03

Учет сжимаемости газа в модели раздельного течения для прогнозирования фрикционного перепада давления двухфазных течений в микроканалах

© Ю.А. Дементьев, Е.А. Чиннов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: demyurij@inbox.ru

Поступило в Редакцию 24 ноября 2025 г.
В окончательной редакции 1 апреля 2026 г.
Принято к публикации 8 апреля 2026 г.

Представлены результаты экспериментальных исследований перепада давления однофазных и двухфазных потоков в трех плоских микроканалах с характерными размерами $17.5\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 25\,\text{mm}$, $29.3\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 25\,\text{mm}$ и $51.2\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 50\,\text{mm}$. Установлено, что перепад давления для газовой фазы описан выражением для идеального изотермического квазисжимаемого течения при малых числах Маха и Кнудсена. Для двухфазных течений экспериментально определен параметр межфазного взаимодействия Чизхолма и исследована его зависимость от массовой скорости газа. На основе полученных данных предложена модифицированная модель раздельного течения, учитывающая реальные условия течения газа в микроканалах. Показано, что предложенная модифицированная модель описывает большинство экспериментальных данных с разбросом точек, не превышающем $\pm 20\,\%$.

Ключевые слова: микроканал, двухфазные течения, перепад давления, сжимаемость.

DOI: 10.61011/JTF.2026.07.63123.294-25

Введение

Определение фрикционного перепада давления двухфазных течений в микроканалах представляет собой одну из ключевых задач современной теплофизики и микрофлюидики. Интерес к данной проблеме устойчиво сохраняется на протяжении последних двух десятилетий и обусловлен стремительной миниатюризацией технологических систем, где эффективность функционирования напрямую зависит от точного понимания гидродинамических и тепловых процессов на микроуровне. Такие устройства, как системы охлаждения высокопроизводительных микропроцессоров, компактные теплообменники, лаборатории-на-чипе, микрореакторы для синтеза фармацевтических препаратов и диагностические биомедицинские платформы все чаще полагаются на управляемые двухфазные течения, которые позволяют существенно повысить интенсивность тепло- и массообмена при ограниченных габаритах [1–3].

При переходе от макро- к микромасштабам соотношение между объемными и поверхностными силами существенно изменяется. В микроканалах с характерными размерами порядка сотен и десятков микрометров гравитационные и инерционные эффекты ослабевают, тогда как капиллярные силы, вязкое трение и межфазное взаимодействие начинают играть доминирующую роль [4–6]. В результате структура двухфазного потока — независимо от того, имеет ли он пузырьковый, пробковый, кольцевой или волновой характер — формируется под воздействием тонкого баланса между вязкостью, смачиваемостью стенок, локальными градиентами давления и скорости, а также термодинамическими условиями. Эти особенности приводят к тому, что классические модели и корреляции, разработанные для труб большого диаметра, часто демонстрируют неудовлетворительную точность при их прямом применении к микроканалам.

Значительный объем исследований последних лет посвящен экспериментальному и теоретическому изучению фрикционного перепада давления двухфазных течений в микроканалах различной геометрии. Обобщения и сравнительный анализ таких работ представлены, в частности, в обзорах [7–9], а также в более свежих обзорных публикациях, посвященных оптимизации гидравлических характеристик двухфазных микроканальных систем [10]. Показано, что даже для адиабатных течений существующие модели дают существенно различающиеся результаты, а точность предсказания перепада давления во многом определяется корректным учетом межфазного трения и распределения скоростей фаз.

Особое значение в микроканалах приобретает влияние сжимаемости газовой фазы. В отличие от макромасштабных систем, в микроканалах даже умеренные перепады давления могут приводить к заметному изменению плотности газа вдоль канала, что влияет на локальные скорости фаз, массовый расход и величину фрикционного перепада давления. Этот эффект подчеркивается в ряде экспериментальных и модельных работ, где показано, что пренебрежение сжимаемостью газа может приводить к систематическим ошибкам при описании двухфазных течений в микроканалах, особенно

при высоких массовых скоростях газовой фазы и малых гидравлических диаметрах [11,12].

