

03

# Аналитическая модель конвекции от нестационарного наклонного источника плавучести

© Л.Х. Ингель,<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Научно-производственное объединение „Тайфун“, 249038 Обнинск, Калужская обл., Россия

<sup>2</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия  
e-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступило в Редакцию 20 февраля 2026 г.

В окончательной редакции 21 марта 2026 г.

Принято к публикации 7 мая 2026 г.

Найдено и проанализировано аналитическое решение нестационарной одномерной задачи конвекции от наклонного объемного источника плавучести в неограниченной устойчиво стратифицированной среде в приближении Буссинеска. Задача имеет, в частности, геофизические приложения. Свойства решения могут быть весьма разнообразными в зависимости от соотношения толщины источника и пространственных масштабов, определяемых вязкостью, теплопроводностью и фоновой стратификацией среды, а также характерным временем вариаций интенсивности источника. Одно из нетривиальных свойств решения — возможность интенсификации возникающего наклонного течения при уменьшении угла наклона источника к горизонту.

**Ключевые слова:** свободная конвекция, устойчиво стратифицированная среда, объемный источник плавучести, наклонная струя, нестационарность, точное решение.

DOI: 10.61011/JTF.2026.08.63359.35-26

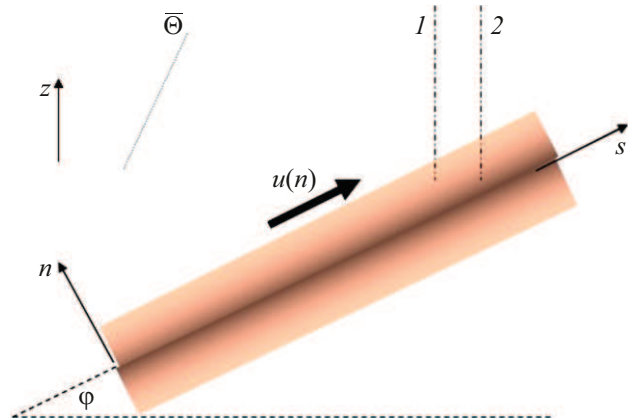
## Введение

Известно относительно немного случаев, когда уравнения, описывающие свободную конвекцию, допускают точное аналитическое решение. Как правило, это возможно в задачах с достаточно высокой степенью симметрии, например, при описании конвекции, вызываемой вертикально-однородным или горизонтально-однородным источником плавучести [1]. В настоящей работе найдено аналитическое решение нестационарной одномерной задачи о конвекции от наклонного объемного источника плавучести в бесконечной устойчиво стратифицированной среде. Одно из возможных приложений — конвекция, возникающая при прохождении интенсивного пучка электромагнитных волн через поглощающую, например, облачную среду (см., например, [2–4]). Другой пример — для развития и поддержания влажной конвекции в атмосфере, приводящей к опасным конвективным явлениям, как известно [5], бывает весьма важен вертикальный сдвиг скорости фонового ветра, приводящий к наклонному характеру конвекции и тепловыделению фазовых переходов.

## 1. Постановка задачи

Задача в некоторых отношениях близка к известным задачам о конвекции над бесконечной плоской наклонной поверхностью в полубесконечной устойчиво стратифицированной среде [6–8]. Источник/сток плавучести

в этих задачах обычно находится на нижней наклонной границе. Но в данном случае рассматривается конвекция от объемного источника/стока плавучести в безграничной среде (рис. 1). Фоновый вертикальный градиент температуры (в атмосфере — потенциальной температуры  $\bar{\Theta}$  [6]) отвечает однородной фоновой устойчивой стратификации;  $d\bar{\Theta}/dz \equiv \gamma > 0$ , где ось  $z$  направлена вертикально вверх. Источник/сток тепла/плавучести ориентирован вдоль оси  $s$ ; его интенсивность зависит от координаты вдоль перпендикулярной к  $s$  оси  $n$ . Предполагается, что источник/сток не слишком интенсивен по абсолютной величине, так что стратификация всюду



**Рис. 1.** Схематическое изображение геометрии задачи. Затупевана область тепловыделения.

остаётся устойчивой (это легко проконтролировать после того как решение будет найдено).

