01

Моделирование нелинейных поверхностных волн в кристалле с линейным электрооптическим эффектом

© С.Е. Савотченко [1,2]

[1]МИРЭА — Российский технологический университет,
119454 Москва, Россия
[2]Ордена Трудового Красного Знамени Московский технический университет связи и информатики,
111024 Москва, Россия
e-mail: savotchenkose@mail.ru

Поступило в Редакцию 5 марта 2026 г.
В окончательной редакции 7 апреля 2026 г.
Принято к публикации 20 апреля 2026 г.

Разработана математическая модель распространения нелинейных поверхностных электромагнитных волн в полубесконечном кристалле с линейным электрооптическим эффектом (Поккельса), граничащим с линейной диэлектрической средой. Сформулирована спектральная краевая задача для нелинейного уравнения Гельмгольца. Впервые получено точное аналитическое решение, описывающее пространственное распределение поля в виде комбинации экспоненциальной и гиперболической функций. Строго доказаны его основные свойства: гладкость, ограниченность, экспоненциальное затухание и принадлежность пространству квадратично интегрируемых функций. Установлены явные зависимости характеристик волны (положение и амплитуда максимума, полуширина) от параметров среды и константы распространения. Выявлено наличие минимума плотности потока энергии, что свидетельствует о пороговом характере возбуждения волн. Проанализировано перераспределение энергии между средами. Результаты имеют значение для разработки устройств интегральной фотоники с оптическим управлением.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, краевая задача, поверхностная волна, электрооптический эффект, эффект Поккельса, константа распространения.

DOI: 10.61011/JTF.2026.08.63356.67-26

Введение

В контексте развития интегральной фотоники и высокоскоростных оптических коммуникаций моделирование эффекта Поккельса в нелинейных кристаллах приобретает особую актуальность, поскольку обеспечивает точный контроль фазы и поляризации света посредством электрического поля [1]. Электрооптическая модуляция на основе эффекта Поккельса остается наиболее перспективным подходом для высокоскоростных применений благодаря совместимости с КМОП-технологиями (комплементарная структура металл–оксид–полупроводник) и способности достигать частот модуляции свыше ста гигагерц [2].

Несмотря на то, что экспериментальные исследования в данном направлении накопили значительный эмпирический материал, аналитические решения нелинейных краевых задач остаются крайне редкими и в основном ограничиваются приближенными подходами [3], такими как метод медленно изменяющейся огибающей [4] или численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [5,6], которые пренебрегают спектральными характеристиками операторов [7,8].

Отметим, что было найдено точное решение уравнений Максвелла для нелинейных поверхностных поляритонов в случае, когда одна из контактирующих сред имеет диэлектрическую проницаемость, зависящую от амплитуды поля [9]. Эта работа заложила основу для понимания волн, локализованных на границе раздела нелинейных сред. Впоследствии были разработаны математические подходы к решению нелинейных краевых задач для поверхностных волн, включая методы для слабо нелинейных режимов и анализ строгих асимптотических разложений [10,11]. Однако подавляющее большинство этих исследований либо рассматривали нелинейность Керра (кубическую), либо применяли приближенные методы анализа, либо использовали численные схемы решения.

Объектом данного исследования являются нелинейные поперечные электромагнитные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль плоской границы раздела между полубесконечным кристаллом с линейным электрооптическим эффектом и линейной диэлектрической средой. Предметом исследования является математическая модель, описывающая пространственное распределение напряженности электрического поля в такой волне, и аналитические свойства соответствующего решения краевой задачи. Цель настоящей работы заключается в создании аналитической модели для прогнозирования амплитудно-фазовых характеристик волны, выявлении критических точек экстремумов поляризации и оптимизации параметров для приложений в генераторах гармоник, которая основана на точном решении спектральной краевой задачи для нелинейного

уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянными коэффициентами, моделирующего поверхностные волны в электрооптическом кристалле.

В нелинейной оптике известны постановки краевых задач с эффектом Керра, где нелинейность имеет кубический характер и требуется учет взаимодействия волн [12]. Также известны обобщенные степенные модели [13] и полиномиальные представления зависимости показателя преломления от амплитуды приложенного электрического поля [14], изученные с точки зрения постановки спектральных краевых задач в закрытиях волноводах.

Представленная в настоящей работе модель выделяется тем, что нелинейность является линейной по полю (эффект Поккельса) [15], а среда обладает кусочно-постоянными параметрами с разрывом на границе, что позволило получить точное решение в элементарных функциях и провести полный анализ его свойств, включая строгое доказательство существования пороговых характеристик и минимума плотности потока энергии. В рамках разработанной модели математически доказывается существование решения сформулированной нелинейной краевой задачи [16,17], что позволяет проанализировать асимптотическое поведение решения на больших длинах и спектральные свойства, аналогичные нелинейным задачам, на собственные значения в гильбертовых пространствах.

1. Модель и постановка задачи

Для кристаллов с линейным электрооптическим эффектом считается, что показатель преломления n линейным образом зависит от амплитуды напряженности электрического поля E:

$$n = n_0 + n_1|E|, \tag{1}$$

где n_0 — показатель преломления в отсутствии приложенного электрического поля, n_1 — коэффициент нелинейности Поккельса: $n_1 = -n_0^3 r/2$, r — соответствующий электрооптический коэффициент [15].

В немагнитном кристалле без диэлектрических потерь диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = n^2$ есть действительная величина. Поэтому, в силу малости нелинейного слагаемого в (1), из него можно получить

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1|E|, \tag{2}$$

где $\varepsilon_0 = n_0^2$ — диэлектрическая проницаемость в отсутствии приложенного электрического поля, ε_1 — коэффициент нелинейности: $\varepsilon_1 = 2n_0n_1$.

Пусть поверхность рассматриваемого полубесконечного кристалла является плоской и находится в плоскости yOz $(x = 0)$, а ось Ox направлена в глубину кристалла перпендикулярно его поверхности. Будем рассматривать поперечную волну (TE-волну с вектором электрического поля, направленным вдоль оси Oy), бегущую вдоль оси Oz. Тогда огибающую, подчиняющуюся нелинейному уравнению Шредингера [18], можно представить в виде $E(x, z) = u(x)\exp(i\beta z)$, где β — константа распространения, функция $u(x)$ описывает пространственное распределение компоненты напряженности электрического поля в направлении, перпендикулярном поверхности кристалла (вдоль оси Ox). Поскольку диэлектрические потери считаются всюду пренебрежительно малыми, то это позволяет рассматривать константу распространения в математической постановке действительной величиной ($\beta \in \mathbf{R}$). Поэтому далее функция $u(x)$ будет предполагаться действительной и $|E| = u$. Известно, что функция $u(x)$ в параксиальном приближении подчиняется скалярному уравнению [18,19]:

$$u''(x) + (k_0^2\varepsilon - \beta^2)u(x) = 0, \tag{3}$$

где k_0 — волновое число.

Подстановка (2) в (3) позволяет получить нелинейное уравнение в области $x > 0$:

$$u''(x) + (a - \lambda)u(x) + bu^2(x) = 0, \tag{4}$$

где $a = k_0^2\varepsilon_0$, $b = k_0^2\varepsilon_1$, $\lambda = \beta^2$ — спектральный параметр ($\lambda > 0$).

Поскольку мы считаем поверхность нелинейного кристалла свободной, то диэлектрическая проницаемость линейной среды (например, диэлектрика) в области $x > 0$ будет постоянной и равной ε_L. Тогда уравнение (3) в области $x < 0$ примет вид

$$u''(x) + (e - \lambda)u(x) = 0, \tag{5}$$

где $e = k_0^2\varepsilon_L$.

Поскольку компоненты электромагнитного поля должны быть всюду непрерывными, в том числе и на поверхности кристалла при $x = 0$, то искомая функция и ее производная должны быть непрерывными в этой точке. Поэтому уравнения (4) и (5) дополняются граничными условиями сопряжения в точке $x = 0$:

$$u(+0) = u(-0), \quad u'(+0) = u'(-0), \tag{6}$$

где $u(\pm 0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} u(x)$ и $u'(\pm 0) = \lim\limits_{x\to\pm 0} u'(x)$ — лево- и правосторонние пределы функции и производной соответственно. Для полноты формулировки математической модели следует использовать требование исчезновения компонент электромагнитного поля на бесконечности, приводящее к условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} u'(x) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, математическая формулировка модели сводится к *спектральной краевой задаче* $(P1)$: найти ограниченное, непрерывное и дифференцируемое решение уравнений (4) и (5), удовлетворяющее условиям (6) и (7), причем коэффициенты a, b, $e \in \mathbf{R}$ считаются постоянными и $\lambda > 0$ — спектральный параметр.

