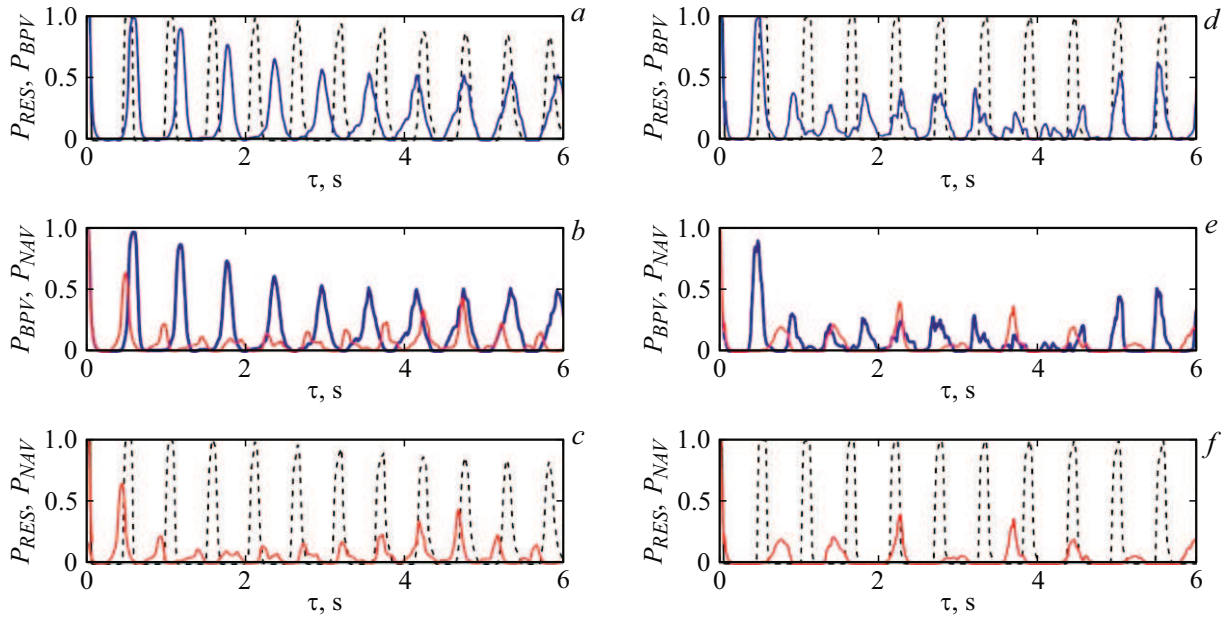


Рис. 6. Гистограммы вероятностей рекуррентностей $P_{RES}(\tau)$ (черная штрихпунктирная кривая), $P_{BPV}(\tau)$ (синяя кривая) и $P_{NAV}(\tau)$ (красная кривая) для крысы B из контрольной группы (a–c) и для крысы C из группы с колитом (d–f).

$$\Delta MCR(NAV|RES)_{BPV} = 0.163 > \Delta MCR(NAV|BPV)_{RES} = 0.011,$$

подтверждающие наличие двух прямых связей $RES \to BPV$ и $BPV \to NAV$, т.е. соответствующие второму варианту конфигурации (рис. 3).

В таблице показаны усредненные значения разностей Δ_1, Δ_2, Δ_3, указывающих соотношения в рассматриваемых конфигурациях трех взаимодействующих временных рядов RES, BPV и NAV в форме соотношений

$$\Delta_1 = \Delta MCR(RES|BPV)_{NAV} - \Delta MCR(RES|NAV)_{BPV},$$

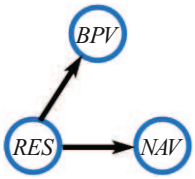
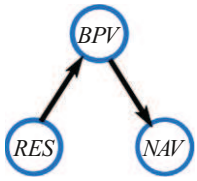
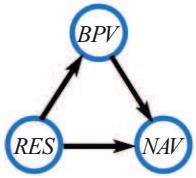
$$\Delta_2 = \Delta MCR(BPV|RES)_{NAV} - \Delta MCR(BPV|NAV)_{RES},$$

$$\Delta_3 = \Delta MCR(NAV|RES)_{BPV} - \Delta MCR(NAV|BPV)_{RES},$$

вычисленных для контрольной группы и группы колита.