Вследствие горизонтально-неоднородного тепловыделения, вес двух соседних столбов среды ( $I, 2$  на рис. 1), в разной степени нагретых, может различаться. Столб 2, который в большей степени включает нагретую область, очевидно, должен весить меньше, чем  $I$ . Следовательно, возникает сила горизонтального градиента гидростатического давления, направленная на рис. 1 слева направо. Она имеет составляющую, направленную вверх вдоль оси  $s$ , так что можно ожидать возникновения наклонного восходящего течения вдоль этой оси (на рисунке  $u(n)$ ). Подчеркнем, что, хотя используется термин „конвекция“, речь не идет о возникновении конвективной неустойчивости. Стратификация при не слишком большой интенсивности источника плавучести всюду остаётся устойчивой, а течение возникает благодаря возникновению горизонтального градиента давления. Это аналогично механизму возникновения известных в метеорологии восходящих так называемых анабатических ветров над нагретой наклонной подстилающей поверхностью, но в данном случае нет нижней границы, которая, с одной стороны, нагревает среду, но с другой — тормозит возникающее течение благодаря вязкости. Иными словами, если сравнивать с классической моделью склоновых течений Прандтля [6,7], здесь вместо нагрева от поверхности присутствует объёмный источник плавучести и в то же время отсутствует сток количества движения на нижней границе. Кроме того, в отличие от упомянутых работ, мы не ограничиваемся здесь стационарной задачей.

Соответствующим образом модифицированная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \alpha g \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma u \sin \varphi &= \kappa \frac{d^2 \theta}{dn^2} + Q(n, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время; ось  $n$  перпендикулярна наклонной поверхности;  $u$  — составляющая скорости вдоль оси  $s$ , направленной вверх по склону;  $\theta$  — отклонение от фона температуры (для воздуха — потенциальной температуры);  $\nu, \kappa$  — коэффициенты обмена (предполагаются здесь постоянными);  $\alpha$  — термический коэффициент расширения среды,  $g$  — ускорение свободного падения. Интенсивность объёмного источника/стока тепла  $Q(n, t)$  предполагается достаточно быстро затухающей вдали от плоскости  $n = 0$ .

Система уравнений (1) отличается от модели склоновых течений Прандтля [6,7], прежде всего, наличием дополнительного объёмного источника тепла  $Q$  (постановка задачи отвечает его симметрии), а поскольку источник может быть нестационарным, в уравнения добавились производные по времени. Физический смысл системы (1) вполне прозрачен. Согласно первому уравнению, сила плавучести (другими словами, составляющая силы градиента давления в направлении оси  $s$ )

уравновешивается силами вязкости. Во втором уравнении объёмное тепловыделение, помимо диффузии тепла, компенсируется адвекцией снизу (вдоль оси источника) более холодной среды („адиабатическое охлаждение“).

Отметим, что система уравнений гидродинамики и переноса тепла свелась к линейной системе (1) только за счёт симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений. Но при достаточно большой интенсивности источника/стока плавучести решение может терять устойчивость, прежде всего, при нарушении предполагаемой устойчивости стратификации.

Вдали от источника плавучести предполагается затухание возмущений:

$$u, \theta \Big|_{|n| \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Рассматриваем простейшую нестационарную модель, допускающую аналитическое решение — источник, экспоненциально зависящий от времени:

$$Q(n, t) = \tilde{Q}(n) \exp(t/\tau). \quad (3)$$

## 2. Решение

Ищем решение, которое, как и (3), экспоненциально зависит от времени:

$$u = U(n) \exp(t/\tau), \quad \theta = \Theta(n) \exp(t/\tau), \quad (4)$$

где  $U(n), \Theta(n)$  — искомые амплитудные функции. С учётом первого уравнения (1):

$$\Theta(n) = \frac{1}{\alpha g \sin \varphi} \left[ \frac{U(n)}{\tau} - \nu \frac{d^2 U(n)}{dn^2} \right]. \quad (5)$$

Исключая из системы переменную  $\Theta(n)$ , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^4 U}{dn^4} - \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{d^2 U}{dn^2} + \frac{1 + \tau^2 N^2 \sin^2 \varphi}{\kappa \nu \tau^2} U \\ = \frac{\alpha g \sin \varphi}{\kappa \nu} \tilde{Q}(n), \end{aligned} \quad (6)$$

где частота плавучести (частота Брента–Вяйсяля)  $N = (\alpha g \gamma)^{1/2}$ .