Определение 1: Функция $u \in \mathbf{R}$: $u \in C^1(\mathbf{R})$ и $|u(x)| < M = \text{const} > 0 \; \forall \, x \in \mathbf{R}$, называется собственной функцией задачи $(P1)$, если она является ее ненулевым решением, соответствующим ненулевому значению спектрального параметра $\lambda > 0$, называемому собственным значением задачи $(P1)$.

2. Решение краевой задачи (собственные функции)

Ограниченное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (7), можно записать в виде

$$u(x) = u_0 e^{qx}, \tag{8}$$

где u_0 — значение напряженности электрического поля на поверхности кристалла, q — коэффициент затухании поля в диэлектрике

$$q = \sqrt{\lambda - e}, \tag{9}$$

определяющий длину затухания поля в диэлектрике $L = 1/q$.

Ограниченное решение нелинейного уравнения (3), удовлетворяющее условиям (7), можно найти подстановкой обратной степени гиперболического косинуса, подобрав требуемые значения коэффициентов. В результате поучится решение в виде стационарного солитона:

$$u(x) = \frac{6\kappa^2}{b} \operatorname{sech}^2(\kappa(x - x_0)), \tag{10}$$

где

$$\kappa^2 = \frac{\lambda - a}{4}, \tag{11}$$

x_0 — положение максимума солитона (10), определяемого на основе требования гладкости решения при $x = 0$ в соответствие с условиями (6). Максимум солитона (10) при $x = x_0$ есть $u_{\max} = u(x_0) = 6\kappa^2/b$.

Определение 2: Полушириной солитона (10) называется расстояние Δ от центра $x = x_0$ до точки, где функция u уменьшается в 2 раза от максимального значения:

$$\operatorname{sech}^2(\kappa\Delta) = \frac{1}{2}, \quad \Delta = |x - x_0|. \tag{12}$$

Из (12) получается, что параметр κ полностью однозначно определяет полуширину солитона:

$$\Delta = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\kappa}. \tag{13}$$

Подстановка (8) и (10) в (6) приводит к системе уравнений:

$$u_0 = \frac{6\kappa^2}{b} \operatorname{sech}^2(\kappa x_0), \tag{14}$$

$$\operatorname{th}(\kappa x_0) = \frac{q}{2\kappa}. \tag{15}$$

Разрешив систему уравнений (14) и (15), можно получить амплитуду поля на поверхности кристалла

$$u_0 = \frac{3(e - a)}{2b} \tag{16}$$

и положение максимума

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{\lambda - a}} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\lambda - e}{\lambda - a}}. \tag{17}$$

Таким образом, собственная функция задачи $(P1)$ может быть записана в виде:

$$u(x) = \frac{3}{2b} \begin{cases} (e - a) e^{\sqrt{\lambda - e}x}, & x < 0, \\ \frac{\lambda - a}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda - a}(x - x_0)/2)}, & x > 0, \end{cases} \tag{18}$$

где x_0 определяется (17).

Краевая задача $(P1)$ имеет однопараметрическое семейство решений (18), параметризованное $\lambda \in (e, +\infty)$ и удовлетворяющее условиям непрерывности и гладкости. Аналитические свойства решения собственной функции (18) и краевая задача $(P1)$ приведены в Приложении.

В физической модели собственная функция (18) описывает пространственное распределение напряженности электрического поля в поперечной поверхностной волне, распространяющейся вдоль поверхности нелинейного кристалла с линейным электрооптическим эффектом.

3. Результаты моделирования характеристик поверхностной волны

Свойства поверхностной волны, моделируемой собственной функцией (18), определяются набором основных параметров a, b, e, отвечающих за оптические свойства кристалла и контактирующей с его поверхностью диэлектрической среды (воздуха), и спектрального параметра λ, соответствующего константе распространения β. Основными характеристиками поверхностной волны являются положение максимума x_0, определяемое (17), его высота $u_{\max} = 6\kappa^2/b$, амплитуда поля на поверхности кристалла u_0, определяемая (16), и полуширина Δ, определяемая (13). Рассмотрим далее, каким именно образом указанные выше параметры системы влияют на наиболее важные характеристики поверхностной волны, включая ее пространственный профиль в поперечном к поверхности кристалла направлении.

Результаты моделирования пространственного распределения поверхностной волны на основе численного анализа собственной функции (18) представлены на рис. 1. При увеличении спектрального параметра λ профиль волны становится более узколокализованным, высота максимума поля возрастает, а его положение немного смещается (рис. 1, a). Глубина проникновения поля в кристалл при этом уменьшается.

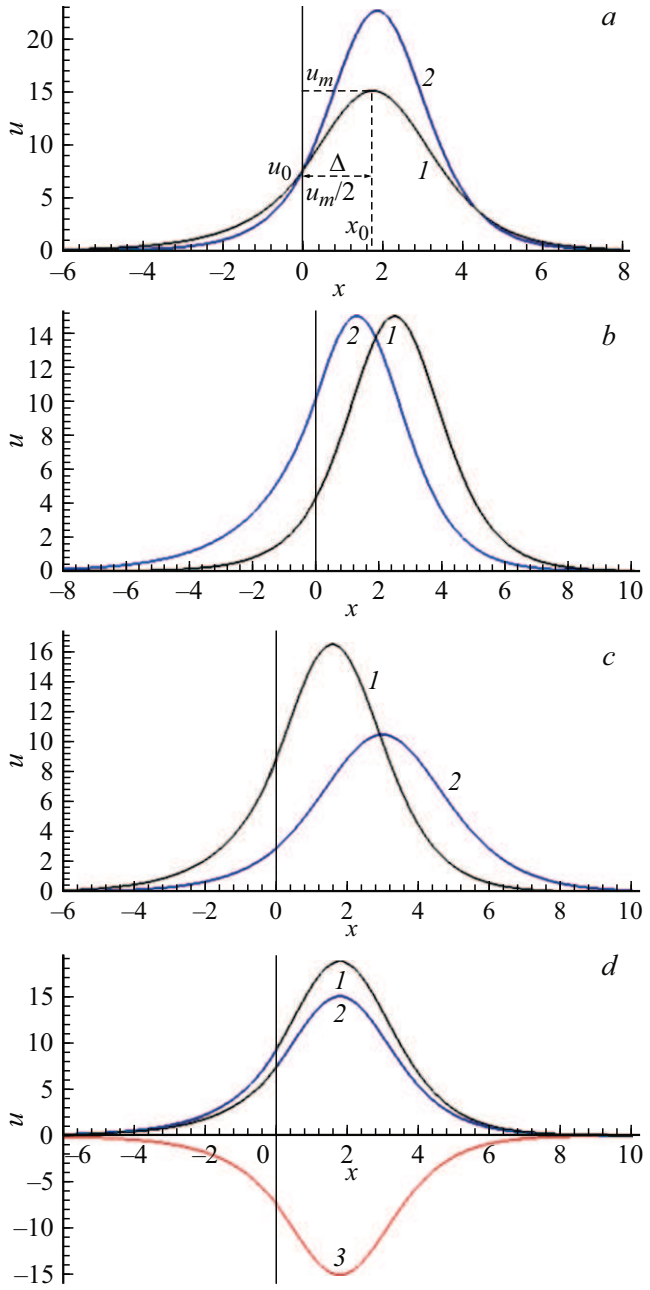

Рис. 1. Типичные графики собственной функции (18): a — $e = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.1$, $\lambda = 1.5$ (*1*), $\lambda = 2$ (*2*); b — $\lambda = 1.5$, $a = 0.5$, $b = 0.1$, $e = 0.8$ (*1*), $e = 1.2$ (*2*); c — $\lambda = 1.5$, $e = 1$, $b = 0.1$, $a = 0.4$ (*1*), $a = 0.8$ (*2*); d — $\lambda = 1.5$, $e = 12$, $a = 0.5$, $b = 0.1$ (*1*), $b = 0.08$ (*2*), $b = -0.1$ (*3*).