Одним из классических подходов для расчета фрикционного перепада давления двухфазных потоков является модель раздельного течения Локхарта–Мартинелли [13], разработанная для макромасштабных течений, в которых влияние сжимаемости газовой фазы пренебрежимо мало. Данный подход устанавливает связь между градиентами давления однофазных потоков $(dP/dL)_l$ и $(dP/dL)_g$ и двухфазного потока $(dP/dL)_{tp}$ через безразмерные множители φ_l и φ_g:

$$\varphi_l^2 = (dP/dL)_{tp}/(dP/dL)_l, \tag{1}$$

$$\varphi_g^2 = (dP/dL)_{tp}/(dP/dL)_g. \tag{2}$$

Позднее Чизхолм [14] предложил аналитическую связь безразмерных множителей с параметром Мартинелли $X^2 = (dP/dL)_l/(dP/dL)_g$, определяемым как отношение градиентов давления однофазных течений жидкости и газа при тех же массовых скоростях течений через параметр межфазного взаимодействия C (параметр Чизхолма) следующим образом:

$$\varphi_l^2 = 1 + C/X + 1/X^2, \tag{3}$$

$$\varphi_g^2 = 1 + CX + X^2. \tag{4}$$

Физический смысл параметра C заключается в учете межфазного трения, влияющего на гидравлическое сопротивление двухфазного потока. В последующие годы было предложено множество модификаций и корреляций для параметра C, адаптированных к адиабатным двухфазным течениям в микроканалах [15,16]. Однако большинство этих моделей либо не учитывает изменение плотности газовой фазы вдоль канала, либо фактически включает эффекты сжимаемости в эмпирические коэффициенты, что ограничивает их универсальность и физическую интерпретируемость. Таким образом, несмотря на значительный прогресс в области исследований двухфазных течений в микроканалах, задача корректного учета сжимаемости газовой фазы в рамках существующих предсказательных моделей остается недостаточно решенной и продолжает представлять научный и практический интерес.

Целью настоящей работы является модификация модели раздельного течения Локхарта–Мартинелли с явным учетом сжимаемости газовой фазы для повышения точности предсказания фрикционного перепада давления двухфазных потоков в микроканалах и валидация предложенного подхода на основе экспериментальных данных.

1. Постановка задачи и эксперимент

Постановка экспериментальной задачи заключается в организации двухфазного газожидкостного течения в плоском микроканале заданной геометрии (высотой H, шириной W и длиной L) горизонтальной ориентации для дальнейшего исследования режимов и гидравлических характеристик течения. Жидкость подается через плоскую щель, ориентированную перпендикулярно основному направлению потока, в то время как газ вводится соосно с формирующимся двухфазным течением (рис. 1). Массовые скорости фаз определяются как отношение массового расхода к площади поперечного сечения канала: $G_l = M_l/(WH)$, $G_g = M_g/(WH)$ и варьируются в ходе эксперимента для реализации различных режимов двухфазного течения, которые регистрируются с помощью оптической визуализации.

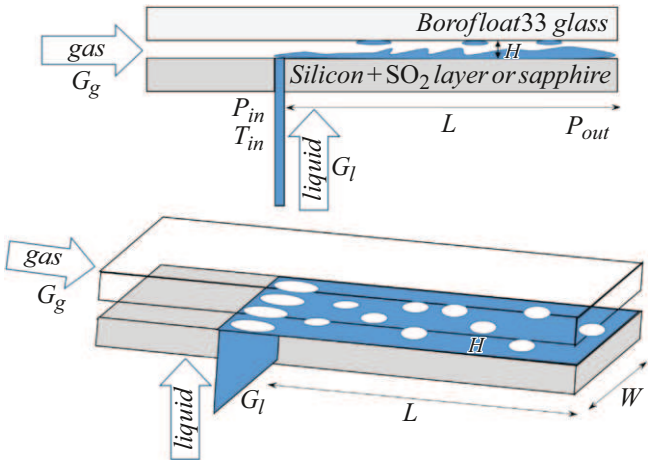


Рис. 1. Постановка экспериментальной задачи.