В общем случае решение весьма громоздко. Имеет смысл рассмотреть следующий модельный профиль источника:

$$\tilde{Q}(n) = Q_0 \exp(\mp n/h_Q), \quad (7)$$

где смысл постоянных  $Q_0$  и  $h_Q$  достаточно очевиден; верхний и нижний знаки относятся к областям  $n > 0$  и  $n < 0$  соответственно. Эффективная толщина источника плавучести порядка  $h_Q$ .

Стандартным образом отыскиваем решение уравнения (6) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного  $U_n(n)$ .

Последнее ищем в виде, пропорциональном экспонентам  $\exp(\mp n/h_Q)$ . Нетрудно получить

$$U_n(n) = V \exp(\mp n/h_Q),$$

где масштаб скорости

$$V = \frac{N^2 h_Q^4 Q_0 \sin \varphi}{\kappa \nu \gamma \left[ 1 - \frac{h_Q^2 (\kappa + \nu)}{\tau \kappa \nu} + \frac{h_Q^4}{\tau^2 \kappa \nu} M^2 \right]}, \quad (8)$$

введены обозначения для безразмерных комбинаций

$$M = (1 + \chi^2)^{1/2}, \quad \chi = \tau N \sin \varphi. \quad (9)$$

Решение упомянутого однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию экспонент  $\exp(\sigma_i, n)$ , где  $\sigma_i$  — корни характеристического уравнения

$$\sigma^4 - \frac{1}{\tau \nu} (1 + \text{Pr}) \sigma^2 + \frac{M^2}{\kappa \nu \tau^2} = 0, \quad (10)$$

число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\kappa$ . Из биквадратного уравнения (10):

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\tau \nu} \left\{ 1 + \text{Pr} \pm \left[ (1 - \text{Pr})^2 - 4\text{Pr}\chi^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (11)$$

Ограничимся здесь относительно простым случаем  $\nu = \kappa$ ,  $\text{Pr} = 1$ . Этот случай представляет особый интерес, поскольку при описании турбулентного обмена в атмосфере эффективные коэффициенты обмена  $\nu$ ,  $\kappa$  обычно предполагаются примерно равными. В этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \pm \frac{1}{(\tau \nu)^{1/2}} (1 \pm i\chi)^{1/2} = \pm \frac{M^{1/2}}{(\tau \nu)^{1/2}} \left( \frac{1}{M} \pm i \frac{\chi}{M} \right)^{1/2} \\ &= \pm \frac{M^{1/2}}{(\tau \nu)^{1/2}} \exp\left(\pm i \frac{\xi}{2}\right) \\ &= \pm \frac{1}{(2\tau \nu)^{1/2}} \left[ (M + 1)^{1/2} \pm i(M - 1)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\xi = \arcsin(\chi/M)$ , так что

$$\begin{aligned} \sin(\xi/2) &= [(M - 1)/(2M)]^{1/2}, \\ \cos(\xi/2) &= [(M + 1)/(2M)]^{1/2}. \end{aligned}$$

С учетом условия затухания возмущений при  $|n| \rightarrow \infty$  коэффициенты при растущих вдали от оси источника  $n = 0$  экспонентах следует принять равными нулю. Поэтому из четырех экспонент с показателями  $\sigma_i n$  в решение выше и ниже этой оси входят только по две:

$$\begin{aligned} U(n) &= \\ &\begin{cases} V[D_1 \exp(\sigma_1 n) + D_2 \exp(\sigma_2 n) + \exp(-n/h_Q)] & \text{при } n > 0, \\ V[D_3 \exp(\sigma_3 n) + D_4 \exp(\sigma_4 n) + \exp(n/h_Q)] & \text{при } n < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $D_i$  — константы интегрирования,

$$\sigma_{1,2} = -\frac{1}{(2\tau \nu)^{1/2}} \left[ (M + 1)^{1/2} \pm i(M - 1)^{1/2} \right],$$

$$\sigma_{3,4} = \frac{1}{(2\tau \nu)^{1/2}} \left[ (M + 1)^{1/2} \pm i(M - 1)^{1/2} \right].$$