При увеличении диэлектрической постоянной линейной среды e высота максимума поля не меняется, а его положение заметно сдвигается к поверхности кристалла (рис. 1, b). Симметричность профиля поля существенно меняется. Глубина проникновения поля в кристалл уменьшается, в то время как длина затухания поля вне кристалла сильно возрастает. Основная часть поля при максимально допустимых больших значениях e при фиксированном значении спектрального параметра

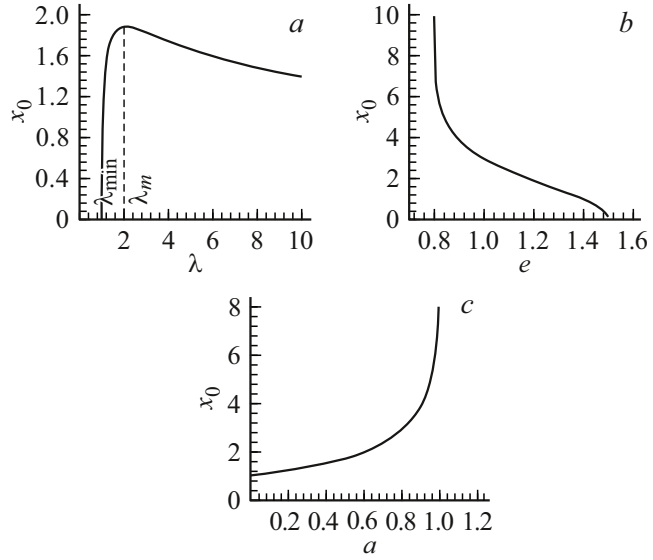

Рис. 2. Типичные графики положение максимума x_0 (17): a — зависимость от λ при $e = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; b — зависимость от e при $\lambda = 1.5$, $a = 0.8$, $b = 0.1$; c — зависимость от a при $\lambda = 1.5$, $e = 1$, $b = 0.1$.

(с учетом того, что должно выполняться условие $e < \lambda$) будет выходить из кристалла.

При увеличении невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла a высота максимума поля уменьшается, а его положение заметно сдвигается от поверхности в глубину кристалла (рис. 1, c). Глубина проникновения поля в кристалл возрастает, в то время как длина затухания поля вне кристалла снижается. Основная часть поля при максимально допустимых больших значениях a при фиксированном значении спектрального параметра (с учетом того, что должно выполняться условие $a < e < \lambda$) будет находиться в кристалле.

При увеличении абсолютного значения коэффициента нелинейности b интенсивность экстремума (высота максимума при $b > 0$ и глубина минимума при $b < 0$) поля уменьшается, а его положение остается неизменным (рис. 1, d). При этом глубина проникновения поля в кристалл, а также длина затухания поля вне кристалла уменьшаются. Данный рисунок служит наглядной иллюстрацией теоремы 2 (см. Приложение).

На рис. 2 проиллюстрировано влияние параметров системы на положение максимума x_0 в соответствие с (17). Отметим, что коэффициент нелинейности b на данный параметр волны не влияет.

Из (17) можно получить асимптотики при значениях спектрального параметра λ вблизи границы спектра при $\lambda \to e+0$ ($\lambda - e \ll 1$):

$$x_0 \approx 2\frac{\sqrt{\lambda - e}}{e - a}, \tag{19}$$

а при больших значениях спектрального параметра при $\lambda \to +\infty$ ($\lambda \gg e$):

$$x_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{4\lambda}{e-a}. \tag{20}$$

Важно отметить, что зависимость положения максимума от спектрального параметра может иметь максимум в точке λ_m (рис. 2, a), которая является решением уравнения

$$\frac{\partial x_0}{\partial \lambda} = 0.$$

В результате можно получить

$$\lambda_m = \frac{e - at^2}{1-t^2}, \tag{21}$$

где t — это корень уравнения $t = \mathrm{th}(1/t)$, приближенное значение которого $t \approx 0.9833556$. Тогда можно записать оценку критического значения спектрального параметра (21) как:

$$\lambda_m \approx \frac{e - 0.694815 \cdot a}{0.305185}.$$

Значение максимума есть

$$x_0^{(\max)} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{e-a}}. \tag{22}$$

С учетом приближенного значения t из (22) можно получить оценку:

$$x_0^{(\max)} \approx \frac{1.325}{\sqrt{e-a}}.$$

При малых значениях λ вблизи границы спектра величина растет быстро по коревому закону (19). При дальнейшем увеличении λ скорость роста замедляется, и он происходит по закону (20). При увеличении диэлектрической постоянной линейной среды e на интервале (a, λ) при фиксированных этих параметрах величина x_0 монотонно убывает (рис. 2, b). При увеличении невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла a на интервале $(0, e)$ при фиксированных этих параметрах величина x_0 монотонно увеличивается (рис. 2, c) от минимального значения

$$x_{0\ \min} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\lambda - e}{\lambda}}. \tag{23}$$

На рис. 3 проиллюстрировано влияние параметров системы на полуширину Δ в соответствие с (13). Отметим, что данный параметр зависит только от λ и a. С ростом спектрального параметра λ полуширина Δ монотонно убывает по обратному корневому закону $\Delta \sim \lambda^{-1/2}$ (рис. 3, a). Это означает, что солитон сужается, поле становится более узколокализованным вблизи x_0, а его амплитуда растет $u_{\max} \sim \lambda$. С ростом невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла a на интервале $(0, e)$ при фиксированных этих параметрах полуширина Δ монотонно возрастает от $\Delta_1 = 2\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{\lambda}$ до $\Delta_2 = 2\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{\lambda - e}$ (рис. 3, b).

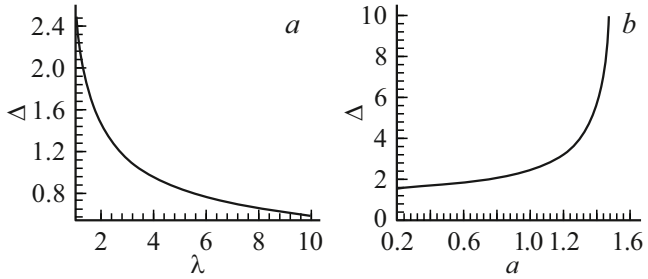

Рис. 3. Типичные графики полуширины Δ (13): a — зависимость от λ при $e = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; b — зависимость от a при $\lambda = 1.5$, $e = 1.5$, $b = 0.1$.

4. Плотность потока энергии (норма собственной функции)

Определение 3: Плотность потока энергии, уносимой поверхностной волной, есть

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx. \tag{24}$$

Это означает, что физический смысл нормы собственной функции состоит в том, что она представляет собой плотность потока энергии волны: $||u||_2^2 = I$. Зависимость плотности потока энергии волны от спектрального параметра λ, т.е. фактически от константы распространения β, есть (см. Приложение):

$$I(\lambda) = \frac{9}{8b^2}\left(\frac{(e-a)^2}{\sqrt{\lambda - e}} + \frac{8}{3}(\lambda - a)^{3/2} + 4(\lambda - a)\sqrt{\lambda - e} - \frac{4}{3}(\lambda - e)^{3/2}\right). \tag{25}$$

При больших значениях спектрального параметра при $\lambda \to +\infty$ ($\lambda \gg e$) можно получить асимптотику потока (25):

$$I(\lambda) \sim \frac{6}{b^2}\lambda^{3/2}. \tag{26}$$

При значениях спектрального параметра λ вблизи границы спектра при $\lambda \to e+0$ ($\lambda - e <\ll 1$) асимптотика потока (25) будет

$$I(\lambda) \sim \frac{9(e-a)^2}{8b^2\sqrt{\lambda - e}}. \tag{27}$$

Такое поведение потока на границе спектра связано с тем, что левый „хвост“ решения при стремлении к нулю коэффициента затухания (9) перестает экспоненциально убывать, фактически стремясь к константе на всей полуоси $x < 0$, что делает здесь соответствующий интеграл I_1 расходящимся в этом пределе. При приближении λ к пороговому значению $\lambda_{\min} = e$ решение „расплывается“ влево, занимая все большую область, и плотность потока уходит в бесконечность.

