03

Численный расчёт дифракционных потерь и распределения поля мод кольцевого трёхзеркального оптического резонатора методом собственных векторов

© И.С. Потапова, В.А. Цеваков ¶, И.И. Савельев

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

¶ e-mail: cevakovviktor@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.12.2025 г.
В окончательной редакции 29.03.2026 г.
Принята к публикации 21.04.2026 г.

Рассмотрена задача нахождения распределения поля и потерь мод оптического кольцевого трёхзеркального резонатора. Особенностью задачи является необходимость решения в трехмерном пространстве и применения численных методов. Применён метод „собственных векторов“ для численного расчёта распределения поля и потерь кольцевого резонатора с круглой и квадратной диафрагмами. Проанализирована сходимость метода и проведена валидация данного метода путём сравнения с ранее полученными аналитическими и численными результатами. Получены и проанализированы картины распределения электрического поля в резонаторе и величина дифракционных потерь. Метод может быть применен к расчёту более сложных кольцевых конфигураций резонаторов, в том числе разъюстированных резонаторов.

Ключевые слова: оптический кольцевой резонатор, апертура диафрагмы, метод собственных векторов, распределение электрического поля, дифракционные потери.

DOI: 10.61011/OS.2026.05.63351.8879-25

Введение

Оптические резонаторы являются важным элементом в лазерной технике: они формируют структуру генерируемого излучения и обеспечивают многократное прохождение излучения через активную среду для большего усиления, поэтому точность расчёта поля внутри резонатора важна для получения заданных параметров лазера. Особую значимость результаты расчёта поля и дифракционных потерь имеют для кольцевых лазеров, применяемых в метрологии и навигации, поскольку резонатор в этом случае является чувствительным элементом [1].

В процессе создания новых лазерных устройств ключевым аспектом становится выбор оптимальной оптико-физической конфигурации резонатора. Существующие аналитические методы расчёта параметров резонаторов имеют точное решение только в предположении о бесконечности апертур диафрагмы или гауссовой диафрагмы, а в остальных случаях позволяют получить только грубую оценку дифракционных потерь [1,2]. Поэтому необходимо использовать численные методы. Существует несколько численных методов для определения поля в резонаторе [3–5]. В настоящей работе использовался метод собственных векторов [5], поскольку он не требует больших вычислительных мощностей и является наиболее простым в реализации [6].

Для линейных резонаторов данный метод применен в [7] с использованием прямоугольной сетки для разбиения поля на диафрагме.

В работе [6] представлены результаты, полученные таким методом, для четырёхзеркального кольцевого непланарного резонатора с использованием сетки Фибоначчи.

Целью настоящей работы является расчёт дифракционных потерь и распределения поля трёхзеркального резонатора с использованием прямоугольной сетки разбиения поля на диафрагме, которая наиболее наглядна и проста в реализации. Расчёт позволил представить не только качественную картину распределения поля, но и рассчитать собственные частоты и дифракционные потери резонатора для первых поперечных мод, а также исследовать сходимость метода при варьировании количества точек разбиения диафрагмы.

Теоретические основы применённого метода

Исследуемый оптический резонатор представляет собой трёхзеркальную кольцевую систему, состоящую из двух плоских и одного сферического зеркала, с диафрагмой круглой или квадратной формы. Обозначения геометрических параметров резонатора, использованные в расчётах, приведены на рис. 1.

Смоделируем распространение светового пучка в резонаторе. Рассмотрим область dS поверхности G на одном из элементов резонатора, на которой известно распределение электрического поля U_0 световой волны. В нашем случае это плоскость диафрагмы, в общем случае это может быть любая область. Поле U световой

