

01

Фрактальная идентификация процессов самосборки и самоорганизации

© Т.А. Писаренко

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
690041 Владивосток, Россия
e-mail: tata_dvo@iacp.dvo.ru

Поступило в Редакцию 21 ноября 2025 г.
В окончательной редакции 6 мая 2026 г.
Принято к публикации 7 мая 2026 г.

Представлен фрактальный метод идентификации типа упорядочения многомасштабных планарных структур на основе спектров фрактонных размерностей, рассматриваемых как аналог дисперсионного соотношения. Самосборка характеризуется бесщелевым линейным спектром фрактонных размерностей, свойственным скелинговому упорядочению. Тогда как при самоорганизации иерархических сложных структур спектры фрактонных размерностей характеризуются наличием щели в нулевой асимптотике, и либо выходят на плато, что соответствует фрактальному упорядочению, либо усложнены наличием линейного участка после выхода на плато, что соответствует мультифрактальному упорядочению.

Ключевые слова: самоорганизация, самосборка, самоподобие, скейлинг, фракталы, фрактальная размерность, наноструктурированные материалы.

DOI: 10.61011/JTF.2026.08.63354.317-25

Введение

Развитие нанотехнологий неизбежно связано с понятиями самосборки и самоорганизации [1]. Наноструктурированные материалы обладают более сложным иерархическим упорядочением, чем кристаллические или аморфные аналоги [2–6], что инициирует качественно новые свойства материалов, обусловленные упорядочением структуры по принципу самосборки или самоорганизации [3,5,7,8].

В физике процессы самоорганизации принято разделять на „консервативные“ (самосборка), протекающие вблизи термодинамического равновесия [2,6], и „диссипативные“ (самоорганизация), имеющие место в условиях, далеких от термодинамического равновесия [1,9].

Таким образом, с точки зрения термодинамики, самосборка— это консервативная самоорганизация— движущей силой этого процесса является минимизация свободной энергии в системе наночастиц. Минимум энергии достигается при формировании объектов подобных кристаллам, с той разницей, что роль атомов или молекулярных групп в таких образованиях играют наночастицы. Структурное совершенство в этом процессе достигается при минимальном термодинамическом пересыщении. Тогда как самоорганизация— диссипативная самоорганизация— происходит в условиях, далеких от термодинамического равновесия, и является результатом так называемых динамических фазовых переходов. Образование совершенных структур в случае диссипативной самоорганизации происходит, как правило, в тех случаях, когда величина термодинамического пересыщения превышает некоторый критический порог [10–14].

С другой стороны, понятия самосборки и самоорганизации могут быть определены с точки зрения анализа изображений наноструктурированных сред [1,4,15]. Самосборка — процесс образования упорядоченной системы в виде аддитивно составленных (или „собранных“) компонент исходной структуры [1,15]. Самоорганизация — процесс упорядочения элементов сложной системы на более высоком иерархическом уровне организации посредством множественных взаимодействий компонент низких масштабных уровней системы [4], для которых существуют свои, локальные, законы взаимодействия, отличные от коллективных законов поведения самой упорядочивающейся системы. Тем самым упорядоченное состояние физической системы связано с согласованностью поведения подсистем.

Очевидно, что самосборка и самоорганизация являются инвариантными на группе подобия (масштабной инвариантности), но отличаются принципом соподчинения на разных масштабных уровнях. Известно, что принцип масштабной инвариантности обычно связывается с понятием фрактала [7,16–18]. Таким образом, развитие фрактальной методологии открывает новые возможности в трактовке процессов самосборки и самоорганизации. Так, развивая идею Пригожина [10,11] о нарушении симметрии исходного состояния в системе при самоорганизации диссипативных структур, в работе [7] было предложено параметризовать этот процесс величиной фрактальной размерности. С одной стороны, теория фракталов явилась базой для количественного описания самоорганизующихся диссипативных структур [7], а с другой стороны, она может стать необходимым критерием для классификации рассматриваемых процессов.

Традиционно принято считать, что фрактал характеризуется дробной размерностью и обладает свойством масштабной инвариантности [16–20]. Тем не менее Мандельброт в своей работе [16] уточняет понятия фрактала и масштабной инвариантности. Фрактал подразумевает неупорядоченность и относится к структурам ярко выраженной иррегулярности. Тогда как масштабная инвариантность (скейлинг) указывает на некоторый порядок. Это различие, на наш взгляд, может стать основополагающим для фрактальной идентификации процессов самосборки и самоорганизации.

Именно зрительное восприятие огромного числа микроизображений наноструктурированных материалов как фрактальных структур обеспечило быстрое внедрение идей и методов фрактальной геометрии [7,16–27]. Так, в работах [27–32] представлен обзор методов фрактального анализа. Однако все эти методы сводятся лишь к определению фрактальной размерности, и остается открытым вопрос: как по фрактальной размерности отличить масштабно-зависимый мультифрактал от масштабно-независимого монофрактала, как фрактальная размерность отражает характер соподчинения в многомасштабной структуре?

В физике твердого тела одним из основных типов представлений является обратное пространство, и наиболее надежные структурные данные фрактальных объектов, согласно выводам работ [7,19,20], могут быть получены в интервале самоподобия спектра мощности. Предлагаемый в настоящей работе метод фрактального анализа многомасштабных структур не требует дополнительных процедур обработки изображений, и достаточно просто может быть интегрирован в уже существующие приложения по обработке изображений, полученных с помощью сканирующей туннельной микроскопии (СТМ), атомно-силовой микроскопии (АСМ), просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), в которые встроена функция быстрого преобразования Фурье (например, SPIP™, NT-MDT NOVA PX).

В настоящей работе для идентификации типа упорядочения многомасштабных структур предлагается использовать модифицированный мультифрактальный алгоритм Хентшеля–Прокаччо [33]. Нами вводятся спектры фрактонной размерности как мультифрактальная свертка дифракционных картин Фраунгофера (ДКФ) сложных текстурированных изображений. Для удобства сравнения фрактальных характеристик в координатном и обратном пространствах мы вводим понятия фрактальной и фрактонной размерности соответственно. Таким образом, термин фрактонная размерность лишь подчеркивает тот факт, что мы оцениваем фрактальное упорядочение пространственных частот в $R^m(k)$, а не $R^m(r)$ -пространстве, и не связан с квазичастичным аспектом [20,34].