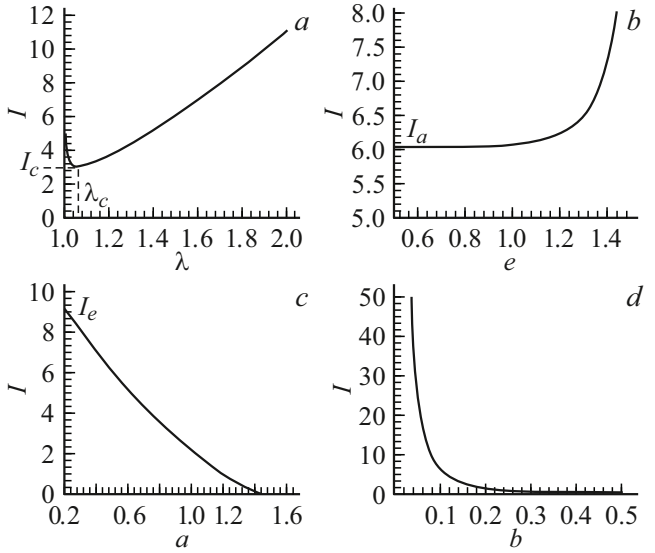

Рис. 4. Типичные графики плотности потока энергии I (в ед.$\cdot 10^{-2}$): a — зависимость от λ при $e = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; b — зависимость от e при $\lambda = 1.5$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; c — зависимость от a при $\lambda = 1.5$, $e = 1$, $b = 0.1$; d — зависимость от b при $\lambda = 1.5$, $e = 1$, $a = 0.5$.

Однако более важным фактом результата исследования зависимости плотности потока (25) является наличие его минимума $I_c = I(\lambda_c)$, где критическое значение спектрального параметра λ_c определяется из условия $I'(\lambda_c) = 0$:

$$\lambda_c = e + (e - a) \cdot s^2, \tag{28}$$

где s — корень уравнения:

$$8s^3\sqrt{1 + s^2} + 8s^4 + 4s^2 - 1 = 0. \tag{29}$$

Приближенное значение корня уравнения (29) находится численно: $s \approx 0.353$. Тогда приближенное значение критического значение спектрального параметра есть

$$\lambda_c \approx e + 0.1245 \cdot (e - a).$$

Ему соответствует приближенное значение минимума плотности потока:

$$I_c \approx 8.483\,\frac{(e - a)^{3/2}}{b^2}.$$

Зависимость плотности потока (25) от спектрального параметра λ приведена на рис. 4, a. Наличие минимума в этой зависимости означает, что поверхностная волна рассматриваемого типа будет возбуждаться при значениях мощности падающего излучения, превышающее пороговое значение, связанной непосредственно с величиной I_c.

При увеличении диэлектрической постоянной линейной среды e на интервале (a, λ) при фиксированных этих параметрах плотность потока (25) монотонно возрастает (рис. 4, b) от значения:

$$I_a = \frac{6(\lambda - a)^{3/2}}{b^2}. \tag{30}$$

При максимально допустимых значениях e $(e \to \lambda - 0)$ плотность потока уходит на бесконечность по асимптотическому закону (27).

При увеличении невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла a на интервале $(0, e)$ при фиксированных этих параметрах плотность потока монотонно убывает (рис. 4, c) от значения

$$I_e = \frac{9}{8b^2}\left(\frac{e^2}{\sqrt{\lambda - e}} + \frac{8}{3}\lambda^{3/2} + 4\lambda\sqrt{\lambda - e} - \frac{4}{3}(\lambda - e)^{3/2}\right). \tag{31}$$

до значения, задаваемого (30).

При увеличении значения коэффициента нелинейности b плотность потока монотонно убывает по закону $I \sim 1/b^2$ (рис. 4, d). При больших b плотность потока $I \to 0$.

Определение 4: Парциальными плотностями потока энергии называются величины

$$\Gamma_j = \frac{I_j}{I}, \ \ (j = 1, 2), \tag{32}$$

где индексы 1 и 2 относятся к плотностям потока в линейной и нелинейной среде, а $I_{1,2}$ определены в Приложении (см. доказательство теоремы 8).

Зависимости парциальных плотностей потоков от основных параметров системы приведены на рис. 5. С ростом спектрального параметра парциальная плотность потока Γ_1 монотонно убывает (линия *1* на рис. 5, a), а

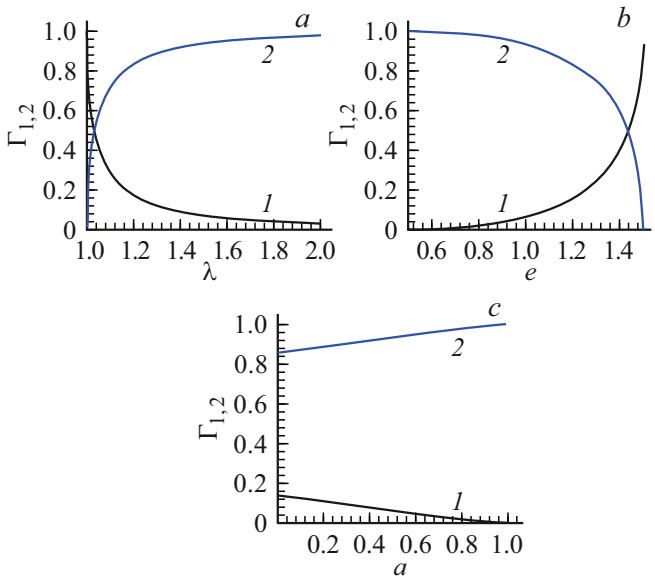

Рис. 5. Типичные графики парциальных плотностей потоков (32) Γ_1 (*1*) и Γ_2 (2): a — зависимость от λ при $e = 1$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; b — зависимость от e при $\lambda = 1.5$, $a = 0.5$, $b = 0.1$; c — зависимость от a при $\Lambda = 1.5$, $e = 1$, $b = 0.1$.

Γ_2 возрастает (линия *2* на рис. 5, *a*). Вблизи границы спектра $\Gamma_2 < \Gamma_1$. Критическое значение λ_c соответствует точке спектра, в которой парциальные плотности потоков совпадают: $\Gamma_1(\lambda_c) = \Gamma_2(\lambda_c) = 1/2$. При дальнейшем увеличении спектрального параметра при $\lambda > \lambda_c$ будет выполняться соотношение $\Gamma_2 > \Gamma_1$.

С ростом диэлектрической постоянной линейной среды e на интервале (a, λ) при фиксированных этих параметрах парциальная плотность потока Γ_1 монотонно возрастает (линия *1* на рис. 5, *b*), а Γ_2 убывает (линия *2* на рис. 5, *b*). Существует критическое значение e_c, в которой парциальные плотности потоков совпадают: $\Gamma_1(e_c) = \Gamma_2(e_c) = 1/2$. При $e < e_c$ в широком диапазоне $\Gamma_2 > \Gamma_1$, а при дальнейшем увеличении параметра e при $e > e_c$ будет выполняться соотношение $\Gamma_2 < \Gamma_1$.

С ростом невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла a на интервале $(0, e)$ при фиксированных этих параметрах парциальная плотность потока Γ_1 монотонно убывает (линия *1* на рис. 5, *c*), а Γ_2 возрастает (линия *2* на рис. 5, *c*). При этом в широком диапазоне выполняется $\Gamma_2 > \Gamma_1$.

5. Физическая интерпретация результатов моделирования

Для полного физического понимания необходимо интерпретировать математические результаты с точки зрения взаимодействия электромагнитного поля с нелинейной средой. Прежде всего, физическая причина существования рассматриваемого типа волн заключается в балансе двух факторов: дифракционного распространения пучка и самовзаимодействия, обусловленного эффектом Поккельса. Линейный электрооптический эффект приводит к линейному увеличению показателя преломления кристалла с полем. Это создает эффект самофокусировки: там, где поле наиболее велико (внутри кристалла), показатель преломления увеличивается, образуя диэлектрический волновод, который ограничивает волну и предотвращает ее выход вглубь материала с нелинейным откликом или в диэлектрик.

Пространственный профиль волны, описываемый гиперболической функцией, указывает на ее солитоноподобную природу. Он моделирует стационарное, локализованное в пространстве перпендикулярно поверхности кристалла образование, форма которого не изменяется в процессе распространения вдоль поверхности.

Влияние параметров имеет следующую физическую интерпретацию. Увеличение спектрального параметра λ, связанного с константой распространения β $(\lambda = \beta^2)$, означает увеличение поперечного волнового числа. Это эквивалентно усилению локализации поля. Волна сильнее локализуется вблизи поверхности, ее максимальная амплитуда увеличивается, а глубина проникновения как в кристалл, так и в диэлектрик уменьшается. Физически это соответствует волне с более высокой энергией, сильнее изменяющей свойства кристалла вблизи поверхности, создавая более резкое изменение показателя преломления. Увеличение амплитуды поля $(u_{\max})$ с увеличением β физически объясняется более эффективным нелинейным взаимодействием, так при этом происходит более интенсивная передача энергии возбуждающего излучения в поверхностную волну.