Контролируемыми параметрами являются массовые расходы фаз M_l и M_g, температура жидкости на входе в канал T_{in} и перепад давления $\Delta P = P_{in} - P_{out}$, измеряемый как разность показаний датчиков давления, установленных на входе в зону формирования двухфазного потока, и на выходе из микроканала. Давление на выходе поддерживается атмосферным и измеряется датчиком давления P_{out}.

Согласно работам [5,17], в условиях адиабатного течения в микроканалах горизонтальной ориентации доля перепада давления, обусловленная ускорением и местными гидравлическими потерями, не превышает 2–9 % от общего перепада давления. В связи с этим общий перепад давления в настоящей работе отождествляется исключительно с фрикционным перепадом давления.

Для реализации концепции экспериментальной задачи, исследования гидравлического сопротивления однофазных и двухфазных потоков, параметра межфазного взаимодействия и валидации экспериментальных данных были разработаны и собраны рабочие участки с микроканалами $17.5\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 25\,\text{mm}$, $29.3\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 25\,\text{mm}$ и $51.2\,\mu\text{m} \times 10\,\text{mm} \times 50\,\text{mm}$. Выбор трех геометрий с существенно различающейся высотой (от 17.5 до $51.2\,\mu\text{m}$) позволяет оценить влияние масштабного фактора на проявление эффектов сжимаемости, капиллярных сил и межфазного трения, а также

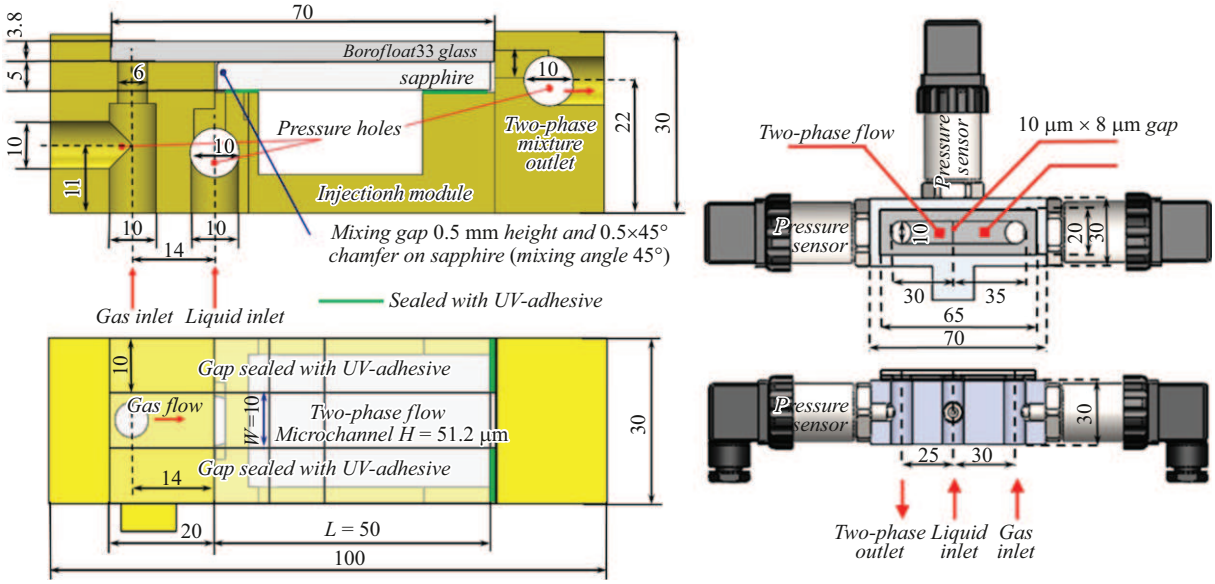


Рис. 2. Модели используемых рабочих участков. Слева — канал $51.2\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 50 mm, справа — каналы $17.5\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 25 mm и $29.3\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 25 mm.