В настоящей работе для диагностики чувствительности предлагаемого метода к характеру организации выбраны самые простые структуры с известным характером соподчинения, а также величиной фрактальной

размерности, и одна твердотельная структура, представляющая собой морфологию поверхности аморфной пленки Co–Ni–P (рис. 1). В качестве тестовых структур используются изображения аналитических решеточных структур, таких как квадратная решетка Браве (рис. 1, *a*), ковер Серпинского (рис. 1, *b*), и трема-фрактал Мандельброта [16] (рис. 1, *c*). Процессы самосборки и самоорганизации предлагается классифицировать, исходя из предположения, что принцип соподчинения уровней многомасштабной структуры может быть как аддитивным, когда процесс упаковки идет в пространстве переменной целочисленной размерности [35], приводя к самосборке, так и иерархическим, когда процесс упаковки идет в пространстве дробной размерности, приводя к самоорганизации. На спектрах фрактонных размерностей это различие проявляется в формировании щели для фрактальных структур. Кроме того, установлено соотношение между фрактальной и фрактонной размерностями.

1. Методика

Анализ степени упорядоченности сложных изображений наиболее целесообразно проводить в спектральном представлении. Пошаговый алгоритм фрактонного анализа изображений предполагает, во-первых, цифровую обработку изображений, во-вторых, получение Фурье-образов (ДКФ), в-третьих, осуществление кольцевой свертки ДКФ в функцию спектральной мощности и уже, в четвертых, применение мультифрактального алгоритма к спектру мощности.

Обработка изображений с целью количественной параметризации и классификации в современных системах обработки изображений предполагает пространственную дискретизацию $f(x, y)$ [36,37]. В результате использования теоретико-множественной методологии анализа изображений возможно реализовать строгое количественное описание многих особенностей геометрической структуры [37].

Для получения ДКФ нами использовалась программа цифрового спектрального анализа изображений KsaImage (Комплекс спектрального анализа электронооптических изображений), в которой реализуется переход от входящей функции $f(x, y)$ в частотную область $F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy$ [36]. Далее проводится линейная аподизация изображения — постепенное выведение сигнала на краях изображения к среднему уровню. Аподизацию рекомендуют проводить для предотвращения некоторых артефактов, обусловленных периодограммным методом оценивания спектральной плотности. Периодограммная оценка спектральной плотности вычисляется в виде:

$$S_{kl} = \frac{1}{N} \left[\sum_{p,q=0}^{N-1} f_{pq} \exp \left[-i \frac{2\pi}{N} (kp + lq) \right] \right]^2,$$

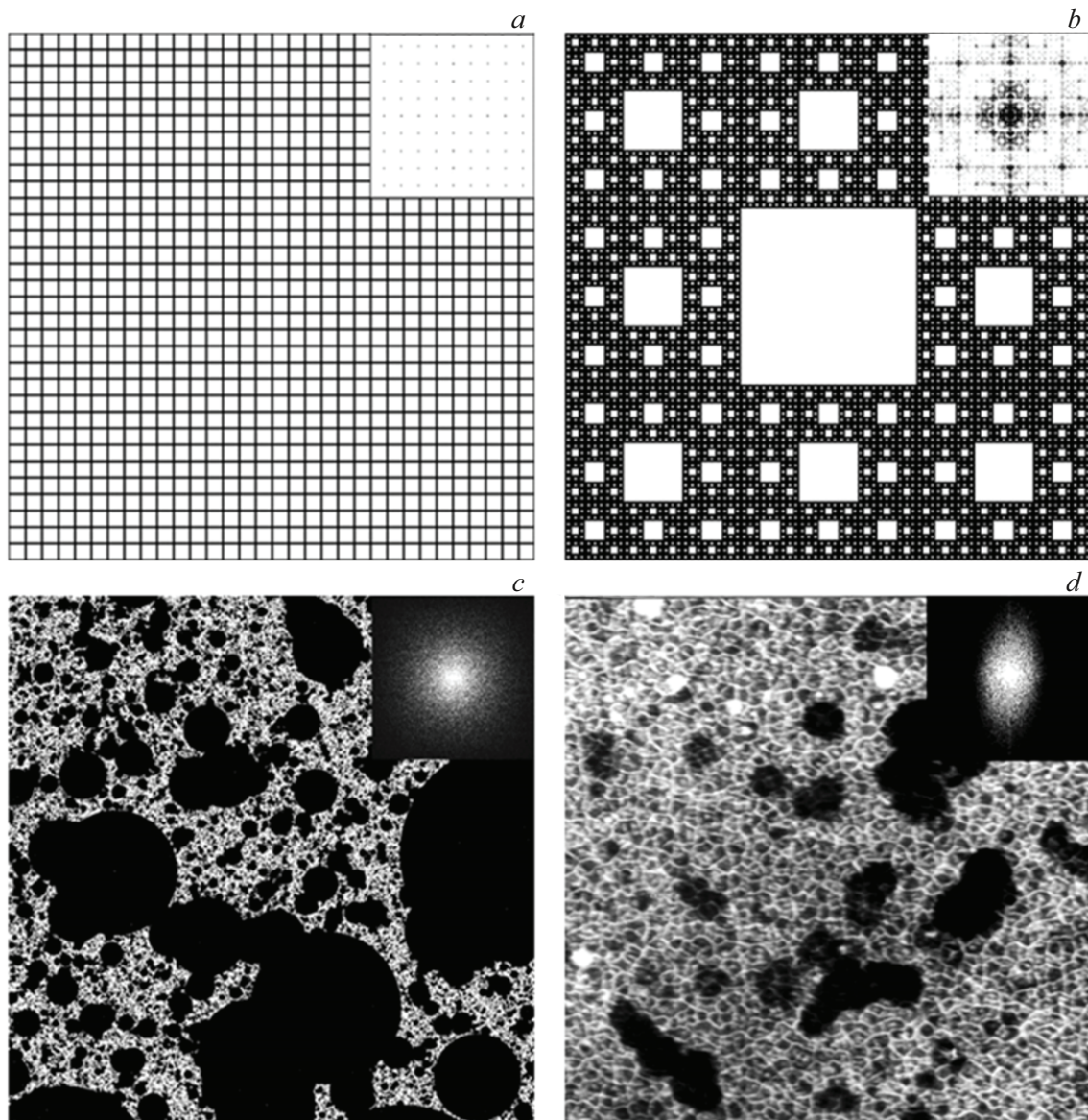


Рис. 1. Изображения исследуемых структур (сканы 512×512 px): *a* — квадратная решетка Браве, *b* — бесконечно делимый ковер Серпинского (5 итераций), *c* — круговой трема-фрактал Мандельброта [16, рис. 426], *d* — система мезодефектов сеточного типа аморфной пленки Co–Ni–P. На вкладках ДКФ, полученные цифровой обработкой исходных изображений.