При увеличении значения константы распространения уменьшается фазовая скорость волны вдоль поверхности $(\upsilon_{ph} = \omega/\beta)$. Это приводит к тому, что поле больше локализуется вблизи границы раздела, т.е. становился более узколокализованным. При этом энергия концентрируется в очень тонком слое под поверхностью. Глубина проникновения в кристалл падает, так как волна теперь скользит почти по самой поверхности.

В модели скорость изменения характеристик замедляется при больших значениях спектрального параметра. Это соответствует тому, что с ростом константы распространения эффективность возбуждения поверхностной волны снижается, поскольку становится трудно согласовать поля в кристалле и входном элементе. Хотя максимум поля смещается к поверхности, скорость этого смещения уменьшается, амплитуда продолжает увеличиваться, и волна остается узколокализованой вблизи поверхности.

Важно отметить, что существует оптимальное значение константы распространения $\beta_m = \lambda_m^{1/2}$ (λ_m определяется (21)), при котором положение пика интенсивности поверхностной волны располагается на максимально возможном удалении от поверхности кристалла при фиксированных остальных параметрах системы. При увеличении константы распространения в интервале значений $\beta_{\min} < \beta < \beta_m$ $(\beta_{\min} = e^{1/2})$ положение пика интенсивности быстро отдаляется от поверхности, достигая наибольшего значения, определяемого (22). При дальнейшем увеличении константы распространения при $\beta > \beta_m$ положение пика интенсивности медленно приближается к поверхности. Следовательно, варьирование константы распространения позволяет эффективно управлять положением пика интенсивности поверхностной волны.

Порог возбуждения поверхностных волн (минимальная мощность лазера) не постоянен, а зависит от константы распространения. Вблизи минимального ее значения (когда λ близко к e) требуемая мощность стремится к бесконечности из-за просачивания поля в диэлектрик. При очень больших значениях константы распространения (большие λ) мощность также высока из-за необходимости формирования очень узкого и сильного пика поля. Следовательно, должно существовать оптимальное значение константы распространения (соответствующее λ_c (28) из условия минимизации плотности потока), при котором требуемая для возбуждения мощность лазера минимальна, что имеет важное практическое значение для экспериментальной реализации.

Таким образом, константа распространения напрямую определяет степень локализации волны в диэлектрике или кристалле. При ее малых значениях (чуть выше

порогового значения) волна в основном закрепляется внутри нелинейного кристалла и едва различима снаружи. По мере увеличения β все больше поля распространяется наружу, увеличивая свою энергию в приповерхностном слое диэлектрика. Это позволяет использовать константу распространения в качестве параметра для настройки сенсорных свойств такой структуры (поскольку внешнее поле может взаимодействовать с веществом).

Изменение диэлектрической проницаемости прилегающей среды ε_L значительно влияет на асимметрию волны (при фиксированном продольном волновом числе k_0). Увеличение этого параметра означает, что поле легче покидает кристалл. Хотя амплитуда максимума остается неизменной, сам максимум смещается к границе раздела, а длина затухания поля в диэлектрике резко возрастает. Физически это означает перераспределение энергии волны: по мере приближения диэлектрической проницаемости диэлектрика к значению, определяемому спектральным параметром, волна теряет связь с кристаллом, ее хвост в диэлектрике все больше удлиняется, пока решение не перестанет быть локализованным. Это порог существования волны.

Эффект невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла ε_0 противоположен выше описанному. Увеличение этого значения означает при фиксированном продольном волновом числе k_0, что среда изначально является оптически более плотной. В этом случае поле втягивается глубже в кристалл с нелинейным откликом. Максимум смещается от поверхности, глубина проникновения в кристалл увеличивается, а затухание в диэлектрике возрастает. Физически это соответствует ситуации, когда волна более легко распространяется внутри объема кристалла, а граница раздела играет меньшую роль в ее удержании.

Коэффициент нелинейности определяет знак и интенсивность отклика среды. Изменение знака этого коэффициента просто приводит к изменению знака поля, т. е. к противофазным колебаниям, что является следствием линейности эффекта Поккельса по отношению к полю. Увеличение абсолютного значения этого коэффициента уменьшает амплитуду волны. Физически это можно объяснить тем, что при прочих равных условиях (одна и та же постоянная распространения) большая нелинейность требует меньшей амплитуды поля для создания необходимой разницы показателей преломления для удержания волны. Положение максимума не меняется при этом, что определяется линейными свойствами среды.

Подчеркнем, что важным физическим результатом, вытекающим из анализа плотности потока энергии, является существование порога возбуждения (28) волн рассматриваемого типа. Такое условие является типичным для многих типов поверхностных волн [10,13]. Поскольку зависимость плотности потока (мощности) от спектрального параметра имеет минимум, то волны этого типа не могут существовать с произвольно низкой энергией. Для их возбуждения необходимо превысить определенное критическое значение мощности: $I > I_c$. По мере приближения к границе спектра (по мере приближения параметра к его минимальному значению) поток энергии стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что волна распространяется в линейной среде, занимая бесконечно большую область, и поддержание ее конечной амплитуды требует бесконечной полной энергии. В эксперименте при фиксированной мощности накачки возможно наблюдать пороговое возникновение волны именно при достижении оптимального значения константы распространения, а не при любом ее значении, удовлетворяющем условию существования.

Отметим, что поскольку при больших значениях спектрального параметра поток энергии растет по закону (26), то физически это означает, что в режиме сильной локализации мощность, необходимая для возбуждения солитона, растет с увеличением его степени локализации (малая полуширина). Это связано с тем, что для создания очень узкого и высокого пика поля требуется затратить энергию на преодоление дифракционного расплывания: чем уже пучок, тем сильнее он стремится расшириться, и тем большая нелинейность (а значит, и большая амплитуда поля) требуется для его удержания.

По мере приближения к границе спектра поток обратно пропорционален квадратному корню из разности $\lambda - e$, согласно асимптотике (27), что соответствует явлению критического замедления, известному в физике поверхностных волн: энергия волны перераспределяется в соседнюю среду, и эффективность удержания в волноводе снижается. Стремление потока к бесконечности при приближении к границе спектра (при $\lambda \to e+0$) физически означает, что по мере приближения к этому пределу коэффициент затухания в диэлектрике приближается к нулю. Поле перестает экспоненциально убывать с расстоянием от поверхности; его „хвост“ в диэлектрике становится все более плоским и протяженным, стремясь к постоянному значению на полубесконечном интервале. В результате волна теряет свои поверхностные свойства. Для поддержания даже конечной амплитуды поля на поверхности при таком распространении энергии до бесконечности требуется бесконечная суммарная мощность падающего излучения, что обусловливает существование порогового явления, когда по мере приближения к критическому значению константы распространения эффективность возбуждения волны значительно снижается.

Анализ парциальных потоков энергии Γ_1 и Γ_2 (долей энергии, передаваемой в диэлектрике и в кристалле, соответственно) позволяет понять, как энергия волны распределена между двумя средами в зависимости от параметров системы. Величину Γ_2 часто называют коэффициентом удержания. Энергия передается из диэлектрика в кристалл при изменении параметров, демонстрируя чувствительность распределения поля к условиям на поверхности.

Увеличение константы распространения приводит к монотонному уменьшению доли энергии в диэлектрике и увеличению доли энергии в кристалле. Физически

это означает, что с увеличением константы распространения волна все больше „втягивается“ в кристалл. При малых β (вблизи границы спектра) большая часть энергии может находиться в диэлектрике, что делает структуру чувствительной к свойствам внешней среды. При больших β энергия концентрируется в кристалле, и свойства волны определяются в основном параметрами нелинейного материала.

Этот эффект позволяет перекачивать энергию волны из линейного полупространства в нелинейное путем изменения константы распространения. Следовательно, распределение энергии между кристаллом и внешней средой является управляемой величиной. Меняя константу распространения или свойства внешней среды (например, вводя в нее различные вещества), можно перераспределять до почти максимальной доли энергии волны либо в кристалл, либо в диэлектрик. Это открывает возможность проектирования переключаемых волноводных структур, где один и тот же лазерный пучок в зависимости от условий ввода может либо глубоко проникать в кристалл, либо концентрироваться в тонком приповерхностном слое.