Постоянные интегрирования находятся из условий гладкой сшивки переменных  $u(n, t)$ ,  $\theta(n, t)$  при  $n = 0$ . Нетрудно видеть, что последнее означает непрерывность при  $n = 0$  не только функции  $U(n)$ , но и первых трех ее производных. Это сводится к решению алгебраической системы:

$$D_1 + D_2 - D_3 - D_4 = 0,$$

$$\sigma_1 D_1 + \sigma_2 D_2 - \sigma_3 D_3 - \sigma_4 D_4 = 2/h_Q,$$

$$\sigma_1^2 D_1 + \sigma_2^2 D_2 - \sigma_3^2 D_3 - \sigma_4^2 D_4 = 0,$$

$$\sigma_1^3 D_1 + \sigma_2^3 D_2 - \sigma_3^3 D_3 - \sigma_4^3 D_4 = 2/h_Q^3.$$

Нетрудно получить

$$D_1 = D_3 = \frac{i\delta}{2\chi M^{1/2}} \left[ \delta^2 - M \exp(-i\xi) \right] \exp(-i\xi/2),$$

$$D_2 = D_4 = \frac{i\delta}{2\chi M^{1/2}} \left[ -\delta^2 + M \exp(i\xi) \right] \exp(i\xi/2),$$

где безразмерный параметр  $\delta = (\tau \nu)^{1/2}/h_Q$ . Отметим, что последняя пара  $D_i$  комплексно-сопряжена первой.

Перепишем решение для области  $n > 0$  в более явном виде:

$$\begin{aligned} U(n) &= V \left\{ \frac{\delta M^{1/2}}{\chi} \left[ -\left( \frac{M + 1}{2\tau \nu} \right)^{1/2} n \right] \right. \\ &\times \left\langle \frac{\delta^2}{M} \sin \left[ \frac{\xi}{2} + \left( \frac{M - 1}{2\tau \nu} \right)^{1/2} n \right] \right. \\ &\left. \left. - \sin \left[ \frac{3}{2} \xi + \left( \frac{M - 1}{2\tau \nu} \right)^{1/2} n \right] \right\rangle + \exp\left(-\frac{n}{h_Q}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение в области  $n < 0$  симметрично относительно плоскости  $n = 0$ .

### 3. Анализ решения

Решение зависит от трех пространственных масштабов — характерной толщины источника плавучести  $h_Q$ , „вязкого“ (диффузионного) масштаба  $h_\nu = (\tau \nu)^{1/2}$  и определяемого фоновой стратификацией масштаба  $h = (2\nu/N \sin \varphi)^{1/2}$  (напомним, что ограничиваемся здесь случаем  $\kappa = \nu$ ). Свойства решения существенно зависят от соотношений этих масштабов  $\delta = h_\nu/h_Q$ ,  $\chi = 2(h_\nu/h)^2$  и

$$\lambda \equiv \frac{h_Q}{h} = \frac{h_Q (N \sin \varphi)^{1/2}}{(2\nu)^{1/2}}$$

и могут быть достаточно разнообразными.

Масштаб скорости (8) можно выразить в виде

$$V = \frac{4\lambda^4 Q_0}{\gamma \sin \varphi \left[ (1 - \delta^{-2})^2 + 4\lambda^4 \right]}$$

Остановимся сначала на важном частном случае стационарного решения ( $\tau \rightarrow \infty$ ). В этом случае масштаб  $h_v = (\tau \nu)^{1/2}$  много больше двух других упомянутых пространственных масштабов;  $M \rightarrow \chi \rightarrow \infty, \delta \rightarrow \infty, \xi \rightarrow \pi/2$

$$\left( \frac{M+1}{2\tau\nu} \right)^{1/2} \approx \left( \frac{M-1}{2\tau\nu} \right)^{1/2} \rightarrow \left( \frac{N \sin \varphi}{2\nu} \right)^{1/2} = \frac{1}{h},$$

$$V \rightarrow \frac{4Q_0 h_Q^4}{\gamma(h^4 + 4n_Q^4) \sin \varphi} = \frac{4\lambda^4 Q_0}{\gamma(1 + 4\lambda^4) \sin \varphi}. \quad (15)$$