проверить универсальность предложенной в настоящей работе модификации модели за пределами узкого диапазона геометрических параметров. Использование двух рабочих пар — воды-азота и HFE-7100-азота — обусловлено необходимостью охватить широкий спектр физических свойств жидкостей. Обе жидкости хорошо смачивают гидрофильные поверхности каналов (Borofloat®33, сапфир, кремний), однако HFE-7100 характеризуется значительно более низким поверхностным натяжением (~ 13.6 mN/m) и контактным углом, в то время как вода обладает высоким поверхностным натяжением (~ 72.2 mN/m) и контактным углом. Это приводит к принципиально разному поведению межфазной границы при схожих массовых скоростях: HFE-7100 склонна к формированию газопленочных структур даже при малых расходах, тогда как вода чаще локализуется в виде раздельного течения жидкостных и газовых струй.

Было изготовлено два типа рабочих участков. Первый тип — с микроканалами размерами $17.5\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 25 mm и $29.3\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 25 mm — имеет идентичную конструкцию и отличается лишь глубиной травления кремниевой пластины. Каждый состоит из инжекционного корпуса из нержавеющей стали и проточной ячейки, включающей две стеклянные пластины Borofloat®33 ($75 \times 20 \times 3.8$ mm) и кремниевую пластину ($75 \times 20 \times 0.48$ mm).

Жидкость подается через V-образную щель, сформированную анизотропным травлением кремния (ориентация (100)) в 45 %-ном KOH при 85 °C со скоростью $\sim 1.85\,\mu$m/min. Время травления — 4.5–5 h, что обеспечивает смыкание стенок и формирование щели шириной 5–7 μm. Микроканал на обратной стороне кремния вытравливался методом плазмохимического травления (SF_6) в течение 12–15 min с контролем геометрии. Газовые и выходные отверстия диаметром 10 mm выполнены лазером. Герметизация стекла и кремния осуществлялась методом термоанодной сварки при 430 °C–450 °C, напряжении 800–1200 V и выдержке 50 min в условиях чистой комнаты (ISO класс 7). Инжекционный корпус крепился к ячейке цианоакрилатным клеем Loctite®460.

Второй тип рабочего участка — с микроканалом $51.2\,\mu$m $\times$ 10 mm $\times$ 50 mm — состоит из корпуса, напечатанного на 3D-принтере ANYCUBIC® Photon из высокотемпературной смолы HT100, и двух стеклянных пластин: сапфировой ($50 \times 30 \times 5$ mm) и боросиликатной ($70 \times 30 \times 5$ mm), в которой фотолитографией сформирован канал. Пластины склеены УФ-клеем SM Chemie®301+ с контролем нанесения; толщина клеевого шва $\leq 3\,\mu$m (измерено конфокальным датчиком Micro-Epsilon®). Клей не проникает в рабочую зону благодаря капиллярному балансу. Подробные схемы рабочих участков с размерами представлены на рис. 2.

Газ подавался в канал из баллона *2* через регулятор расхода газа Bronkhorst® EL-FLOW F-211CV *3*. Для охвата требуемого диапазона расходов использовались две модели регулятора: от 0 до 100 ml_n/min и от 100 до 1000 ml_n/min. Подача жидкости осуществлялась по замкнутому контуру. Массовый расход жидкости контролировался с помощью кориолисового регулятора расхода Bronkhorst® mini-CORI-FLOW M14 (4), который при изменении гидравлической нагрузки в контуре мгновенно подавал управляющий сигнал на шестеренчатый насос *5* для поддержания заданного постоянного массового расхода. От регулятора *4* жидкость поступала в систему, состоящую из теплообменника *6* и термостата *7*, предназначенную для задания начальной