Увеличение диэлектрической проницаемости линейной среды при фиксированном значении константы распространения приводит к увеличению доли энергии в диэлектрике и уменьшению ее в кристалле. Это прямое следствие изменения условий на границе. По мере приближения e к λ слева практически вся энергия передается в диэлектрик, волна теряет связь с кристаллом, и ее поток стремится к бесконечности, что соответствует делокализации. Физически это означает, что, выбирая внешнюю среду с определенными свойствами, можно контролировать, какая доля энергии волны будет взаимодействовать с этой средой, что может служить основой для создания оптических датчиков.

С другой стороны, увеличение параметра a, т.е. фактически невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла ε_0 при фиксированном продольном волновом числе k_0, увеличивает содержание энергии в кристалле и уменьшает его в диэлектрике. Кристалл с большей оптической плотностью сильнее удерживает поле. Это объясняется тем, что с увеличением невозмущенной диэлектрической проницаемости кристалла „глубина потенциальной ямы“ для электромагнитного поля, образующегося на границе раздела, увеличивается. Энергия волны будет находиться в более оптически плотной среде, и чем плотнее среда, тем сильнее будет ставиться данный эффект.

Отметим, что поскольку нелинейный коэффициент, определяющий знак поля, не влияет на положение максимума, но существенно меняет требуемую для возбуждения мощность обратно пропорционально квадрату своей величины, то материалы с большим электрооптическим коэффициентом позволяют возбуждать поверхностные волны при существенно меньших мощностях накачки, что важно для практических приложений.

Таким образом, анализ потоков энергии показывает, что рассматриваемая волноводная система обладает свойствами, важными для управления оптическим излучением: селективностью возбуждения, возможностью перераспределения энергии между средами и пороговым поведением, определяемым не только нелинейностью, но и линейными свойствами прилегающей среды.

6. Возможные приложения результатов моделирования

Результаты проведенного моделирования открывают перспективы для создания нового класса интегральных и нелинейных оптических устройств, основанных на управлении поверхностными волнами в средах с линейным электрооптическим эффектом. Физический и технический анализ позволяет определить потенциальные области применения, конкретизируя реальные материалы и их параметры. Одним из наиболее перспективных направлений является создание полностью оптических переключателей, фазовых и поляризационных модуляторов в интегральной фотонике, работающих на поверхностных волнах [20].

Существующие электрооптические модуляторы на основе ниобата лития достигли высокого уровня развития, о чем свидетельствуют недавние демонстрации метаповерхностей на основе ниобата лития ($LiNbO_3$) с добротностью до $8 \cdot 10^3$ и эффективностью модуляции более $0.01\,\mathrm{V}^{-1}$ в гигагерцовом диапазоне [21]. Однако в предлагаемой модели управление осуществляется не приложенным внешним полем, а самой постоянной распространения, что открывает путь к чисто оптическому управлению.

Кристаллы ниобата лития, параметры которых хорошо известны, могут быть использованы в практических целях: показатель преломления для необыкновенного луча составляет $n_e = 2.15$ на длине волны 1064 nm и $n_e = 2.203$ на длине волны 633 nm, а электрооптический коэффициент r_{33} достигает значений приблизительно 30 pm/V для объемных кристаллов. Диапазон рабочей прозрачности ниобата лития простирается от 420 до 5200 nm, охватывая ближний инфракрасный диапазон, включая телекоммуникационную длину волны 1550 nm. Это позволяет реализовать фазовые модуляторы с полосой пропускания свыше 100 GHz как в тонкопленочных волноводах на ниобате лития [22]. Физико-техническое обоснование здесь опирается на высокую однородность материала и низкие потери в волноводах, минимизирующие фазовые несоответствия.

Также можно использовать кристаллы танталата лития ($LiTaO_3$) с $n_0 = 2.18$, $n_e = 2.20$ при $1.064\,\mu$m и $r_{33} = 33$ pm/V (высокие частоты) [23]. Его рабочий диапазон $0.4-5\,\mu$m позволяет применять модель для пироэлектрических детекторов и устройств, где электрическое поле индуцирует нелинейную добавку Δn для модуляции сигнала мощностью до mW в схемах.

Еще одним важным классом материалов являются кристаллы группы дигидрофосфата калия (KDP) и его дейтерированного аналога (DKDP) [24]. Эти кристаллы широко используются в электрооптических устройствах благодаря высокому порогу оптического повреждения и возможности выращивания образцов сравнительно крупных размеров. Для DKDP электрооптический коэффициент r_{33} достигает 25 pm/V при степени дейтерирования более 98 %, а показатели преломления составляют $n_0 = 1.4948$, $n_e = 1.4554$ на длине волны 1064 nm, где эффект Поккельса корректирует фазовое соответствие для эффективного удвоения частоты лазеров Nd:YAG ($1064 \to 532$ nm). Диапазон прозрачности DKDP определяется длинами волн от 200 до 2150 nm. Важным преимуществом DKDP является высокий порог оптического повреждения, превышающий 3 GW/cm^2 для наносекундных импульсов, что делает этот материал привлекательным для устройств, работающих с мощным лазерным излучением.

Обоснование эффективности его применения моделируется через изменение, компенсирующее дисперсию ($\Delta n(E) \sim -rE$), что может повышать выход генерации второй гармоники на 10 %–20 % в поляризационно-ориентированных конфигурациях по сравнению с пассивными кристаллами. Здесь электрическое поле меняет показатель преломления за счет этой нелинейной добавки, корректируя фазовый синхронизм (изменение волнового числа на двойной частоте) для динамической оптимизации выхода генерации второй гармоники (1064 nm–532 nm) с эффективностью до 70 % при мощностях > 1 GW/cm^2, как в лазерах с модуляцией добротности Nd:YAG.

Новым направлением может стать использование аморфных материалов с индуцированной нелинейностью. Недавние исследования показали, что термическое воздействие может индуцировать квадратичную нелинейность χ^{-2}? до 29 pm/V в тонких пленках ниобата натрия (Na?O:Nb?O?) [25]. Показатель преломления таких пленок составляет приблизительно 2.1–2.2 на длине волны 1550 nm, а диапазон прозрачности широк. Важной особенностью является уникальное пространственное распределение нелинейности, вызванное механизмом термического воздействия, что требует учета тензорной природы диэлектрической проницаемости при моделировании. Аморфные материалы упрощают технологии травления и фотолитографии, обеспечивая высокую однородность устройства.

На основе проведенного анализа можно предложить технически новое устройство, не имеющее прямых аналогов: перестраиваемый спектрально-селективный поверхностный волновой соединитель с контролируемой глубиной канала. Принцип работы устройства основан на зависимости положения максимума поверхностной волны (x_0) от спектрального параметра (константы распространения). Создавая два волноводных канала в кристалле на разной глубине, можно переключать энергию между этими каналами без использования каких-либо механических устройств или электродов, изменяя угол падения возбуждающего излучения. Устройство может быть сконструировано с использованием структуры из монокристаллического ниобата лития, легированного титаном, для создания двух скрытых волноводных слоев на разной глубине (например, 2 и 5 μm от поверхности). На поверхность наносится антиотражающее покрытие для связи излучения через призменный соединитель. Рабочий диапазон длин волн — ближний ИК-диапазон (1064 или 1550 nm), где ниобат лития прозрачен и обладает высокими электрооптическими коэффициентами.

Новизна этого устройства заключается в следующем. Во-первых, переключение осуществляется исключительно оптическим способом, без использования электродов или внешних электрических полей, что исключает проблемы с нагревом и электромиграцией. Во-вторых, устройство обладает спектральной селективностью: каждое значение константы распространения соответствует определенной длине волны, эффективно возбуждая поверхностную волну и обеспечивая мультиплексирование с разделением по длинам волн в одной структуре. В-третьих, наличие минимума в зависимости полного потока энергии от λ позволяет выбрать оптимальный режим возбуждения с минимальным энергопотреблением. Дополнительным преимуществом является возможность использования эффекта Поккельса для точной настройки характеристик после возбуждения. Прилагая небольшое электрическое поле к электродам, сформированным на поверхности, можно дополнительно модулировать фазу или амплитуду выходного сигнала с частотами до десятков гигагерц, как показано в исследованиях гигагерцовой модуляции в метаповерхностях из ниобата лития [21].