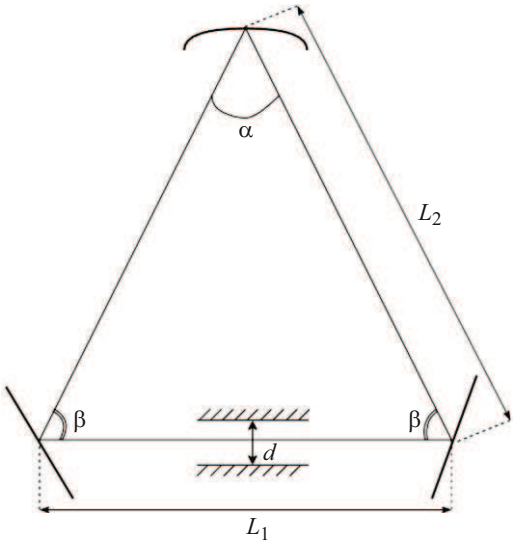


Рис. 1. Конфигурация лазерного резонатора: α — двойной угол падения на сферическое зеркало поворота волнового фронта при отражении от сферического зеркала, β — угол при отражении от плоских зеркал, d — диаметр диафрагмы, L_1 и L_2 — линейные размеры резонатора.

волны в другой точке односвязной области с однородной средой представляется интегральным уравнением Кирхгофа [8]:

$$U = \frac{ik}{4\pi} \iint\limits_G U_0 \frac{e^{ikr}}{r}(1 + \cos\varphi)dS, \qquad (1)$$

где r — расстояние от элемента площади поверхности dS до точки наблюдения, φ — угол между внешней нормалью n к поверхности G в точке элемента dS и направлением на точку наблюдения.

Рассмотрим конфигурацию на рис. 1 в декартовой системе координат, где ось z направлена вдоль направления распространения луча в резонаторе, а оси $0x$ и $0y$ лежат в плоскости сечения луча. Сечение диафрагмы описывается переменными x_0, y_0. Согласно [6], $U(x, y)$ на любом другом элементе резонатора можно найти, зная распределение $U_0(x_0, y_0)$. В случае бесконечной апертуры зеркал можно обойтись без промежуточных интегралов, пользуясь методом ABCD-матриц. Последовательно перемножая матрицы элементарных участков вдоль направления обхода, можно получить лучевую матрицу полного обхода резонатора M размером 4×4.

Для свободного пространства длиной L матрица трансляции имеет вид:

$$T(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица отражения для сферического зеркала радиусом R при наклонном падении под углом α имеет вид:

$$T_{sph}(R, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{R\cos\alpha} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2\cos\alpha}{R} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для трёхзеркального резонатора (рис. 1) матрица обхода A формируется перемножением матриц всех плеч и отражений. Матрицу A удобно представить в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

Где A_1, B_1, C_1, D_1 — подматрицы размером 2×2. Следуя методу ABCD-матриц, поле на исходной плоскости после полного обхода даётся интегралом Коллинза — параксиальным обобщением интеграла Кирхгофа для оптических систем, описываемых лучевыми матрицами [4,9]. В векторно-матричной форме, обозначая $r_0 = (x_0, y_0)^T$, $r = (x, y)^T$, имеем

$$U(x, y) = \frac{ie^{-ikL}}{\lambda\sqrt{\det(B_1)}} \times \iint U_0(x_0, y_0) e^{-\frac{i\pi}{\lambda}(r_0 B_1^{-1} A r_0 + r D_1 B_1^{-1} r - 2 r_0 B_1^{-1} r)} dx_0 dy_0, \qquad (2)$$

Здесь L — полный оптический путь за обход резонатора, k — волновое число, а λ — длина волны.

В соответствии с [6] область G можно представить в виде сетки из n элементов и заменив двойной интеграл в (1) и (2) на сумму, воспользоваться принципом Гюйгенса–Френеля — просуммировать поля от n точечных источников. Тогда мы найдём поле в каждом узле сетки:

$$U_j = \frac{ik}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-ikr_{ij}}}{r_{ij}}(1 + \cos\varphi_i) ds_i U_i, \qquad (3)$$

где r_{ij} — расстояние от узла сетки U_i до узла сетки U_j, ds — площадь элементарной ячейки, φ_i — угол между радиус-вектором r_{ij} и вектором нормали к поверхности зеркала в i-м узле. Перепишем уравнение (6) в матричной форме:

$$U_j[n] = A_{ij}[n \times n] U_i[n]. \qquad (4)$$

Учитывая, что за один обход лучом резонатора распределение поля воспроизводится, можно найти собственные векторы и значения матрицы обхода резонатора:

$$\gamma_n U[n] = AU[n]. \qquad (5)$$

Здесь γ_n — собственное значение матрицы обхода A, для каждого ищется собственный вектор U, который отвечает за поперечное распределение поля в резонаторе. Спектр характеризует мнимая часть собственного