Из (14) в этом пределе нетрудно получить (при  $n > 0$ ):

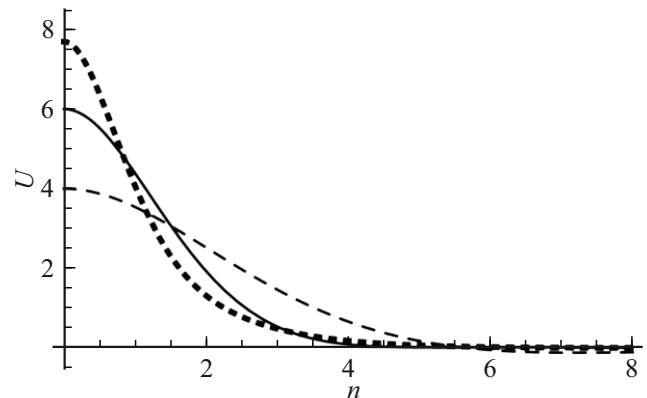
$$U(n) = \frac{4\lambda^4 Q_0}{\gamma(1 + 4\lambda^4) \sin \varphi} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{n}{h}\right) \times \left[ \left( \frac{1}{2\lambda^2} + 1 \right) \sin \frac{n}{h} + \left( \frac{1}{2\lambda^2} - 1 \right) \cos \frac{n}{h} \right] + \exp\left(-\frac{n}{h_Q}\right) \right\}, \quad (16)$$

$$\Theta(n) = -\frac{\nu V}{\alpha g h_Q^2 \sin \varphi} \left\{ \exp\left(-\frac{n}{h_Q}\right) + \lambda \left[ \left( -1 + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \sin \frac{n}{h} - \left( 1 + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \cos \frac{n}{h} \right] \times \exp\left(-\frac{n}{h}\right) \right\}. \quad (17)$$

Свойства этих профилей существенно зависят от  $\lambda$  — соотношения масштабов  $h_Q$  и  $h$ . Например, в случае достаточно толстой области тепловыделения, когда  $\lambda \gg 1$ , получаем

$$U(n) \approx V \exp\left(-\frac{n}{h_Q}\right) \approx \frac{Q(n)}{\gamma \sin \varphi}. \quad (18)$$

Интересно отметить, что с уменьшением угла наклона  $\varphi$  стационарное наклонное течение в этом пределе не ослабевает, а интенсифицируется. Это прозрачно объясняется следующим образом. При большой толщине источника диффузионное слагаемое во втором уравнении (1) несущественно, поэтому в стационарной задаче имеет место приближенный баланс между объемным тепловыделением и адиабатическим охлаждением (адвекцией):  $\gamma u \sin \varphi \approx Q(z)$ , откуда и следует (18). Чем меньше угол наклона течения, тем большей должна быть скорость, чтобы адвективное охлаждение успевало компенсировать действие источника. Иными словами, здесь реализуется вариант „режима с нейтральной плавучестью“, который (режим) обсуждался нами ранее



**Рис. 2.** Примеры безразмерных стационарных профилей скорости возникающих течений (нормированы на  $Q_0/\gamma$ ) при  $\sin \varphi = 0.1$ . Сплошная линия соответствует  $\lambda = 1$ , тонкая штриховая —  $\lambda = 0.5$ , толстая штриховая —  $\lambda = 2$ . Поперечная к источнику координата  $n$  нормирована на  $h_Q$ .

в случае вертикальных течений [9]. В этом режиме скорость подъема конвективного элемента поддерживается такой, что приращение плавучести, связанное с тепловыделением, компенсируется подъемом этого элемента в менее плотные слои среды, так что отклонение плавучести отсутствует.