На основе разработанной математической модели можно предложить также технически новое устройство другого типа: адаптивный электрически управляемый оптический параметрический генератор (ОПГ) с динамической настройкой фазового согласования посредством эффекта Поккельса в периодически поляризованном $LiNbO_3$ (PPNLN), интегрированном с микрорезонаторами. Такое устройство уникально тем, что оно сочетает в себе оптимизацию каскадной нелинейности на основе модели с коррекцией в реальном времени, обеспечивая удовлетворительную эффективность и полосу пропускания > 100 nm без механической настройки, превосходя существующие ОПГ по скорости и компактности. Физическим обоснованием этому может служить низкий порог осцилляции (< 1 mW) и устойчивость к оптическим повреждениям (> 10 GW/cm^2).

Заключение

В работе были получены следующие основные результаты. Была построена математическая модель распространения поперечной поверхностной волны в полубесконечном кристалле с линейным электрооптическим эффектом, граничащим с линейной диэлектрической

средой. Модель была сведена к спектральной краевой задаче для нелинейного уравнения Гельмгольца с кусочно-постоянными коэффициентами.

Впервые было получено точное аналитическое решение краевой задачи, представляющее собой собственную функцию, выраженную через экспоненциальную функцию в области воздуха и обратную степень гиперболического косинуса в области кристалла. Решение было параметризовано спектральным параметром, связанным с постоянной распространения волны.

Строго доказан ряд аналитических свойств полученного решения: необходимые и достаточные условия существования действительного решения, гладкость в точке сопряжения сред (включая совпадение разложений Тейлора), непрерывная дифференцируемость по всей действительной оси, выполнение условий на бесконечности (экспоненциальное затухание поля), ограниченность с получением равномерной оценки и принадлежность к пространству квадратично интегрируемых функций с возможностью точного вычисления нормы.

Установлены явные аналитические выражения для основных физических характеристик поверхностной волны: положения максимума, амплитуды поля на поверхности кристалла, полуширины солитона и плотности потока энергии. Проведен детальный анализ зависимости таких характеристик волны от параметров системы. Показано, что увеличение спектрального параметра приводит к локализации поля вблизи поверхности и увеличению амплитуды. Получены и проанализированы асимптотические выражения для положения максимума вблизи границы спектра и для больших значений спектрального параметра, демонстрирующие, соответственно, закон роста и эффект насыщения, а также возможность достижения максимального значения при определенном оптимальном значении спектрального параметра.

Установлено существование минимума в зависимости плотности потока полной энергии от спектрального параметра. Найдено критическое значение, соответствующее этому минимуму, указывающее на существование пороговой мощности возбуждения для поверхностной волны. Проведен анализ парциальных плотностей потока энергии в диэлектрике и кристалле, демонстрирующий возможность перераспределения энергии между средами при изменении параметров системы.

Дана физическая интерпретация результатов моделирования свойств поверхностной волны, а также были обозначены их возможные приложения. Приведены рекомендации по проектированию двух различных типов электрооптических устройств с указанием возможных физико-технических характеристик и рабочих параметров.

Предложенная модель не только вносит вклад в математическую теорию нелинейных краевых задач, объясняет физику нелинейных поверхностных волн в электрооптических кристаллах, но и открывает путь к созданию новых функциональных устройств интегральной фотоники, сочетающих в себе преимущества чисто оптического управления с возможностями электрооптической модуляции и спектральной селективности.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] D. Zhu, L. Shao, M. Yu, R. Cheng, B. Desiatov, C.J. Xin, Y. Hu, J. Holzgrafe, S. Ghosh, A. Shams-Ansari, E. Puma, N. Sinclair, C. Reimer, M. Zhang, M. Lončar. Adv. Opt. Photon., **13**, 242 (2021). DOI: 10.1364/AOP.411024

[2] A.D. Francescantonio, A. Sabatti, H. Weigand, E. Bailly-Rioufreyt, M.A. Vincenti, L. Carletti, J. Kellner, A. Zilli, M. Finazzi, M. Celebrano, R. Grange. Nat. Commun., **16**, 7000 (2025). DOI: 10.1038/s41467-025-62072-7

[3] E. Basor, R. Morrison. Lin. Al. Appl., **697**, 561 (2024). DOI: 10.1016/j.laa.2024.04.031

[4] Y.S. Kivshar, D.E. Pelinovsky. Phys. Reports, **331** (4), 117 (2000). DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00106-4

[5] O. Sinkin, R. Holzlohner, J. Zweck, C. Menyuk. J. Lightwave Technol., **21** (1), 61 (2013). DOI: 10.1109/JLT.2003.808628

[6] S. Zhai, D. Wang, Z. Weng, X. Zhao. J. Scientific Computing, **81**, 965 (2019). DOI: 10.1007/s10915-019-01050-w

[7] Н.А. Кудряшов. *Методы нелинейной математической физики* (МИФИ, М., 2008), 352 с. [N.A. Kudryashov. *Methods of nonlinear mathematical physics* (MIFI, M., 2008), 352 p.]

[8] В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. *Методы обобщенного разделения переменных и функционального разделения переменных для нелинейных уравнений математической физики* (Физматлит, М., 2014), 800 с. [V.F. Zaitsev, A.D. Polyanin. *Methods of generalized separation of variables and functional separation of variables for nonlinear equations of mathematical physics* (Fizmatlit, M., 2014), 800 p.]

[9] В.М. Агранович, В.С. Бабиченко, В.А. Черняк. Письма в ЖЭТФ, **32**, 532 (1980). [V.M. Agranovich, V.S. Babichenko, V.Ya. Chernyak. JETP Lett., **32** (8), 512 (1980).]

[10] И.С. Паняев, И.А. Рожлейс, Д.Г. Санников. ФТТ, **58** (3), 577 (2016). [I.S. Panyaev, I.A. Rozhleis, D.G. Sannikov. Phys. Solid State, **58** (3), 592 (2016).] DOI: 10.1134/S1063783416030252

[11] А.И. Маймистов, Е.И. Ляшко, С.О. Елютин. Квантовая электроника, **50** (12), 1110 (2020). [A.I. Maimistov, E.I. Lyashko, S.O. Elyutin. Quant. Electron., **50** (12), 1110 (2020).] DOI: 10.1070/QEL17457

[12] Y.M. Assylbekov, T. Zhou. J. Spectr. Theory, **11** (1), 1 (2021). DOI: 10.4171/JST/334

[13] V. Kurseeva, S. Tikhov, D. Valovik. J. Non. Opt. Phys. Mater., **28**, 1950009 (2019). DOI: 10.1142/S0218863519500097

[14] H. Dutta. Frontiers Phys., **8**, 62 (2020). DOI: 10.3389/fphy.2020.00062

[15] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics, Fourth Edition* (Academic Press, London, 2020), 609 p.

[16] А.Д. Полянин, Н.А. Кудряшов. Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., **522**, 50 (2025). DOI: 10.31857/S2686954325020083 [A.D. Polyanin, N.A. Kudryashov. Dokl. Math., **111** (2), 134 (2025).] DOI: 10.1134/S1064562425700061
[17] А.Д. Полянин, В.Г. Сорокин. Вестник НИЯУ МИФИ, **96** (4), 315 (2020). DOI: 10.1134/S2304487X20040069 [A.D. Polyanin, V.G. Sorokin. Bull. National Research Nuclear Univ. MEPhI, **96** (4), 315 (2020).] DOI: 10.1134/S2304487X20040069
[18] A. Sukhorukov, Y.S. Kivshar. Phys. Rev. E, **65** (3), 036609 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevE.65.036609
[19] C.-L. Chen. *Foundations for guided-wave optics* (John Wiley & Sons, Inc., 2005), 462 p. DOI: 10.1002/0470042222
[20] M. Thomaschewski, S.I. Bozhevolnyi. Appl. Phys., **9** (2), 021311 (2022). DOI: 10.1063/5.0083083
[21] H. Akazawa, M. Shimada. Mater. Sci. Engineer. B, **120** (1–3), 50 (2005). DOI: 10.1016/j.mseb.2005.02.018
[22] H. Li, F. Huang, J. Guo, H. Gao, H. Li, Z. Wu, X. Yao, Z. Bao, H. Li, Y. Shi, Z. Yu, D. Dai. arXiv.physics.arXiv:2512.10462 (2025). DOI: 10.48550/arXiv.2512.10462
[23] Н.В. Сидоров, А.Ю. Пятышев, П.П. Свербиль, А.В. Скрабатун, М.Н. Палатников. Труды Кольского НЦ РАН. Серия: Технические науки, **14** (4), 83 (2023). [N.V. Sidorov, A.Yu. Pyatyshev, P.P. Sverbil, A.V. Skrabatun, M.N. Palatnikov. Proceed. Kola Scientific Center Russ. Academy Sci. Series: Tech. Sci., **14** (4), 83 (2023).]
[24] M.N. Polyanskiy. Sci. Data, **11**, 94 (2024). DOI: 10.1038/s41597-023-02898-2
[25] S. Boonsit, V. Mourgelas, L. Karam, M. Nedeljkovic, N. Courjal, M. Dussauze, G.S. Murugan. Appl. Phys. B, **131**, 116 (2025). DOI: 10.1007/s00340-025-08477-0

Приложение. Аналитические свойства решения краевой задачи

Основные аналитические свойства решения краевой задачи $(P1)$ можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1: Для фиксированных a, e и заданного $b \neq 0$ условие $\lambda > e$ необходимо и достаточно для того, чтобы решение (18) было вещественным (т. е. $u \in \mathbf{R}$).