где $k, l \in \left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1\right]$, f_{pq} — отсчеты аподизированного исходного изображения; S_{kl} — интенсивности гармоник изображения, соответствующих пространственным частотам $u = (2\pi/D_x) \cdot k$, $v = (2\pi/D_y) \cdot l$; D_x, D_y — реальные размеры анализируемого изображения; N — количество отсчетов в одном измерении. При вычислениях используется алгоритм быстрого преобразования Фурье [36]. Переход в обратное пространство концентрирует статистику соответствующих структур в определенных областях спектра по их периоду следования и формфактору. Спектры содержат информацию о распределении по длинам волн структурных элементов, таких как кристаллиты, дефекты, флуктуации плотности материала и т.д.

Программа KsaImage позволяет работать с более высокими уровнями спектрального анализа, которые представлены средствами расчета и анализа интегральной частотной характеристики (ИЧХ), представляющей собой распределение спектральной энергии в системе кольцевых зон, которая по физическому смыслу является спектром мощности [36]. ИЧХ достаточно полно характеризуют статистику изображений сложных объектов, к которым можно отнести изображения многомасштабных сеточных структур, а также микроскопические изображения поверхностей различных твердотельных объектов, в особенности аморфных и нанокристаллических. Как правило, такие структуры имеют ДКФ с весьма сложной спекловой структурой [37,38]. Тем не менее спекл-

ДКФ обладают определенной симметрией, и на них можно реализовать простую процедуру угловой свертки, повышающей достоверность информации. Количественные характеристики симметрии спекл-ДКФ, как раз, и будут определяться фрактонными/фрактальными размерностями. Таким образом, в рамках фрактонного алгоритма анализ упорядочения сложных (многомасштабных, иерархических) изображений проводится на базе спектральных оценок в форме ИЧХ. Предлагаемый метод позволяет избежать традиционных сложностей, связанных с определением числа связей и размерности конфигурационного пространства.

Для того чтобы идентифицировать процессы самоорганизации и самоорганизации, предлагается модифицировать известный алгоритм Хентшеля–Прокаччо [33] на случай спектрального пространства, поскольку в реальном эксперименте наиболее надежные структурные данные получаются при определении корреляционной функции, пространственный Фурье-образ которой пропорционален интенсивности излучения. Как правило [7,17–20], спектральная (фрактонная) размерность определяется как

$$\gamma = \frac{\ln I_0 - \ln I}{\ln k} = \frac{\ln(I_0/I)}{\ln k} \equiv \frac{\ln C(r)}{\ln r},$$

где $C(r)$ — корреляционный интеграл,

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_i^N \sum_j^N \theta(r - |x_i - x_j|),$$

где $|x_i - x_j|$ — расстояние между точками x_i и x_j меньше r , θ — функция Хевисайда (определяется вероятностью найти точку множества в шаре радиуса r с центром в точке x_i) [21,28], k — волновой вектор, I — интенсивность излучения.

Более того, в алгоритме Хентшеля–Прокаччо для класса множеств, ограниченных краевыми условиями [21,33], используются корреляционные меры более высокого порядка

$$C^m(r) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_i^N \left[\frac{1}{N} \sum_j^N \theta(r - |x_i - x_j|) \right]^{m-1} \right\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

Следовательно, в мультифрактальном случае фрактонная размерность определяется как

$$\gamma(m, k) = \frac{\ln \Sigma [I(k_0)/I(k)]^{m-1}}{(m-1) \ln k}. \quad (1)$$

Целочисленный параметр m — порядок меры ($m \in R$); $I(k)$ — спектр мощности. Подчеркнем, что поскольку мы работаем со спектральными функциями, то и размерность в данном случае будет спектральной или фрактонной [20,23].

Выражение (1) по своей структуре соответствует спектру размерностей Реньи [21,39]. Однако следует

заметить, что в спектрах размерностей Реньи, размерность определяется как интегральная характеристика по всему спектру размеров, а спектр размерностей является функцией порядка меры m . Тогда, как в нашем случае, вводится спектр фрактонных размерностей $\gamma_m(k)$, который параметризуется порядком меры, но является функцией пространственных частот k [23,40,41]. Изменение размерности в зависимости от размеров волновых пакетов позволяет трактовать процессы самоорганизации на основе модели Филлипса из алгебраической топологии [35], согласно которой процесс агрегации кластеров осуществляется в пространстве переменной размерности. В нашем случае появляется возможность идентифицировать характер соподчинения масштабных уровней в многомасштабной структуре.

Следует отметить, что формализм спектров фрактонных размерностей (1) может быть применен к изображениям, спектры мощности которых соответствуют классу бесконечно делимых распределений [17,23,42], поскольку фрактальными являются не только степенные распределения, но и такие абсолютно непрерывные распределения как Вейбулла, Коши, розовый шум и т.д. Эти распределения имеют кусочно-линейное приближение в двойных логарифмических шкалах, при этом фрактальная мера может быть представлена взаимосвязанными фрактальными подмножествами, изменяющимися по степенному закону с различными показателями [7,17–21,43]. В этом случае стандартный алгоритм оценки фрактальной размерности может вызывать затруднения, вследствие высокой погрешности, тогда как предлагаемый метод, как раз, ориентирован на ограниченное масштабное разрешение сложных структур. Авторы [43], отмечая, что мультифрактальные меры типа спектров сингулярностей, являясь гладкими функциями, предлагают гораздо больше информации, чем просто фрактальные размерности, предполагали многообразие форм мер для анализа сложных структур. Введенные нами спектры фрактонных размерностей [23] принципиально отличаются от хорошо известных ранее спектров размерностей Реньи [21,39] и/или показателей Гельдера [26,28,44], как было отмечено выше. В нашем случае спектр понимается в классическом физическом смысле: как распределение по волновым векторам (длинам волн) и может рассматриваться как аналог дисперсионных соотношений, но на энтропийном уровне [23].