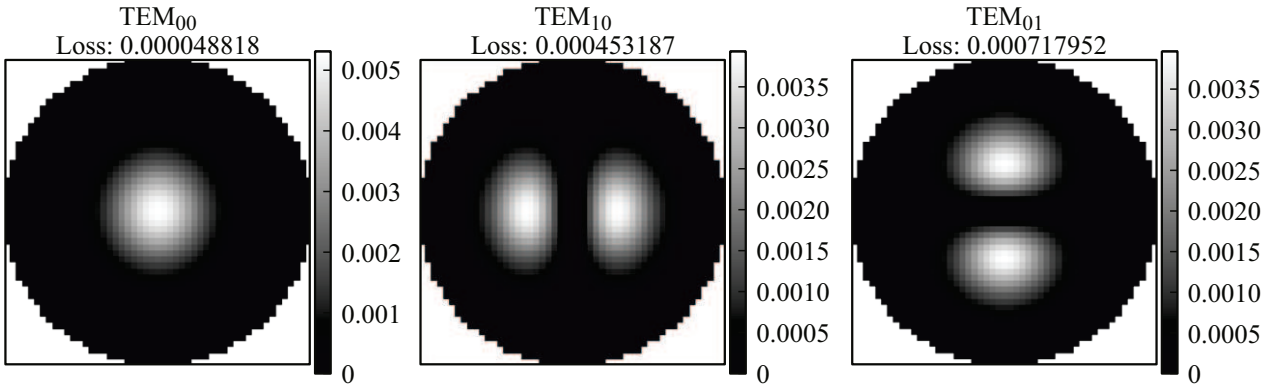


Рис. 2. Распределение поля и потери для мод TEM_{00}, TEM_{01} и TEM_{10} в оптическом резонаторе с круглой диафрагмой.

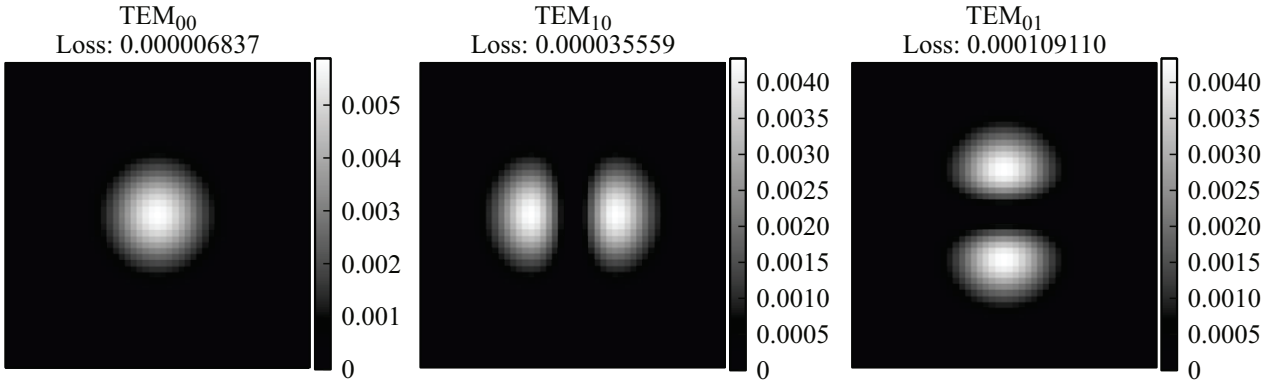


Рис. 3. Распределение поля и потери для мод TEM_{00}, TEM_{01} и TEM_{10} в оптическом резонаторе с квадратной диафрагмой.

вектора $\mathrm{Im}(\gamma_n)$. Межмодовое расстояние рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi_i = \frac{c(\mathrm{Im}(\gamma_n) - \mathrm{Im}(\gamma_0))}{2\pi L}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{Im}(\gamma_0)$ — мнимая часть собственного значения с наибольшей действительной частью (соответствует моде TEM_{00}).