Для оценки статистической значимости Δ_1, Δ_2, Δ_3 применен статистический тест с созданием 100 суррогатных

Усредненные значения разностей Δ_1, Δ_2 и Δ_3 для трех конфигураций связей между временными рядами RES, BPV и NAV для контрольной группы и группы с колитом с указанием количества конфигураций с подтвержденной статистической значимостью

Конфигурации				
Контроль		6 из 15	0 из 15	7 из 15
	Δ_1	-0.19 ± 0.04	–	0.14 ± 0.04
	Δ_2	-0.31 ± 0.06	–	0.21 ± 0.05
	Δ_3	-0.15 ± 0.04	–	-0.005 ± 0.002
Колит		2 из 15	5 из 15	6 из 15
	Δ_1	-0.36 ± 0.07	-0.34 ± 0.06	0.28 ± 0.05
	Δ_2	-0.24 ± 0.05	-0.18 ± 0.03	0.37 ± 0.06
	Δ_3	-0.29 ± 0.06	0.16 ± 0.04	0.007 ± 0.002

временных рядов для каждого анализируемого сигнала на основе рекуррентностей [43]. Величина Δsur_j вычислялась для суррогатов $RESsur_j$, $BPVsur_j$ и $NAVsur_j$. Затем проверялось соответствие нормальному распределению соответствующих значений Δsur и 95%-ный квантиль этого распределения

$$Z = \left|\Delta - \overline{\Delta_{sur}}\right| / \sigma_{sur} > 1.96,$$

при выполнении которого значение Δ считалось статистически значимым ($\overline{\Delta_{sur}}$ — среднее и σ_{sur} — стандартное отклонения).

Использование суррогатов временных рядов RES, BPV и NAV подтвердило статистическую значимость полученных соотношений, поскольку рассчитанные значения тестовой статистики $Z_{\Delta_1} > 1.96$, $Z_{\Delta_2} > 1.96$, $Z_{\Delta_3} > 1.96$.

Для контрольной группы первый вариант конфигурации с подтвержденной статистической значимостью выявлен для 6 из 15 данных ($\Delta_1 = (-0.19 \pm 0.04) < 0$; $\Delta_2 = (-0.31 \pm 0.06) < 0$; $\Delta_3 = (-0.15 \pm 0.04) < 0$); второй вариант конфигурации не подтвержден статистической значимостью; третий вариант конфигурации ($\Delta_1 = (0.14 \pm 0.04) > 0$; $\Delta_2 = (0.21 \pm 0.05) > 0$; $\Delta_3 = (-0.005 \pm 0.002) \approx 0$) обнаружен для 7 из 15 данных.

Для группы с колитом первый вариант конфигурации определен с подтвержденной статистической значимостью для 2 из 15 данных ($\Delta_1=(-0.36 \pm 0.07)<0$; $\Delta_2=(-0.24 \pm 0.05)<0$; $\Delta_3=(-0.29 \pm 0.06)<0$); второй вариант ($\Delta_1=(-0.34 \pm 0.06)<0$; $\Delta_2=(-0.18 \pm 0.03)<0$; $\Delta_3=(0.16 \pm 0.04)>0$) выявлен для 5 из 15 данных; третий вариант ($\Delta_1 = (0.28 \pm 0.05) > 0$; $\Delta_2 = (0.37 \pm 0.06) > 0$; $\Delta_3 = (0.007 \pm 0.002) \approx 0$) обнаружен для 6 из 15 данных.

Таким образом, установлено, что в большинстве контрольных данных и данных группы с патологическим состоянием в форме колита дыхательная система оказывает влияние на изменчивость колебаний сердечно-сосудистой и нервной систем одновременно, а изменчивость колебаний сердечно-сосудистой системы оказывает дополнительное влияние на изменчивость нейрональной активности продолговатого мозга.

Установлено также, что патологическое состояние может приводить к возникновению влияния изменчивости артериального давления как посредника передачи информации от дыхательного ритма на изменчивость нейрональной активности при отсутствии прямой связи между осцилляторами дыхательной и нервной систем.

Преимущественное влияние дыхательного ритма на нейрональную активность мозга и ее связь с вариабельностью сердечного ритма рассмотрено с физиологической точки зрения в работе [34], в которой приведены физиологические доказательства того, что дыхание может выполнять фундаментальную роль в координации нейрональной активности мозга, модулируя различные частотные диапазоны. Эффекты влияния дыхательных колебаний на нейрональную активность могут быть связаны с вариабельностью сердечного ритма в норме и при психических расстройствах.

Примененный ранее традиционный парный анализ для тех же экспериментальных наборов данных не выявил различий в однонаправленных парных связях при отсутствии и наличии патологического состояния, такого как колит [7,35]. В отличие от попарного анализа проведенный здесь тройной анализ позволил нам выявить различия в связях при отсутствии и наличии патологического состояния в виде колита.

Заключение

На основании использования двух моделей трех взаимосвязанных структурно одинаковых и структурно различных систем (осцилляторов Ресслера и осцилляторов Ван дер Поля и Ресслера) с известными однонаправленными связями проведена проверка правильности определения структуры связи трехосцилляторной сети по методу вычисления частичных условных вероятностей рекуррентностей фазовых траекторий и правильности определения структуры связи трехосцилляторной сети.