Но следует иметь в виду, что с уменьшением угла наклона увеличивается масштаб  $h = (2\nu/N \sin \varphi)^{1/2}$ , так что убывает значение  $\lambda$ . Поэтому, когда угол становится достаточно малым, предполагавшее при выводе (18) условие  $\lambda \gg 1$  нарушается. Как видно из (16), при достаточно малых значениях  $\lambda$  скорость течения убывает с уменьшением этого параметра и, следовательно, стремится к нулю при дальнейшем уменьшении угла  $\varphi$ . В противоположном предельном случае источника, вытянутого по вертикали ( $\varphi = \pi/2$ ), из (18) следует  $U(n) \approx Q(n)/\gamma$ .

На рис. 2 представлены примеры профиля  $U(n)$  и отклонения температуры в области  $n > 0$  при различных значениях параметра  $\lambda$ .

Отметим, что если амплитуда скорости при прочих равных условиях монотонно растет с  $\lambda$ , то отклонение температуры, как видно из рис. 3, ведет себя иначе. Как нетрудно проверить, амплитуда последнего имеет максимум при  $\lambda \approx 0.707$ .

В качестве другого примера рассмотрим решение для существенно нестационарной задачи, когда  $h_v \ll h_Q, \delta \ll 1$ . Предполагаем также, что значение  $\chi \equiv 2(h_v/h)^2$  порядка единицы. Это означает, что  $M$  порядка единицы, а масштабы  $h$  и  $h_v$  одного порядка и оба много меньше  $h_Q; \lambda \gg 1$ . В этом случае, как нетрудно видеть:

$$V \sim \alpha g Q_0 \tau^2 \sin \varphi, \quad (19)$$

абсолютная величина показателя первой экспоненты в (14) порядка  $n/(2\tau\nu)^{1/2}$ . Коэффициент перед этой экспонентой мал, к тому же, она быстро убывает вне

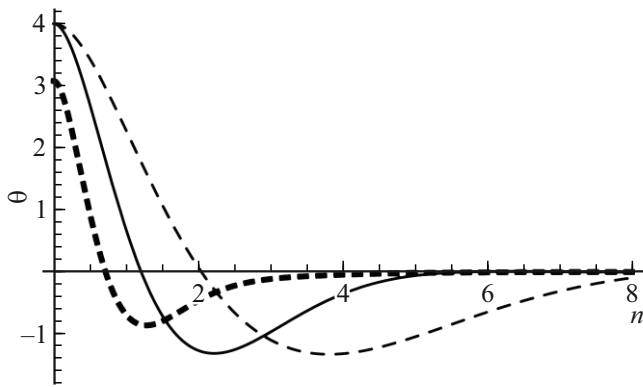


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для отклонения температуры, нормированного на  $(\nu/\kappa)^{1/2}Q_0/2N$ .

области  $|n| \leq (2\tau\nu)^{1/2}$ , узкой по сравнению с масштабом другой экспоненты  $h_Q$ . Таким образом, в (14) существенно лишь слагаемое со второй экспонентой:

$$U(n) \approx V \exp\left(\mp \frac{n}{h_Q}\right) \sim \alpha g Q_0 \tau^2 \sin \varphi \cdot \exp\left(\mp \frac{n}{h_Q}\right). \quad (20)$$

В отличие от (18), множитель  $\sin \varphi$  содержится в числителе (20) — с уменьшением угла течение ослабевает. Выражение (20) отвечает простым физическим соображениям. При  $h_v \ll h_Q$  теплопроводность не успевает заметно проявиться на масштабах  $h_Q$ . Ограниченность  $\chi$  и малость  $h$  по сравнению с  $h_Q$  означают, что и фоновая стратификация не играет принципиальной роли во втором уравнении (1). Следовательно, в этом уравнении наиболее существенны первое и последнее слагаемые, так что за время порядка  $\tau$  температура в области тепловыделения меняется на величину порядка  $\tau Q$ . Отсюда и из первого уравнения (1), в котором, как и втором, несущественно диффузионное слагаемое, следует выражение, близкое к (20).