Кроме того, в рамках нашего подхода фрактонную размерность можно обобщить до дифференциальных мер, в смысле производной Радона–Никодима [23,42]. Данный формализм предполагает формирование энтропийных мер двух типов: спектральной $H_m[I(k)] = \ln \Sigma [I(k_0)/I(k)]^m$ и геометрической $S_m(k) = \ln k^m$, что накладывает ограничения на дискретизацию ДКФ [23,31,45]. Согласно теореме Радона–Никодима [42], $H_m[I(k)]$ может быть представлена как линейный функционал на пространстве $R^m(k)$ от некоторых функций $\gamma_m(k)$ по геометрической

энтропийной мере $S_m(k)$:

$$H_m[I(k)] = \int_0^{S(k)} \gamma_m(\tilde{k}) dS_m(\tilde{k}), \quad (2)$$

что указывает на зависимость $H_m[I(k)] = H[S_m(k)]$. Откуда фрактальная размерность может быть представлена как

$$\gamma_m(k) = \frac{\partial H[S_m(k)]}{\partial S_m(k)}, \quad (3)$$

которая трактуется как плотность спектральной энтропии в логарифмическом шаре волнового $R^m(k)$ -пространства.

Оценки фрактонных размерностей $\gamma_m(k)$ производятся относительно сечения m^* , выбор которого происходит по известному решающему правилу ε -сходимости: $\lim_{m \rightarrow m^*} \frac{\partial \gamma}{\partial m} \Rightarrow 0$. В случае фрактонного анализа плоских изображений $m^* = 5$ [41] и является целочисленной размерностью пространства вложения, в котором данная структура может быть упакована бездефектно. В синергетике и теории аттракторов эта характеристика ассоциируется с нижней границей числа степеней свободы динамической системы [3,7].

Кроме того, нами было установлено соотношение между фрактальной (D_f) и фрактонной (γ) размерностями в координатном и обратном пространстве соответственно. Как известно, для спектров мощности, имеющих степенное распределение интенсивности $I(k) \sim k^{-\gamma}$ [7,17–20], и размерность γ зависит от D_f как $\gamma = 2(3 - D_f)$ [7]. Однако в нашем случае, для достижения согласия величин фрактальной размерности с аналитическими значениями для известных структур [16–18], мы были вынуждены учесть условие понижения показателя γ на единицу для плоских изображений самоподобных структур [46]. В результате зависимость фрактонной размерности от фрактальной может быть выражена как [29,41,47]:

$$\gamma = 2(3 - D_f) - 1 = 5 - 2D_f = m^* - 2D_f. \quad (4)$$

Как можно видеть (4), введенная нами фрактонная размерность γ связывает между собой размерность пространства вложения (порядок меры m) и фрактальную размерность объекта D_f . При этом размерность пространства вложения m^* оказывается связанной с топологической размерностью. Соотношение (4) между фрактонной и фрактальной размерностями указывает на их дуализм. Следует отметить, что в работе [29] авторы также используют соотношение $\gamma = 5 - 2D_f$ между фрактальными размерностями в обратном и координатном пространствах, однако не интерпретируют 5 как размерность пространства вложения.

Поскольку в настоящей работе наиболее важным аспектом является представление спектра размерности как функции пространственных частот, то для верификации предлагаемого формализма, на наш взгляд, будет

методологически достаточным сравнение полученных величин размерности с аналитическими значениями, чем и обусловлен выбор тестовых структур.

2. Результаты и обсуждение

В последнее время все более сложные в топологическом плане изображения с многоуровневой (многомасштабной) периодичностью в стохастическом смысле становятся объектами исследований [7,18–21]. И хотя встречающиеся в реальном мире структуры, исследуемые современной статистической физикой, с точки зрения Мандельброта [16] „не являются фракталами, так как их никоим образом нельзя интерполировать до бесконечно малых масштабов“, однако они похожи на фракталы в той степени, в какой фрактальны их свойства в средних и больших масштабах [17–20]. При этом в синергетике уже давно сформировалось такое научное направление как фрактальное материаловедение [7,48]. Например, идентификация фрактальных особенностей может служить базой для количественного описания степени неравновесности или характера упорядочения при исследовании формирования наноструктур на поверхности.

Как известно [10–12,21,46], фрактальность является достаточным условием для самоорганизации. С целью идентификации процессов самосборки и самоупорядочения проведем фрактальный анализ изображений, имеющих многомасштабную структуру, но при этом соответствующих разным принципам самоорганизации. В качестве тестовых изображений нами будут рассмотрены такие структуры, как квадратная решетка Браве (рис. 1, *a*), бесконечно делимый ковер Серпинского с фрактальным упорядочением (рис. 1, *b*), круговой трема-фрактал Мандельброта (рис. 1, *c*) (заимствован с разрешения правообладателя [16, рис. 426]), представляющий собой фрустрированную сеточную структуру с фрактальной системой круговых тремов, а также микроизображение морфологии поверхности аморфной пленки Co–Ni–P с явно выделенной многомасштабной системой мезодефектов сеточного типа (рис. 1, *d*). Из сравнения рис. 1, *c* и *d* легко видеть, что морфология поверхности аморфной пленки (рис. 1, *d*), напоминает трема-фрактал (рис. 1, *c*).

Очевидно, что как решетка Браве, так и ковер Серпинского подчиняются принципу масштабной инвариантности, однако имеют разный характер распределения элементов.

В общем случае операцию самоподобия с помощью масштабного преобразования можно представить как процедуру разбиения прямой, квадрата или куба на N равных частей. Тогда каждая порождаемая часть будет подобна исходному объекту, но уменьшена в r раз, при этом N и r связаны между собой соотношением $Nr^d = 1$. Отсюда следует, $d = \ln N / \ln(1/r)$, и в случае

решетки Браве $d = D_T$ — минимальная целочисленная размерность пространства (топологическая размерность). Заметим, что эти топологические структуры имеют равномерное распределение элементов множества по размерам, а само множество самоподобно с коэффициентом подобия r .

В работах [18,22] показано, что прямая, квадратная решетка и параллелепипед инвариантны относительно трансляций и изменений масштаба. Истинность этого утверждения доказывается на примере прямой. Согласно масштабному преобразованию $x' = rx$ (r — коэффициент подобия), любая масштабная часть прямой подобна исходной прямой, при этом любой точке отрезка x соответствует единственная точка на прямой x' ; трансляционное преобразование $x' = x + n \cdot a$ (n — любое целое число, a — параметр решетки) переводит вектор решетки в вектор решетки, разумеется, границы при трансляции смещаются, но внутренняя часть решетки при любом выборе n инвариантна относительно трансляции. Тем самым можно сказать, что прямая самоподобна. Самоподобие прямой порождает подобие порождаемых ею фигур.