Этот метод, примененный к экспериментальным временным рядам для трех биологических осцилляторов, позволил выявить варианты конфигураций тройных связей этих осцилляторов для двух групп крыс (контрольной группы и группы с патологическим состоянием, связанным с экспериментальным колитом).

Для контрольной группы примерно в половине наборов данных обнаружено, что дыхательная система одновременно влияет на сердечно-сосудистую и нервную системы, т.е. флуктуации дыхания одновременно обусловливают изменчивость артериального давления и изменчивость нейронной активности нейронов продолговатого мозга. В другой половине данных контрольной группы тройная связь заключается в одновременном влиянии дыхательной и сердечно-сосудистой систем на изменчивость нейрональной активности и дополнительном одновременном влиянии дыхания на вариабельность артериального давления.

Роль артериального давления как посредника при влиянии дыхательного ритма на нейрональную активность без прямой связи колебаний дыхательной и нервной систем выявлена в данных группы с патологическим состоянием в форме колита. Этот вариант тройной конфигурации не обнаружен в контрольных данных.

Использование методов тройного анализа позволило определить влияние патологических состояний на тройные взаимодействия между вариабельностью артериального давления, дыхательными колебаниями и вариабельностью нейронной активности продолговатого мозга. Методы парного анализа, ранее примененные к этим данным в работах [7,35], не смогли выявить различия в однонаправленных парных связях при отсутствии или при наличии патологического состояния в форме колита.

Выявленные конфигурации связей, определяющие комбинированное влияние сердечно-сосудистых и дыхательных ритмов на изменчивость нейрональной активности продолговатого мозга при патологическом состоянии в форме колита, демонстрируют потенциал использования метода тройного анализа с использованием частичных условных вероятностей рекуррентностей фазовых траекторий для выявления взаимосвязей между реальными многомерными биологическими сигналами. Полученные результаты представляют интерес для изучения возможных нарушений взаимодействия биологических систем при развитии патологических состояний.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Минобразования РФ № 1021062411784-3-3.1.8 и № FFUG-2024-0021.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Y. Zou, M.C. Romano, M. Thiel, N. Marwan, J. Kurths. Int. J. Bif. Chaos, **21** (4), 1099 (2011). DOI: 10.1142/S0218127411029033
[2] B. Kralemann, A. Pikovsky, M. Rosenblum. New J. Phys., **16**, 085013 (2014). DOI: 10.1088/1367-2630/16/8/085013
[3] M. Rosenblum, A. Pikovsky. Front. Netw. Physiol., **3**, 1298228 (2023). DOI: 10.3389/fnetp.2023.1298228
[4] K. Lehnertz. Physiol. Meas., **32**, 1715 (2011). DOI: 10.1088/0967-3334/32/11/R01
[5] B. Kralemann, M. Frühwirth, A. Pikovsky, M. Rosenblum, T. Kenner, J. Schaefer, M. Moser. Nature Commun., **4**, 2418 (2013). DOI: 10.1038/ncomms3418
[6] V.I. Ponomarenko, A.S. Karavaev, E.I. Borovkova, A.N. Hramkov, A.R. Kiselev, M.D. Prokhorov, T. Penzel. Chaos, **31**, 073105 (2021). DOI: 10.1063/5.0056624
[7] O.E. Dick, A.L. Glazov. Chaos, Solitons and Fractals, **173**, 113768-1 (2023). DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113768
[8] О.Е. Дик, А.Л. Глазов. ЖТФ, **93** (10), 1520 (2023). DOI: 10.61011/JTF.2023.10.56291.144-23
[9] H. Osterhage, F. Mormann, T. Wagner, K. Lehnertz. Phys. Rev. E, **77**, 011914 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevE.77.011914
[10] M. Martini, T.A. Wagner, K. Lehnertz. Phys. Rev. E, **83**, 011919 (2011).
[11] D. Chicharro, R. Andrzejak, A. Ledberg. BMC Neurosci., **12**, 192 (2011).
[12] J. Runge, J. Heitzig, N. Marwan, J. Kurths. Phys. Rev. E, **86**, 061121 (2012).
[13] L. Faes, G. Nollo, A. Porta. Phys. Rev. E, **83**, 051112 (2011).
[14] R.Q. Quiroga, J. Arnhold, P. Grassberge. Phys. Rev. E, **61**, 5142 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevE.61.5142
[15] M. Paluš, M. Vejmelka. Phys. Rev. E, **75**, 056211 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevE.75.056211
[16] M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, C. Grebogi. Phys. Rev. E, **76**, 036211 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevE.76.036211
[17] R.P. Bartsch, A.Y. Schumann, J.W. Kantelhardt, T. Penzel, P.C. Ivanov. Proc. Natl. Acad. Sci., **109**, 10181 (2012).
[18] F. Bahraminasab, A. Ghasemi, A. Stefanovska, P.V.E. McClintock, H. Kantz. Phys. Rev. Lett., **100**, 084101 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.084101
[19] B. Kralemann, A. Pikovsky, M. Rosenblum. Chaos, **21**, 025104 (2011). DOI: 10.1063/1.3597647
[20] Е.В. Навроцкая, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко. Известия вузов ПНД, **27** (1), 41 (2019).
[21] Е.В. Сидак, Д.А. Смирнов, Б.П. Безручко. Радиотехника и электроника, **62** (3), 248 (2017).