Потери характеризуются действительной частью собственного значения $\mathrm{Re}(\gamma_n)$. Таким образом, для нахождения распределения и потерь поля был разработан следующий алгоритм:

1) сеточное разбиение пространства на диафрагме;

2) расчёт матриц перехода с помощью (4) для плоского и сферического зеркал, перемножение получившихся матриц;

3) поиск собственных векторов и значений итоговой матрицы обхода (формула (5)), сортируемых по убыванию модуля собственного значения;

4) построение графика распределения поля на диафрагме после обхода резонатора.

Реализация и параметры расчёта

По описанному выше алгоритму была написана программа на языке программирования Python, реализующая метод собственных векторов. Программа использует библиотеку numpy, содержащую все необходимые математические инструменты для работы с матрицами и для поиска их собственных векторов и значений. Для графического отображения распределения поля использовалась библиотека matplotlib. Для аппроксимации графиков была взята за основу библиотека scipy.

На вход программы вводятся параметры системы: λ — - длина волны в mm, r — радиус круглой диафрагмы в mm, n — количество элементарных ячеек при разбиении, L — длина резонатора в mm, R — радиус кривизны сферического зеркала в mm, α — угол при вершине резонатора в градусах. На выходе программа выводит картину распределения поля в осях $x0y$ для разных мод с указанными потерями для каждой моды, так же считается спектр частот резонатора и отображаются графики распределения поля для 00-моды в осях $y0z$ и $x0z$. Полученные графики аппроксимируются гауссианом, и по параметрам гауссиана считается размер получившегося пучка.

Запуск программы производился при разных n для уточнения потерь. Учитывая квадратичную зависимость вычислительной сложности алгоритма $O(n^2)$ от размера сетки, максимальное значение n ограничивалось доступным объёмом оперативной памяти.

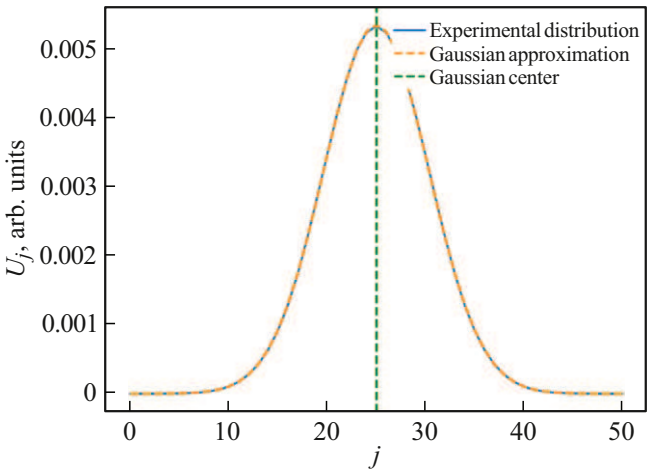


Рис. 4. Распределение электромагнитного поля U_j моды TEM_{00} от номера точки разбиения j для $n = 50$.

В ходе исследования был проведён анализ при изменении n от 30 до 120 с шагом 5. Такой подход позволил исследовать сходимость рассчитанных значений потерь при увеличении разрешающей способности сетки, а также определить оптимальное соотношение между точностью вычислений и вычислительными затратами.

Результаты

В результате были получены картины распределения электрического поля и дифракционные потери для мод, которые представлены на рис. 2 и 3. Полученные картины распределения электрического поля соответствуют теоретическим и экспериментальным данным. Внешний вид распределения совпадает с картинами распределения, приведёнными в работе [10]. Измеренный по результатам вывода программы на рис. 4 по параметрам гауссиана диаметр пучка основной моды (0.507 mm) близок к оценке диаметра пучка методом ABCD-матриц (0.493 mm) с точностью 3 %.

Полученные значения потерь были сопоставлены с аналитическими оценками, приведёнными в работе [11] для мод гауссова пучка в линейном резонаторе для квадратной диафрагмы. Для корректного сравнения был рассмотрен эквивалентный кольцевому линейный резонатор. На основе геометрических параметров системы было вычислено число Френеля. Для данного числа Френеля из [11] были определены теоретические значения дифракционных потерь, которые сошлись по порядку с результатами, полученными методом собственных векторов.

Результаты численного моделирования показывают соответствие рассчитанного спектра собственных частот резонатора (таблица) с данными, представленными в работе [2]. В таблице $\Delta\varphi_{01}$ и $\Delta\varphi_{10}$ — межмодовые расстояние для TEM_{01} и TEM_{10}, рассчитанные по формуле (6). Максимальное отклонение значений частот от экспериментальных значений для идентичной конфигурации резонатора не превысило 3 %.