Если теперь в той же методологии рассмотреть ковер Серпинского, то необходимо заметить, что это бесконечная кривая с петлями всех размеров. Многомасштабная структура фрагментируется на каждом уровне иерархии с масштабным множителем $r_n = (1/3)^n$, где n — уровень иерархии, при этом исходное множество покрывается его $N_n = 8^n$ уменьшенными копиями. Отсюда следует, что ковер Серпинского самоподобен с размерностью подобия $D_s = \ln N / \ln(1/r)$, т.е. в случае фрактального множества со степенным распределением размеров фрагментов структуры масштабные преобразования определяются размерностью подобия или фрактальной размерностью. Причем фрактальная размерность, как раз, и будет выступать инвариантом преобразования симметрии на группе подобия.

Таким образом, рассмотренные выше структуры принципиально отличаются с точки зрения масштабного преобразования. В случае квадратной решетки Браве масштабная инвариантность имеет экстенсивный характер, так как подобие равновероятных элементов множества определяется коэффициентом подобия r , т.е. величиной размеров фрагментируемых элементов множества. Тогда как в случае фрактального множества ковра Серпинского преобразование подобия носит интенсивный характер, так как оно определяется фрактальной размерностью D_s .

Анализируя исследуемые структуры по известным для них размерностям, можно выстроить следующую последовательность. Регулярная квадратная решетка Браве характеризуется только топологической размерностью $D = 2$, тогда как ковер Серпинского, являющийся регулярным перколяционным фракталом, имеет фрактальную размерность $D_f = \ln 8 / \ln 3 \approx 1.89$ (под D_f подразумевается размерность черной фрактальной области). Трема-множество, являющееся случайным лаку-

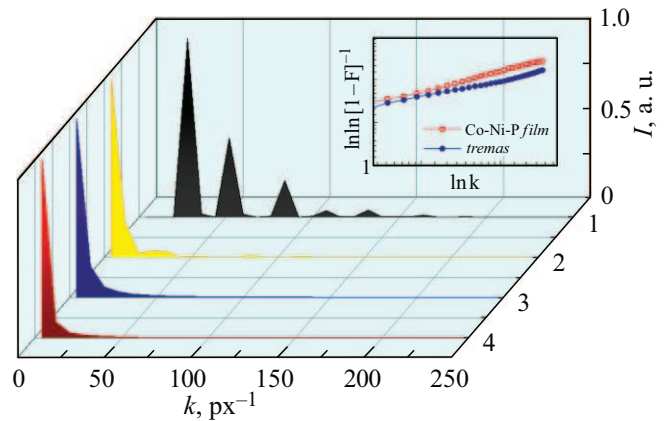


Рис. 2. Спектры мощности исследуемых структур, полученные угловой сверткой ДКФ: 1 — квадратная решетка Браве, 2 — ковер Серпинского, 3 — круговой трема-фрактал Мандельброта, 4 — аморфная пленка Co–Ni–P. На вставке линейаризованные в вейбулловских осях $\{\ln k; \ln \ln [1-F]^{-1}\}$ спектры мощности трема-фрактала и пленки Co–Ni–P.

нарным фракталом, имеет $D_f \approx 1.75$ (под D_f подразумевается размерность белой фрактальной области на рис. 1, c) [16]. Таким образом, из сопоставления этих структур и их размерностей следует, что с понижением размерности сложность структуры увеличивается.

На вкладках рис. 1 представлены дифракционные картины соответствующих структур. Для первых двух структур ДКФ являются дискретными (рис. 1, a, b), что характерно для правильных ячеистых структур и решеток, при этом на рис. 1, b мы можем видеть, что ДКФ отражает многомасштабную текстуру исходного изображения. Тогда как ДКФ на рис. 1, c, d не являются дискретными, но имеют спекл-структуру, что также указывает на текстурированный характер исходного изображения [37,38]. В работе [16] автор утверждает, что, в сущности, большую часть фрактальной геометрии можно представить как своего рода неявное изучение текстуры. Только теперь мы будем ее изучать в виде свертки в обратном пространстве. Стоит отметить, что отсутствие дискретности ДКФ на рис. 1, c, d служит доказательством стохастичности структуры, что не исключает наличие масштабной иерархии в исходном изображении.

Используя процедуру угловой свертки ДКФ [36], были получены спектры мощности (рис. 2). Разный тип дальностей действия отражается в функциях распределения интенсивности ДКФ по диапазонам пространственных частот. Следует подчеркнуть, что энтропийный подход к оценке фрактонных размерностей, согласно выражению (3), требует особой осторожности при обработке дискретных ДКФ, чтобы отнести полученные спектры мощности к классу бесконечно делимых распределений. Так для спекл-ДКФ применяется стандартная процедура разбиения ДКФ на кольцевые зоны по теореме Котельникова [36], тогда как дискретные ДКФ требуют кратного уменьшения числа кольцевых зон, до тех пор

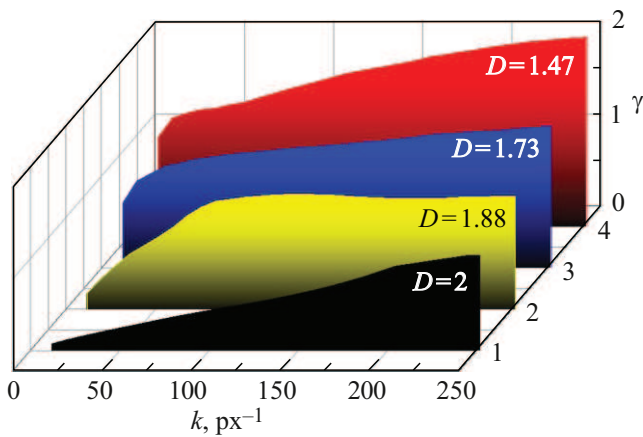


Рис. 3. Спектры фрактонных размерностей исследуемых структур: 1 — квадратная решетка Браве, 2 — ковер Серпинского, 3 — круговой трема-фрактал Мандельброта, 4 — аморфная пленка Co–Ni–P.

пока спектр мощности не будет удовлетворять свойствам меры [49]. Аналогичная процедура усреднения интенсивности с широкими кольцевыми зонами используется и в работах [31,45] при расчете фрактальной размерности регулярных фракталов по ДКФ. При этом, как было отмечено ранее, в нашем случае процедура дискретизации связана с физическим смыслом выражения (2). Процесс масштабирования в $R^m(k)$ может быть рассмотрен как многомерный энтропийный поток, который характеризуется конечным инвариантом дифференциального, а не интегрального типа, в результате при „движении по масштабным уровням“ сохраняется энтропийная плотность $\gamma_m(k)$, которая может выступать в качестве инварианта фрактальной симметрии.