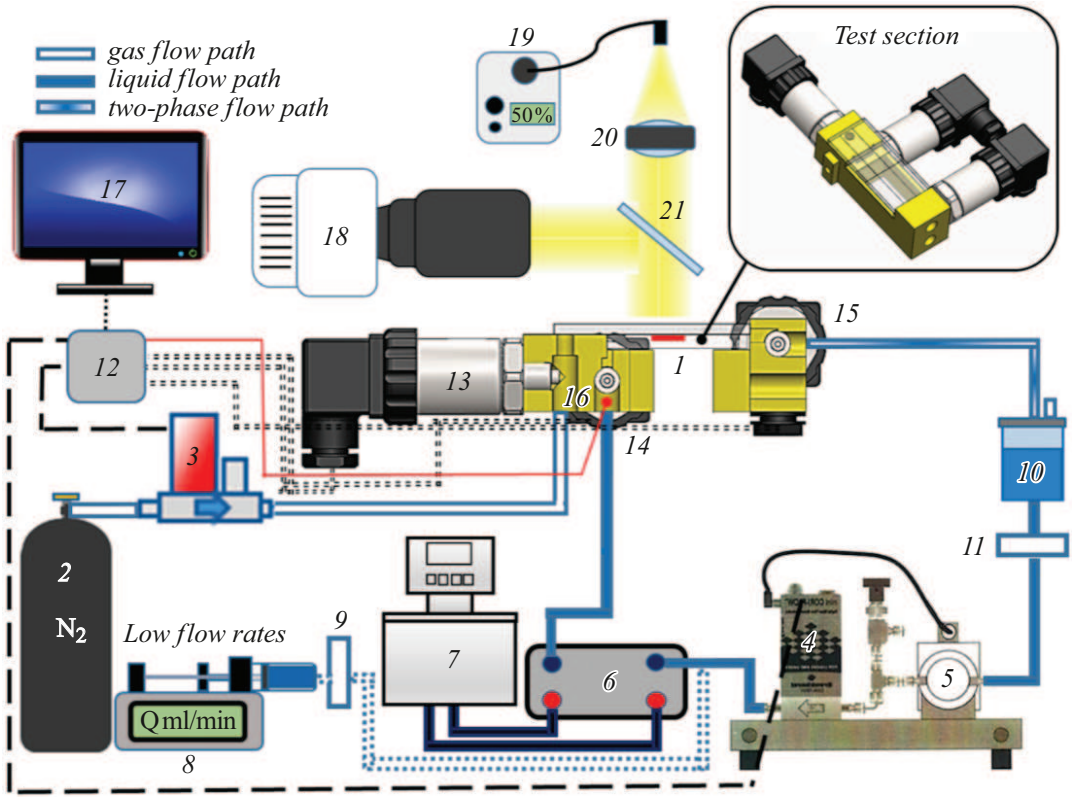


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для исследования двухфазных течений в плоских микроканалах: *1* — рабочий участок с микроканалом, *2* — баллон с газом, *3* — регулятор расхода газа, *4* — регулятор расхода жидкости, *5* — шестеренчатый насос, *6* — теплообменник, *7* — термостат, *8* — шприцевой насос, *9* — мембранный фильтр, *10* — емкость с жидкостью, *11* — мембранный фильтр, *12* — контроллер сигналов, *13–15* — датчики давления, *16* — термопара, *17* — компьютер, *18* — скоростная камера, *19* — источник освещения, *20* — линза, *21* — 50/50 светоделительная пластина.