Рассмотрим численный пример, отвечающий промежуточной ситуации, когда три упомянутых пространственных масштаба примерно одного порядка. Пусть в атмосфере действует источник тепла, пространственные масштабы и интенсивность которого сравнимы с параметрами облака примеси, выделяющей тепло за счет поглощения солнечной радиации (ситуация, обсуждаемая в литературе, см., например, [9,10]). Интенсивность такого источника может со временем меняться, например, по мере восхода солнца. Пусть  $h_Q = 100$  м,  $Q_0 = 10^{-4}$  К/с (что отвечает тепловыделению порядка  $c_p \bar{\rho} Q_0 h_Q \sim 10$  Вт/м<sup>2</sup> — малая доля солнечной постоянной;  $c_p, \bar{\rho}$  — теплоемкость и средняя фоновая плотность среды соответственно),  $\varphi = 0.05$ ,  $\nu = \kappa = 3$  м<sup>2</sup>/с (эффективные коэффициенты турбулентного обмена в атмосфере),  $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$  К/м (умеренно устойчивая фоновая температурная стратификация, отвечающая значению  $N \approx 10^{-2}$  с<sup>-1</sup>),  $\tau = 3 \cdot 10^3$  с. В этом случае

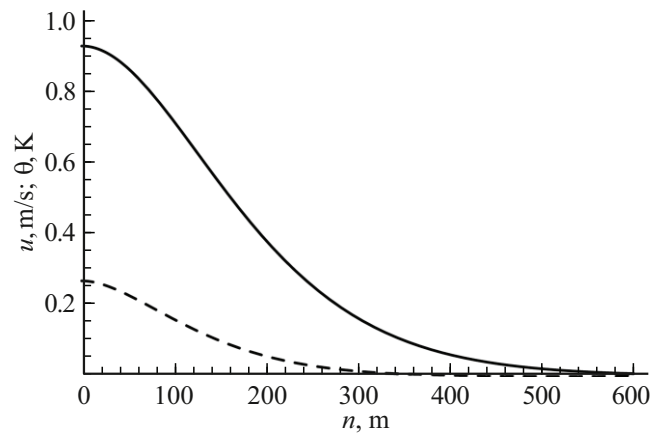


Рис. 4. Профили скорости (сплошная линия) и отклонения температуры (штриховая линия) для рассмотренного численного примера.

$h_v \approx 94.9$  м,  $h \approx 109.5$  м,  $\chi \approx 1.5$ ,  $\lambda \approx 0.91$ ,  $\delta \approx 0.95$ ,  $M \approx 1.8$ ,  $\xi \approx 0.98$ ,  $V \approx 2.62$  м/с.

На рис. 4 представлены в размерном виде профили скорости возникающего течения и отклонения температуры (с точностью до множителя  $\exp(t/\tau)$ ).

Как видно из (8), масштаб скорости  $V$  с уменьшением масштаба времени  $\tau$  может быстро убывать.

#### 4. О пределах применимости модели

Весьма содержательным является вопрос об устойчивости найденных решений. Строгий анализ устойчивости — это серьезная задача, выходящая за рамки настоящей работы (напомним, что устойчивость гораздо более простых решений, таких, как, например, течение Пуазейля, иногда исследуется десятилетиями). Но можно указать некоторые предварительные ориентировочные критерии.

Фоновая стратификация среды предполагается устойчивой. Но в области тепловыделения стратификация температуры и плотности меняется. Для устойчивости решения важно, чтобы стратификация оставалась устойчивой (хотя это — недостаточное условие устойчивости решения). Это возможно, если связанные с тепловыделением отклонения вертикального градиента температуры не слишком велики:

$$\left| \frac{\partial \theta}{\partial z} \right| < \gamma. \quad (21)$$

Выполнение условия (21) обеспечивает отсутствие конвективной неустойчивости. Но важно также отсутствие неустойчивостей, связанных с возникновением сдвигов скорости. Важнейшим критерием здесь является число Ричардсона [11]:

$$Ri = \frac{\alpha g (\gamma + \partial \theta / \partial z)}{(\partial u / \partial n)^2}. \quad (22)$$

В грубом приближении устойчивости отвечают значения числа Ричардсона, большие  $1/4$  [11]. Найденные выше решения позволяют рассчитывать  $\partial\theta/\partial z$  и  $Ri$  и проверять выполнение указанных критериев. Нетрудно убедиться, например, что решение, представленное на рис. 4, по этим критериям устойчиво.