Сравнение экспериментальных и теоретических данных рассчитанного спектра собственных частот резонатора.

Источник	$\Delta\varphi_{01}$, MHz	$\Delta\varphi_{10}$, MHz
Теоретическое значение	53	47
Экспериментальное значение	54	49

Проведенный параметрический анализ влияния дискретизации апертуры (n — количество элементов разбиения поля на диафрагме) на точность расчетов позволил получить зависимости дифракционных потерь от степени дискретизации. Построенные графики на рис. 5 отображают стремление дифракционных потерь к установившимся значениям при увеличении n, что говорит о сходимости численного метода.

Исходя из графиков сходимости потерь на рис. 5 можно выделить две характерные области.

1. При $n < 50$ наблюдается значительный разброс значений потерь, что связано с недостаточной детализацией сетки, при которой грубое разбиение не может адекватно описать структуру моды. Вследствие этого происходит существенная ошибка дискретизации, и, как следствие, большая доля мощности моды отбрасывается на границах размерной сетки.

2. При $n > 50$ разброс значений существенно уменьшается, значения потерь стабилизируются. Дальнейшее увеличение n не приводит к значимому изменению потерь, но ведет к росту вычислительных затрат.

Заключение

В работе показана возможность использования метода собственных векторов для численного решения интегрального уравнения, определяющего собственные частоты, пространственное распределение поля и дифракционные потери мод трёхзеркального оптического резонатора с круглой и квадратной диафрагмой. Разработана программа для расчёта методом собственных векторов распределения поля и дифракционных потерь мод трёхзеркального резонатора. Выяснено, что сходимость метода зависит от разбиения области, в которой рассчитывается поле. Определено оптимальное количество элементов разбиения.

Проведена валидация метода путем сравнения с известной работой Бойда и Гордона [11], а также аналитическим решением для распределения поля в случае бесконечной апертуры. Приведены результаты расчёта распределения поля и дифракционных потерь мод для одной из конфигураций резонатора.