температуры жидкости, а затем — в рабочий участок. На малых расходах регулятор *4* в сочетании с шестеренчатым насосом *5* заменялся на цифровой шприцевой насос Cole-Parmer® EW-74905-54 *8*, снабженный шприцевым мембранным фильтром *9*. После смешения фаз и прохождения двухфазного потока через микроканал газожидкостная смесь поступала в сепарационную емкость *10* с небольшим отверстием для выпуска газообразного азота в атмосферу. Далее жидкость проходила через мембранный фильтр *11* с порогом фильтрации $5\,\mu$m и возвращалась на вход шестеренчатого насоса, замыкая контур. Управление и считывание данных с регуляторов расхода газа *3* и жидкости *4* осуществлялись с помощью контроллеров National Instruments® DAQmx USB-6001 и National Instruments® 9214 *12*, подключенных к компьютеру *17*. Программное обеспечение разработано в среде LabVIEW® и обеспечивало как регистрацию мгновенных значений аналоговых сигналов, так и усреднение данных во времени. Кроме того, контроллеры *12* считывали аналоговые сигналы с датчиков давления BD sensors® DMP 330i *13–15* для контроля давления и определения перепада давления в микроканале (разность показаний датчиков *14* и *15*), а также с термопары *16* — для контроля начальной температуры подаваемой жидкости.

Согласно техническим характеристикам, точность установки массового расхода жидкости шприцевым насосом *8* составляет $\pm 0.35\,\%$ от заданного значения при повторяемости $\pm 0.05\,\%$ от того же значения. Для регулятора расхода жидкости *4* точность составляет $\pm 0.2\,\%$ от заданного значения, а повторяемость — $\pm 0.05\,\%$ от установленного расхода плюс $\pm 0.5\,\%$ от полной шкалы. Точность регулятора расхода газа *3* составляет $\pm 0.5\,\%$ от заданного значения при повторяемости менее $0.2\,\%$ от заданного значения. Регуляторы массового расхода жидкости и газа управлялись через аналоговый выходной канал устройства National Instruments® DAQmx USB-6001 *12* в диапазоне сигнала 0–10 V; сигнал обратной связи передавался на аналоговый вход того же устройства. Согласно технической документации, абсолютная точность аналоговых входов на полной шкале составляет 6 mV ($0.06\,\%$ от диапазона 0–10 V), а для аналогового выхода — 9.1 mV ($0.091\,\%$ от полной шкалы). С учетом правила суммирования систематических составляющих неопределенности, максимальная возможная расширенная неопределенность измерения массового расхода жидкости при использо-

Таблица 1. Характерные значения параметров шероховатости для внутренних поверхностей микроканалов

	Средняя арифметическая шероховатость (Sa), nm	Максимальная высота пика (Sp), nm	Максимальная глубина ямы (Sv), nm
Borofloat®33	2	55	14
Сапфир	4	12	24
Кремний+0.3 μm SiO_2 layer	3	51	17

вании регулятора *4* составляет $\pm 0.351\,\%$ от заданного значения, а для газа с регулятором *3* — $\pm 0.651\,\%$ от заданного значения. Сигналы от тензометрических датчиков давления 13–15 (выходной сигнал 0–10 V, диапазон избыточного давления 0–4 bar) снимались через аналоговые входы устройства National Instruments® DAQmx USB-6001 *12*. Согласно технической документации, точность измерения давления датчиками составляет $\pm 0.5\,\%$ от полной шкалы. Таким образом, суммарная абсолютная неопределенность измерения давления (включая вклад DAQ-устройства) составляет $\pm 0.56\,\%$ от полной шкалы 0–4 bar.

Оптическая визуализация потока производилась с помощью оптической безножевой отражательной шлирен-методики, схема которой состоит из высокоскоростной камеры Phantom® VEO 410 (частота съемки 3000 кадров в секунду) с объективом Nikon® ED AF Micro-Nikkor 200 mm 1:4 D *18*, источника белого освещения, Olympus® KL 2500 LED *19*, фокусирующей линзы *20*, 50/50 светоделительной пластины *21* для визуализации отраженного света при виде сверху.