[22] M. Angelova, P.M. Holloway, S. Shelyag, S. Rajasegarar, H.G.L Rauch. Front. Physiol., **12**, 612245 (2021). DOI: 10.3389/fphys.2021.612245
[23] O.E. Dick, A.L. Glazov. Neurocomputing, **455**, 163 (2021). DOI: 10.1016/j.neucom.2021.05.038
[24] A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, V.V. Grubov, O.I. Moskalenko, E. Sitnikova, A.N. Pavlov. Phys. Rev. E, **93**, 032220 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevE.93.032220
[25] N. Marwan, Y. Zou, N. Wessel, M. Riedl, J. Kurths. Phil. Trans. R. Soc. A, **371**, 20110624 (2013). DOI: 10.1098/rsta.2011.0624
[26] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky. Phys. Rev. E, **64**, 045202 (2001).
[27] M.G. Rosenblum, L. Cimponeriu, A. Bezerianos, A. Patzak, R. Mrowka. Phys. Rev. E, **65**, 041909 (2002).
[28] M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, I.Z. Kiss, J.L. Hudson. Europhys. Lett., **71**, 466 (2005). DOI: 10.1209/epl/i2005-10095-1
[29] D.A. Smirnov, B.P. Bezruchko. Phys. Rev. E, **68**, 046209 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046209
[30] A.J. Ocon, M.S. Medow, I. Taneja, J.M. Stewart. Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol., **300**, 527 (2011). DOI: 10.1152/ajpheart.00257.2010
[31] Е.В. Навроцкая, А.С. Караваев, М.В. Шинкин, Е.И. Боровкова, Б.П. Безручко. Известия Саратов. ун-та. Серия: Физика, **22** (1), 4 (2022). DOI: 10.18500/1817-3020-2022-22-1-4-14
[32] M.D. Prokhorov, E.I. Borovkova., A.N. Hramkov, E.S. Dubinkina, V.I. Ponomarenko, Y.M. Ishbulatov, A.V. Kurbako, A.S. Karavaev. Appl. Sci., **13**, 8390 (2023). DOI: 10.3390/app13148390
[33] E.I. Borovkova, A.N. Hramkov, E.S. Dubinkina, V.I. Ponomarenko, B.P. Bezruchko, Y.M. Ishbulatov, A.V. Kurbako, A.S. Karavaev, M.D. Prokhorov. Eur. Phys. J. Spec. Top., **232**, 625 (2023). DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00734-z
[34] J. Goheen, J.A.E. Anderson, J. Zhang, G. Northoff. Neuroscience Bull., **39**, 1577 (2023). DOI: 10.1007/s12264-023-01070-5.
[35] О.Е. Дик. Известия вузов. ПНД, **33** (3), 381 (2025). DOI: 10.18500/0869-6632-003165
[36] О.Е. Дик, А.Л. Глазов. ЖТФ, **94** (11), 1935 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.11.59111.255-24
[37] Е.Д. Илларионова, О.И. Москаленко. Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Физика, **25** (3), 288 (2025). DOI: 10.18500/1817-3020-2025-25-3-288-294
[38] О.Е. Дик, А.Л. Глазов. ЖТФ, **93** (6), 840 (2023). DOI: 10.21883/JTF.2023.06.55611.40-23
[39] N. Marwan, M.C. Romano, M. Thiel, J. Kurths. Phys. Rep., **438**, 237 (2007). DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001
[40] F. Takens. *Dynamical Systems and Turbulence Lecture Notes in Mathematics* (Springer-Verlag, Berlin, 1981)
[41] A.M. Fraser, H.L. Swinney. Phys. Rev., **33**, 1134 (1986).
[42] M.B. Kennel, R. Brown, H.D. Abarbanel. Phys. Rev. A, **45**, 3403 (1992).
[43] M. Thiel, M.C. Romano, J. Kurths, M. Rolfs, R. Klieg. Philos. Trans. R Soc. A, **366**, 545 (2008).