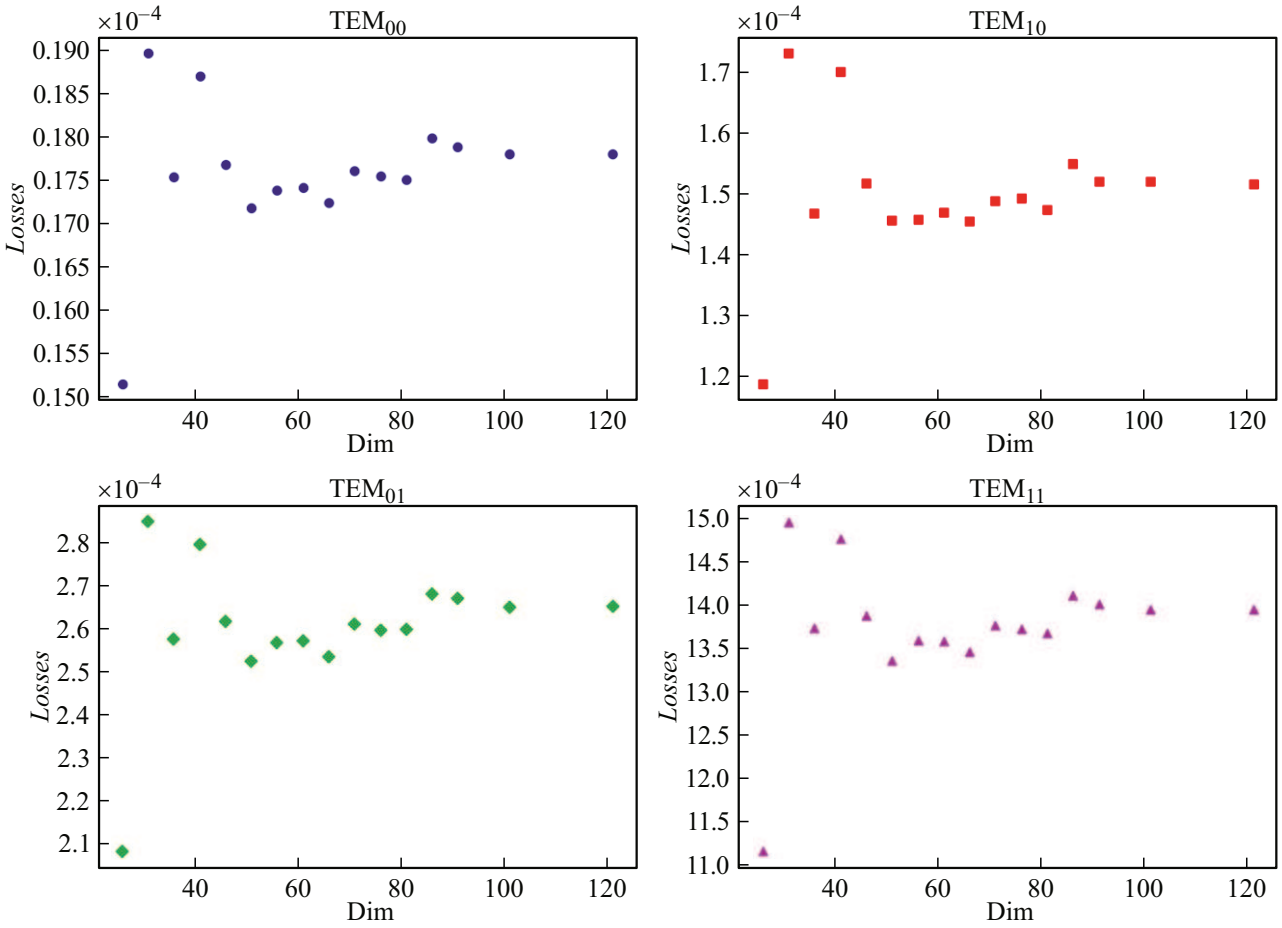


Рис. 5. Графики сходимости потерь для мод TEM_{00}, TEM_{01}, TEM_{10} и TEM_{11} в оптическом резонаторе с круглой диафрагмой.

Полученные результаты подтверждают эффективность метода для решения практических задач проектирования оптических резонаторов, включая оптимизацию их геометрических параметров и учет дифракционных эффектов. Особую ценность представляет возможность применения разработанного алгоритма для анализа резонаторов с произвольной формой апертуры и моделирования систем с разъюстированными резонаторами, что расширяет область его практического использования по сравнению с аналитическими методами.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Ф. Ароновиц. Применения лазеров (Мир, М., 1974), с. 201–221.
[2] В.А. Цеваков, И.И. Савельев, Е.В. Сухов, В.В. Брандукова. Труды Московского физико-технического института, **17** (2), 166–172 (2025).
[3] В.П. Быков, О.О. Силичев. *Лазерные резонаторы* (Физматлит, М., 2016).
[4] S.A. Collins. J. Opt. Soc. Am., **60** (9), 1168–1177 (1970). DOI: 10.1364/JOSA.60.001168
[5] И.И. Савельев, А.М. Хромых. Квант. электрон., **3** (7), 1481 (1976) [I.I. Savel'ev, A.M. Khromykh. Sov. J. Quantum Electron., **6** (7), 821 (1976)]. DOI: 10.1070/QE1976v006n07ABEH011681
[6] В.Г. Семенов. *Четырехчастотные зеемановские лазерные гироскопы с минимизацией ошибок для высокоточных навигационных систем*. Автореф. канд. дис. (МФТИ, Москва, 2023).
[7] J. Chao, Y. Wang, B. Li, H. Ma. Opt. Laser Technol., **39** (3), 490 (2007). DOI: 10.1016/j.optlastec.2005.11.005
[8] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 6th ed. (Pergamon Press, Oxford, 1980), p. 375–392.
[9] N. Hodgson, H. Weber. *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications*, 2nd ed. (Springer, New York, 2005), p. 78. DOI: 10.1007/b106789
[10] *Справочник по лазерам*, под ред. А.М. Прохорова, 2-е изд., т. II (Сов. радио, М., 1978), с. 19.
[11] G.D. Boyd, J.P. Gordon. Bell Syst. Tech. J., **40** (2), 489 (1961). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1961.tb01626.x