В качестве рабочих жидкостей использовалась диэлектрическая фторуглеродная жидкость HFE-7100 и очищенная дистиллированная вода Milli-Q®, а в качестве рабочего газа — азот высокой чистоты. Температуры фаз поддерживались постоянными и составляли 292.4 K для жидкостей и 294.2 K для газа.

До проведения экспериментов были измерены характерные параметры шероховатости внутренних поверхностей микроканалов. Параметры шероховатости стеклянной пластины из боросиликатного оптического стекла Borofloat®33, кремниевой пластинки с оксидным слоем толщиной 0.3 μm (каналы высотой 17.5 и 29.3 μm) и сапфировой пластины (канал 51.2 μm) были измерены с использованием атомно-силовой микроскопии. Сканирование проводилось в нескольких областях размером $94 \times 108\,\mu$m. В табл. 1 приведены характерные параметры шероховатости поверхностей, включая среднюю арифметическую шероховатость (Sa), а также максимальные (Sp) и минимальные (Sv) отклонения профиля относительно средней линии для всех трех типов поверхностей. Из табл. 1 следует, что разброс экстремальных параметров шероховатости Sp и Sv не превышает 55 nm, что примерно на три порядка меньше характерной высоты микроканала. Низкие значения Sa при относительно высоких Sp/Sv характерны для химически полированных и травленых поверхностей, где локальные дефекты не оказывают существенного влияния на среднюю шероховатость, но фиксируются как экстремумы. Таким образом, поверхности микроканалов можно считать гидравлически гладкими, и влияние шероховатости на параметры течения является пренебрежимо малым.

2. Перепад давления однофазных потоков жидкости

Для однофазных жидкостных потоков фрикционный перепад давления описывается формулой (5) для несжимаемого течения, полученной из соотношения между касательным напряжением на стенке и градиентом давления:

$$\Delta P = f_D \frac{G^2}{2\rho} \cdot \frac{L}{D_h}, \tag{5}$$

где f_D — коэффициент трения Дарси, G — массовая скорость жидкости, ρ — плотность, L — длина канала, $D_h = 2WH/(W+H)$ — гидравлический диаметра канала. Для ламинарных течений в гладких каналах произведение коэффициента трения Дарси и числа Рейнольдса жидкостной фазы $Re = GD_h/\mu$ является инвариантной величиной и зависит только от соотношения сторон канала (высоты к ширине) через полиномиальную формулу (6), предложенной Шахом и Лондоном [18]:

$$f_D Re = 96(1 - 1.3553AR + 1.9467AR^2 - 1.7012AR^3 + 0.9564AR^4 - 0.2537AR^5), \tag{6}$$

где $AR = H/W$ — соотношение сторон канала (высоты к ширине), G — массовая скорость, μ — динамическая вязкость.

На рис. 4 представлена зависимость экспериментально измеренного перепада давления для HFE-7100 и воды Milli-Q® от массовой скорости жидкости во всех трех исследованных микроканалах. Для обеих жидкостей наблюдается линейный рост перепада давления с увеличением массовой скорости, что согласуется с формулой (5) для расчета фрикционного перепада давления и с теоретической зависимостью, предложенной