Спектры фрактонных размерностей $\gamma_m^* = 5(k)$, полученные согласно (1), представлены на рис. 3. Как можно видеть, в случае квадратной решетки Браве спектр фрактонных размерностей $\gamma(k)$ имеет линейную зависимость (область 1 на рис. 3), которая в пределе достигает единицы, а, следовательно, согласно (4) $D = 2.00 \pm 0.06$, что совпадает с топологической размерностью и указывает на отсутствие фрактальных свойств. В данном случае структура не является фрактальной, хотя процесс упаковки идет в пространстве переменной размерности [35]. Аддитивный (линейный) характер $\gamma(k)$ можно интерпретировать как скейлинговое упорядочение, характерное для регулярных решеточных структур. Тогда как для фрактальной структуры, в виде ковра Серпинского, γ -спектр в широком диапазоне пространственных частот имеет плато на уровне $\gamma = 1.23 \pm 0.05$ и/или $D_f = 1.88 \pm 0.08$ (область 2 на рис. 3), что весьма близко к аналитическому значению 1.89 [16–18]. Область насыщения γ -спектра является индикатором фрактального (иерархического) характера упорядочения. Отличительной особенностью спектра фрактонных размерностей ковра Серпинского является

наличие линейного участка в области больших размеров и небольшого перегиба на плато. Данный факт указывает на конкуренцию решеточной и фрактальной структур, что обусловлено ограниченным числом итераций (5 итераций) при генерации ковра Серпинского, рис. 1, *b*.

Как известно [7,17–20], для фракталов преобразованием симметрии является иерархическая упаковка со степенным законом распределения, и соответственно, степенными зависимостями спектров мощности. В случае трема-фрактала спектр мощности с 97% уровнем доверия аппроксимируется экспоненциально-степенным распределением Вейбулла (на вставке рис. 2 спектры мощности спрямляются в вейбулловских осях $\{\ln k; \ln \ln[1 - F]^{-1}\}$, где F — интегральная функция распределения спектра мощности), которое удовлетворяет условию бесконечной делимости, а, следовательно, к нему также применим фрактонный алгоритм. На рис. 3 видно, что спектр фрактонных размерностей $\gamma(k)$ трема-фрактала очень быстро выходит на плато с $\gamma \approx 1$, после чего наблюдается линейная зависимость (область 3 на рис. 3), как и в случае квадратной решетки Браве (область 1 на рис. 3), при этом размерность в пределе составляет $\gamma = 1.54 \pm 0.05$ и/или $D_f = 1.73 \pm 0.06$, что соответствует оценкам Мандельброта [16]. Из-за отсутствия насыщения в γ -спектре трема-фрактал можно назвать масштабно-зависимым или мультифракталом. Здесь необходимо обратить внимание, что спектр фрактонных размерностей квадратной решетки Браве начинается из 0 и достигает 1 или $D_T = 2$, тогда как мультифрактальные спектры фрактонных размерностей демонстрируют линейный рост, начиная с $\gamma \approx 1$ и/или $D \approx 2$, то есть в этом случае процесс самоорганизации реализуется в пространстве дробной размерности (причем $\gamma > 1$) и имеет мультифрактальное упорядочение, при котором элементы множества аддитивно соподчинены в пространстве дробной размерности. Следовательно, можно предположить, что трема-фрактал формируется в процессе „мультифрактальной самосборки“. Более сложный характер распределения спектра мощности, скорее всего, и является причиной наличия двух типов соподчинения в структуре: иерархического и аддитивного.

Выше было отмечено, что на спектрах фрактонных размерностей ковра Серпинского наблюдается конкуренция элементов декомпозиции структуры, тогда как у мультифракталов в характере соподчинения имеет место декомпозиция мультипликативного типа. Таким образом, двухкомпонентный характер соподчинения является отличительной чертой мультифрактальных структур. Кроме того, легко видеть, что стохастизация структуры привела к понижению фрактальной размерности D_f .

Как отмечалось выше, система мезодефектов сеточного типа аморфной пленки Co–Ni–P, рис. 1 *d*, визуально схожа со структурой трема-фрактала, рис.1 *c*, поэтому неудивительно, что их γ -спектры имеют общий характер зависимости (области 3 и 4 на рис. 3), но величина фрактонной размерности пленки Co–Ni–P значительно выше $\gamma = 2.05 \pm 0.05$ и/или $D_f = 1.47 \pm 0.04$. Как

можно видеть, γ -спектр морфологической структуры пленки Co–Ni–P (область 4 на рис. 3), как и трема-фрактала (область 3 на рис. 3), имеет двухкомпонентный характер: крупномасштабные поры имеют планарную топологию $D = 2$, тогда как мезомасштабная сеточная система областей пониженной плотности структуры мезодефектов пленки Co–Ni–P имеет мультифрактальное упорядочение. В этом случае фрактальная размерность отражает симметрию разбиения пространства в термодинамически неравновесном процессе ее формирования и может рассматриваться как аналог критических индексов. В данном случае, более широкий диапазон размерностей 1.47–2, чем у трема-фрактала (1.73–2), характеризует большее структурное разнообразие, что проявляется в более высоком угле наклона линейной части спектра. При этом повышается степень сложности или хаотичности структуры, сопровождающаяся понижением фрактальной размерности структуры в целом.

Теперь остановимся на анализе спектров фрактонных размерностей, рис. 3, позволяющем классифицировать процессы самосборки и самоорганизации. Как можно видеть, в случае решетки Браве линейный γ -спектр указывает на аддитивный принцип соподчинения уровней многомасштабной структуры (область 1 на рис. 3), что позволяет интерпретировать их как структуры со скейлинговым упорядочением [16,43,47]. Таким образом, решеточное упорядочение аналогичное атомарному (кристаллическому) подчиняется принципу скейлинга, когда симметрия разбиения пространства остается традиционной, но на более высоком масштабном уровне, и трактуется как самосборка [1,6,15]. Налицо самоорганизация, когда соподчинение уровней многомасштабной структуры будет аддитивным. Откуда следует, что самосборка суть скейлинговое упорядочение с линейным (аддитивным) γ -спектром. Тогда как в случае ковра Серпинского процесс самоорганизации с иерархическим соподчинением масштабных уровней приводит к фрактальному упорядочению структуры, что на γ -спектрах проявляется в наличии щели при выходе на плато при $\gamma > 1$ (область 2 на рис. 3). В этом случае в процессе разбиения пространства инвариантом преобразования симметрии выступает фрактальная/фрактонная размерность.

В случае мультифракталов самоорганизация многомасштабной структуры осуществляется комбинированным способом соподчинения масштабных уровней, при этом на γ -спектрах имеет место наличие щели на величину $\gamma \approx 1$, как и в предыдущем случае, а сам процесс „мультифрактальной самосборки“ является случайным и классифицируется как самоорганизация.