Доказательство. Необходимость. Из (18) следует, что условие $u(x) \to 0$ при $x \to -\infty$ требует $\lambda - e > 0$, иначе решение (8) с параметрами (9) и (16) осциллирует или не убывает. Достаточность. Пусть $\lambda > e$, тогда решение (8) действительное и монотонно убывает при $x < 0$ по своему построению. Из (11) следует, что для вещественности κ должно выполняться $\lambda > a$. Из (10) следует, что $x_0 > 0$, если $0 < \mathrm{th}^2(\kappa x_0) < 1$, следовательно

$$0 < \frac{\lambda - e}{\lambda - a} < 1,$$

откуда вытекает, что $e > a$. Значит $\lambda > e > a$. Поэтому условие $\lambda > e$ достаточно для того, чтобы $u \in \mathbf{R}$.

Замечание: Значения спектрального параметра задачи $(P1)$ ограничены снизу, так как в силу теоремы 1 существует $\lambda_{\min} = e$: $\lambda > \lambda_{\min}$.

Теорема 2: Если $b > 0$, решение (18) положительно (т. е. $u(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbf{R}$), а если $b < 0$ — отрицательно.

Доказательство. Из (18) видно, что знак $u(x)$ определяется однозначно знаком параметра $b \ \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Теорема 3: Решение (18) является гладким в $x = 0$.

Доказательство. Разложение в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ при $x < 0$ определяется разложением экспоненты (8):

$$u(x) = u_0\left(1 + qx + \frac{(qx)^2}{2} + O(x^3)\right).$$

Разложение в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ при $x > 0$ определяется разложением функции (10). Если положить $y = \kappa(x - x_0)$, то воспользовавшись разложением

$$\mathrm{sech}^2(y) = 1 - y^2 + \frac{2y^4}{3} + O(y^6),$$

можно получить при учете (17), что получится такое же разложение. Следовательно, данное разложение справедливо и при $x \to -0$ и при $x \to +0$ и его можно представить в виде:

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + O(x^2),$$

где

$$u(0) = u_0 = \frac{3(e-a)}{2b}, \quad u'(0) = \frac{3(e-a)\sqrt{\lambda - e}}{2b}.$$

Одинаковые разложения слева и справа от точки $x = 0$ доказывают его гладкость в нуле.

Замечание: Линейный член в последнем разложении положителен при $b > 0$, отрицателен при $b < 0$.

Теорема 4: Решение (18) является всюду непрерывно-дифференцируемым (т. е. $u \in C^1(\mathbf{R})$).

Доказательство. Функции (8) и (10) непрерывны и имеют непрерывные производные на соответствующих полуосях, поскольку выполнены условия теоремы 1. Непрерывность решения (18) и его производной в точке $x = 0$ следует из его построения, поскольку его параметры находились из краевых условий (6). Гладкость в точке $x = 0$ следует из теоремы 3. Поэтому $u \in C^1(\mathbf{R})$.

Теорема 5: Решение (18) удовлетворяет условиям на бесконечности (7), т. е. $u \to 0$ и $u' \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Доказательство. Из (8) и в силу справедливости теоремы 1 (обеспечивающих $q > 0$) следует, что $u(x) = O(e^{qx})$, $x \to -\infty$. При $x \to +\infty$ с учетом того, что $\mathrm{sech}^2(y) \sim 4y^{-2y}$, из (10) имеем: $u(x) \sim 3\kappa^2 e^{\kappa x_0} e^{-\kappa x}/b$, а значит $u(x) = O(e^{-\kappa x})$, $x \to -\infty$, так как $\kappa > 0$. Поэтому асимптотика решения (18) на бесконечности

$$u(x) = \begin{cases} O(e^{qx}), & x \to -\infty, \\ O(e^{-\kappa x}), & x \to +\infty, \end{cases}$$

откуда следует $u \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Аналогично для производной решения (18), при $x \to -\infty$ условие $u' \to 0$

выполняется, а при $x \to +\infty$ с учетом того, что $u(x) \sim -48\kappa^3 e^{2\kappa x_0} e^{-2\kappa x}/b$, получается, что $u' \to 0$.

Теорема 6: Решение (18) является всюду ограниченным, причем справедлива оценка: $|u(x)| \le \left|\frac{3(\lambda-a)}{2b}\right| \ \forall\ x \in \mathbf{R}$.

Доказательство. При $x < 0$ с учетом $0 < e^{\sqrt{\lambda-e}x} \le 1$ имеем

$$|u(x)| = \left|\frac{3(e-a)}{2b}\, e^{\sqrt{\lambda-e}x}\right| \le \left|\frac{3(e-a)}{2b}\right|.$$

При $x > 0$ с учетом $0 < \operatorname{sech}^2(y) \le 1\ \forall\ y \in \mathbf{R}$ имеем

$$|u(x)| = \left|\frac{3(\lambda-a)}{2b}\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda-a}(x-x_0)/2)}\right| \le \left|\frac{3(\lambda-a)}{2b}\right|.$$

Поскольку $e < \lambda$ и $a < e$, то $e - a < \lambda - a$, и максимум решения (10) достигается на $|u_{\max}| = 6\kappa^2/|b|$, то из последних двух оценок следует, что $|u(x)| \le \left|\frac{3(\lambda-a)}{2b}\right| \ \forall\ x \in \mathbf{R}$.

Теорема 7: Собственная функция краевой задачи $(P1)$ для фиксированного значения спектрального параметра λ существует, единственно и определяется (18).

Доказательство. Следует из определения 1 и совокупности доказанных теорем 1–6.

Определение 3: Пространство $L^2(\mathbf{R})$ — это множество квадратично абсолютно интегрируемых функций с нормой

$$|u|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

Теорема 8: Собственная функция (18) $u \in L^2(\mathbf{R})$ при фиксированных значениях параметров.

Доказательство. Представим норму в виде

$$|u|_2^2 = I_1 + I_2,\ I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} |u(x)|^2 dx,\ I_2 = \int\limits_{0}^{\infty} |u(x)|^2 dx.$$

Проанализируем сходимость этих интегралов

$$I_1 = \left(\frac{3(e-a)}{2b}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\sqrt{\lambda-e}x} dx$$

$$= \left(\frac{3(e-a)}{2b}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{\lambda-e}} < \infty,$$

$$I_2 = \left(\frac{6\kappa^2}{b}\right)^2 \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\kappa(x-x_0))dx$$

$$= \left(\frac{6\kappa^2}{b}\right)^2 \frac{1}{\kappa} \int\limits_{-\kappa x_0}^{\infty} \operatorname{sech}^4(y)dy.$$

Так как $\operatorname{sech}^4(y) \sim 16y^{-4|y|}$ при $|y| \to \infty$, так что интеграл I_2 по лучу $[-\kappa x_0, +\infty)$ сходится, так как подынтегральная функция убывает экспоненциально, т. е. $I_2 < \infty$. Следовательно, $||u||_2^2 = I_1 + I_2 < \infty$, а значит $u \in L^2(\mathbf{R})$.

Замечание: Для решения (18) норму можно вычислить точно

$$||u||_2^2 = \frac{9}{8b^2}\left(\frac{(e-a)^2}{\sqrt{\lambda-e}} + \frac{8}{3}(\lambda-a)^{3/2} + 4(\lambda-a)\sqrt{\lambda-e} - \frac{4}{3}(\lambda-e)^{3/2}\right).$$

Тогда отсюда и теоремы 1 также следует, что при выполнении ее условий эта норма будет конечной.