Выше рассмотрение было ограничено относительно простым для расчетов случаем равенства коэффициентов обмена,  $\nu = \kappa$ . Хотя это отвечает распространенным параметризациям турбулентного обмена, представляет интерес вопрос, могут ли существенно измениться результаты при  $Pr \neq 1$ .

Выражение для корней характеристического уравнения (11) зависит от двух безразмерных чисел:  $Pr$  и  $\chi$ . Видно, что при больших значениях  $\chi$  (при достаточно медленном изменении со временем интенсивности тепловыделения, достаточно устойчивых стратификациях и не слишком малых углах наклона) изменения значения числа Прандтля (при сохранении порядка его величины) не приводят к качественным изменениям (11), так что результаты качественно не меняются. Но при значениях  $\chi$  порядка единицы и меньше (при быстрых изменениях интенсивности тепловыделения и/или достаточно малых углах наклона и слабых стратификациях) подкоренное выражение в (11) может быть критичным уже к относительно небольшим изменениям  $Pr$ , в частности, может менять знак. Поэтому, в зависимости от значений параметров задачи, возможны и ситуации, когда результаты чувствительны к значению числа Прандтля. Такие ситуации требуют более громоздких расчетов.

## Заключение

Впервые, насколько известно автору, получен класс точных аналитических решений, описывающих нестационарную конвекцию от наклонного источника плавучести в неограниченной устойчиво стратифицированной среде. Свойства решений могут быть достаточно разнообразными, поскольку существенно зависят от параметров источника и среды. Например, в некоторой области значений параметров возникающее наклонное течение может, вопреки интуитивным представлениям, не ослабевать, а усиливаться при уменьшении угла наклона источника к горизонтали.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Б. Гебхарт, Й. Джалуриа, Р. Махаджан, Б. Саммакия. *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен* (Мир, М., 1991) [Пер. с англ. В. Gebhart, Y. Jaluria, R. Mahajan, B. Sammakia. *Buoyancy-Induced Flows and Transport* (Hemisphere Publ. Corp., Washington, D.C., 1988)
- [2] П.Н. Свиркунов. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, **15** (9), 907 (1979).
- [3] Б.М. Берковский, Г.Ф. Ноготов. Инженерно-физический журнал, **19** (6), 1042 (1970).
- [4] А.В. Лыков, Б.М. Берковский. *Конвекция и тепловые волны* (Энергия, М., 1974)
- [5] J. Halverston. *An Introduction to Severe Storms and Hazardous Weather* (Routledge, NY., 2024), DOI: 10.4324/9781003344988
- [6] Л.Н. Гутман. *Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов* (Гидрометеиздат, Л., 1969)
- [7] S. Farina, D. Zardi. *Boundary-Layer Meteorology*, **189** (1), 5 (2023). DOI: 10.1007/s10546-023-00821-1
- [8] Л.Х. Ингель. Инженерно-физический журнал, **94** (1), 169 (2021). [L.K. Ingel'. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, **94** (1), 160 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02284-y>]
- [9] Л.Х. Ингель. УФН, **168** (1), 104 (1998). DOI: 10.3367/UFNr.0168.199801f.0104 [L.Kh. Ingel'. *Phys. Usp.*, **41** (1), 95 (1998). DOI: 10.1070/PU1998v041n01ABEN000333]
- [10] И.А. Горчакова, И.И. Мохов, П.П. Аникин, А.С. Емиленко. Изв. РАН. Физика атмосферы и океана, **54** (2), 175 (2018). DOI: 10.7868/S000335151802006X [I.A. Gorchakova, I.I. Mokhov, P.P. Anikin, A.S. Emilenko. *Izvestia, Atmospheric and Oceanic Physics*, **54** (2), 154 (2018). DOI: 10.1134/S000143381802007X]
- [11] J.S. Turner. *Buoyancy Effects in Fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, 2012), DOI: 10.1017/CBO9780511608827