Как отмечалось выше, спектры фрактонных размерностей для фрактальных структур (рис. 1, $b-d$) имеют двухкомпонентный характер, однако для мультифрактальных структур формирование щели $\gamma \approx 1$ наблюдается уже в диапазоне 1–2 кольцевой зоны ($k \approx 10-20 \text{ px}^{-1}$) (области 3 и 4 на рис. 3), тогда как для ковра Серпинского имеет место последовательное

изменение спектра (область 2 на рис. 3): в области крупномасштабных периодичностей ($k = 10-70 \text{ px}^{-1}$) спектр линейный, а далее он выходит на плато, на котором имеется локальный минимум в области $k \approx 190 \text{ px}^{-1}$. По аналогии с энергетическими спектрами твердого тела высота щели может быть определена как $\gamma_{min} \approx 1.21$. Таким образом, в настоящей работе критерием для идентификации процессов самосборки и самоорганизации является отсутствие или наличие щели на γ -спектрах соответственно. Введенный нами спектр фрактонной размерности $\gamma(k)$ не просто отражает степень сложности структуры, как сама фрактальная размерность D_f , а может служить индикатором характера самоорганизации структуры в зависимости от вида функции $\gamma(k)$, который можно рассматривать как аналог дисперсионного соотношения.

Заключение

Предложенный подход к анализу характера упорядочения многомасштабных структур позволяет классифицировать процессы самоорганизации с точки зрения спектров фрактонных размерностей. Еще раз подчеркнем, что в нашем случае спектр фрактонной размерности строится не по показателю сейлинга [18,25,38,39], как в случае показателей Гельдера, или порядка меры [20,21,29,34], как в случае спектров размерностей Реньи, а по волновому вектору, что позволяет рассматривать их как аналог дисперсионного соотношения. В этой методологии для γ -спектров фрактальных и мультифрактальных структур характерно наличие щели ($\gamma \geq 1$), на основании чего можно предположить, что в таких сложных системах невозможно выделить одномасштабные уровни. Наличие щели можно трактовать как фрактальное квантование энтропийной плотности в $R(k)$ -пространстве.

Легко видеть, что масштабная инвариантность предполагает различные сценарии многомасштабного упорядочения. Решеточные структуры, сформированные в процессе самосборки, можно характеризовать скейлинговым упорядочением. Тогда как многомасштабные структуры типа ковра Серпинского, также подчиняющиеся принципу масштабной инвариантности, имеют фрактальное упорядочение. В свою очередь, мультифракталы представляют собой декомпозицию скейлингового и фрактального упорядочений, причем само понятие мультифрактал предполагает, что декомпозиция будет мультипликативной.

В работе показано, что сеточные структуры, образующие широкое топологическое разнообразие, могут быть параметризованы как фрактальной размерностью, так и спектром фрактонной размерности. Характер спектров фрактонных размерностей, полученных на основе алгоритма мультифрактальной свертки дифракционных картин Фраунгофера, позволяет идентифицировать процессы самосборки и самоорганизации. Для классифика-

ции процессов самосборки и самоорганизации принципиальным является даже не сам характер упорядочения волновых пакетов в спектре фрактонных размерностей, а наличие щели в нулевой асимптотике γ -спектра: бесщелевой характер спектра при самосборке и наличие щели при самоорганизации. С точки зрения физики твердого тела, спектры фрактонных размерностей могут быть интерпретированы как закон энтропийной локализации или фрактального квантования энтропийной плотности. Предлагаемый метод фрактальной идентификации характера упорядочения расширяет возможности параметризации структур, представляющих интерес для исследователей наноструктурированных поверхностей.

Финансирование работы

Работа финансировалась за счет средств бюджета Института автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН в рамках государственного задания „Синтез и исследование свойств низкоразмерных структур и полупроводниковых наноматериалов“ (№ FFW-2026-0007).

Благодарности

Автор выражает благодарность за многолетнее научное руководство профессору, Заслуженному деятелю науки РФ Юдину В.В., а также профессору Грудину Б.Н. за предоставленную возможность работы с программой KsaImage „Комплекс спектрального анализа электронно-оптических изображений“. Грудин Б.Н., Кисленок Е.Г., Плотников В.С. ДВФУ. Свидетельство № 2004610777. (2004)].

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.А. Елисеев, А.В. Лукашин. *Функциональные наноматериалы* (Физматлит, М., 2010)
- [2] Ю.Д. Третьяков. *Успехи химии*, **72** (8), 747 (2003).
- [3] Г. Хакен. *Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (Мир, М., 1985) [Пер. с англ.: Н. Haken. *Advanced Synergetics. Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices.* (Springer, Berlin, 1983)]
- [4] П.В. Лебедев-Степанов, Р.М. Кадушников, С.П. Молчанов, Н.И. Рубин, Н.А. Штуркин, М.В. Алфимов. *Рос. нанотехнол.*, **8** (3–4), 5 (2013).
- [5] В.А. Жабреев, В.И. Маргопин, В.С. Павельев. *Введение в нанотехнологию* (Изд-во СГАУ, Самара, 2007)
- [6] *Encyclopedia of nanoscience and nanotechnology*, ed. by H.S. Nalwa (ASP, New Orleans, 2004). v. 9, p. 497–652.
- [7] В.С. Иванова, А.С. Баланкин, И.Ж. Бунин, А.А. Оксогоев. *Синергетика и фракталы в материаловедении* (Наука, М., 1994)
- [8] P. Yang, D. Zhao, D.I. Margolese, B.F. Chmelka, G.D. Stucky. *Nature*, **396**, 152 (1998). DOI: 10.1038/24132
- [9] C.J. Brinker, Y.F. Lu, A. Sellinger, H.Y. Fan. *Adv. Mater.*, **11**, 579 (1999). DOI: 10.1002/(SICI)1521-4095(199905)11:7<579::AID-ADMA579>3.0.CO;2-R
- [10] Г. Николис, И. Пригожин. *Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации* (Мир, М., 1979) [Пер. с англ.: G. Nikolis, I. Prigogine. *Self-organization in nonequilibrium systems* (Wiley Interscience, NY, 1977)]
- [11] И. Пригожин. *От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках* (Наука, М., 1985) [Пер. с англ.: I. Prigogine. *From being to becoming: Time and complexity in the physical sciences* (WH Freeman and Company, San Francisco, 1980)]
- [12] Ю.Л. Климонтович. *Введение в физику открытых систем* (Янус-К, М., 2002)
- [13] M. Poletini. *Europhys. Lett.*, **97**, 30003 (2012). DOI: 10.1209/0295-5075/97/30003
- [14] А.И. Олемской, И.В. Коплык. *УФН*, **165** (10), 1105 (1995). DOI: 10.3367/UFN.0165.199510a.1105
- [15] *Словарь нанотехнологических и связанных с нанотехнологиями терминов*, под ред. С.В. Каложного (Физматлит, М., 2010)
- [16] Б. Мандельброт. *Фрактальная геометрия природы* (Институт компьютерных исследований, М., 2002) [Пер. с англ.: B. Mandelbrot. *Fractal Geometry of Nature* (WH Freeman and Company, San Francisco, 1982)]
- [17] М. Шредер. *Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая* (РХД, Ижевск, 2001) [Пер. с англ.: M. Schroeder. *Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise* (Courier Corporation, Massachusetts, 2009)]
- [18] Е. Федер. *Фракталы* (УРСС: Ленанд, М., 2014) [Пер. с англ.: J. Feder. *Fractals* (Plenum Press, NY, 1988)]
- [19] А.И. Олемской, А.Я. Флат. *УФН*, **163** (12), 1 (1993). DOI: 10.3367/UFN.0163.199312a.0001
- [20] В.В. Зосимов, Л.М. Лямшев. *УФН*, **165** (4), 361 (1995). DOI: 10.3367/UFN.0165.199504a.0361
- [21] Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос* (Наука, М., 1992)
- [22] С.В. Терехов. *Фракталы и физика подобия* (Цифровая типография, Донецк, 2011)
- [23] В.В. Юдин, Е.А. Любченко, Т.А. Писаренко. *Информодинамика сетевых структур. Вероятность. Древесные графы. Фракталы* (Изд-во ДВГУ, Владивосток, 2003)
- [24] С.В. Полищук, К.А. Петров. *Международный научно-исследовательский журнал*, **2-1** (116), 24 (2022). DOI: 10.23670/IRJ.2022.116.2.003
- [25] И.Г. Григоров, Л.Н. Ромашев. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, **5**, 27 (2021). DOI: 10.31857/SI028096021050101
- [26] В.Л. Гиляров, В.Е. Корсуков, П.Н. Бутенко, В.Н. Светлов. *ФТТ*, **46** (10), 1806 (2004).
- [27] А.А. Потапов, В.А. Кузнецов, А.Н. Потоцкий. *Радиотехника и электроника*, **66** (5), 457 (2021).
- [28] А.Н. Павлов, В.С. Анищенко. *УФН*, **177** (8), 859 (2007).
- [29] W. Zhou, Y. Cao, H. Zhao, Z. Li, P. Feng, F. Feng. *Fractal Fract.*, **6** (3), 135 (2022).
- [30] S.R. Nayak, J. Mishra, G. Palai. *Image Vis. Comput.*, **89**, 21 (2019).

- [31] Г.В. Арзамасцева, М.Г. Евтихов, Ф.В. Лисовский, Е.Г. Мансветова. Радиоэлектроника. Наносистемы. ИТ, **4** (2), 93 (2012).
- [32] В.А. Анофриев, А.В. Низенко, Д.В. Иванов, А.С. Антонов, Н.Ю. Сдобняков. Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов, **14**, 264 (2022).
- [33] H.G.E. Hentschel, I. Procaccia. Physica D: Nonlinear Phenomena, **8** (3), 435 (1983). DOI: 10.1016/0167-2789(83)90235-X
- [34] В.А. Багрянский, В.К. Малиновский, В.Н. Новиков, Л.М. Пущаева, А.П. Соколов. ФТТ, **30** (8), 2360 (1988).
- [35] Дж. Филипс. В сб.: *Физика за рубежом* (Мир, М., 1983), с. 154. [Пер. с англ.: J.C. Phillips. Phys. Today, **2**, 27 (1982)]
- [36] Б.Н. Грудин, В.С. Плотников. *Обработка и моделирование микроскопических изображений* (Дальнаука, Владивосток, 2010)
- [37] В.В. Юдин. *Стохастическая магнитная структура пленок с микропористой системой* (Наука, М., 1987)
- [38] J. Uozumi, M. Ibrahim, T. Asakura. Opt. Commun., **156**, 350 (1998). DOI: 10.1364/OE.15.013817
- [39] Р. Бадии, А. Полити. В сб.: *Фракталы в физике*, под ред. Я.Г. Синая, И.М. Халатникова (Мир, М., 1988), с. 632. [Пер. с англ.: R. Badii, A. Polit. In *Fractals in Physics*, ed. by L. Pietronero, E. Tosatti (Elsevier, Amsterdam, 1986), p. 453.]
- [40] Т.А. Писаренко, В.В. Юдин. Материаловедение, **1**, 6 (2002).
- [41] G.S. Kraynova, A.M. Frolov, T.A. Pisarenko. Adv. Mater. Res., **718-720**, 85 (2013). DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.718-720.85
- [42] У. Гренандер. *Лекции по теории образов: Анализ образов* (Мир, М., 1981), т. 2. [Пер. с англ.: U. Grenander. *Lectures in Pattern Theory: V. 2: Pattern Analysis* (Springer, NY., 1981)]
- [43] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, V.I. Shraiman. Phys. Rev. A, **33** (2), 141 (1986). DOI: 10.1103/PhysRevA.33.141
- [44] Г.А. Гуйо, А.Н. Павлов. Известия вузов. ПНД, **31** (3), 305 (2023). DOI: 10.18500/0869-6632-003041
- [45] А.А. Зинчик, Я.Б. Музыченко, А.В. Смирнов, С.К. Стафеев. Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, **2** (60), 17 (2009).
- [46] В.С. Иванова, А.А. Шаняевский. *Количественная фрактография. Усталостное разрушение* (Металлургия, Челябинск, 1988)
- [47] Т.А. Pisarenko, G.S. Kraynova, A.M. Frolov. Solid State Phenom., **247**, 101 (2016). DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.247.101
- [48] А.А. Потапов, В.В. Булавкин, В.А. Герман, О.Ф. Вячеславова. ЖТФ, **75** (5), 28 (2005). [А.А. Potapov, V.V. Bulavkin, V.A. German, O.F. Vyacheslavova. Tech. Phys., **50** (5), 560 (2005). DOI: 10.1134/1.1927210]
- [49] А.М. Frolov, T.A. Pisarenko. Solid State Phenom., **312**, 229 (2020). DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.312.229