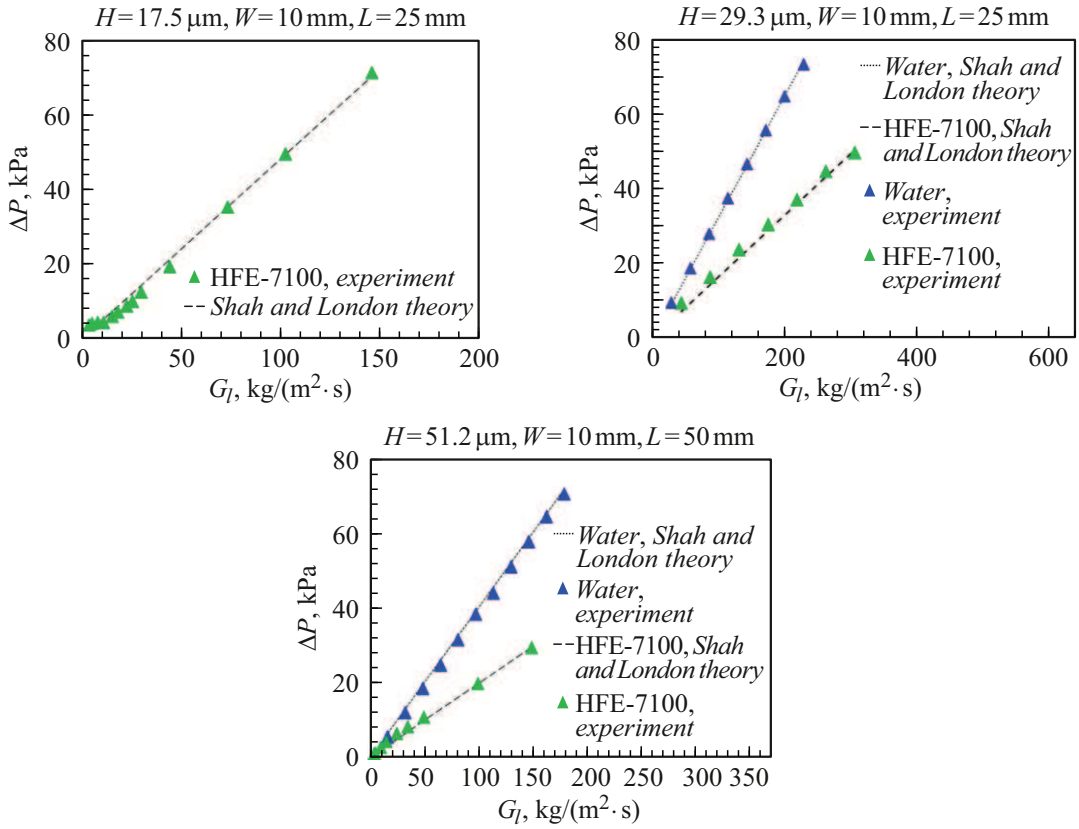


Рис. 4. Зависимость экспериментального перепада давления для жидкости от массовой скорости жидкости в сравнении с теорией для однофазного ламинарного стационарного несжимаемого течения Шаха и Лондона [18].

Таблица 2. Экспериментальные параметры рабочих жидкостей

	ρ, kg/m^3	μ, Pa·s	σ, mN/m	T, K	Re	$f_D Re$
HFE-7100	1526.26	$7.37 \cdot 10^{-4}$	13.6	292.4	0.48–54	95.33
Вода	999.79	$9.78 \cdot 10^{-4}$	72.2	292.4	1.69–16.92	

Шахом и Лондоном [18] для однофазного несжимаемого стационарного ламинарного течения (формула (6)). Незначительные отклонения экспериментальных данных от теоретической кривой обусловлены местными гидравлическими потерями на входе и выходе из канала, а также перепадом давления, связанным с локальным ускорением потока. Хорошее качественное и количественное согласие между экспериментальными результатами и теоретическими предсказаниями свидетельствует о корректной калибровке измерительного оборудования, точности геометрических параметров микроканалов и надежности их герметизации. Информация о физических свойствах (плотности ρ, динамической вязкости μ, поверхностном натяжении σ, температуре жидкости во время измерений T, а также рабочих параметрах таких как число Рейнольдса Re и инварианте $f_D Re$ при измерении перепада давления для обеих жидкостей приведена в табл. 2.

3. Перепад давления однофазных потоков газа

На рис. 5 представлена зависимость экспериментально измеренного перепада давления однофазного газового потока от его массовой скорости во всех трех исследованных микроканалах. В случае течения азота наблюдается значительное отклонение экспериментальных данных от предсказаний для несжимаемого течения, описываемых формулами (5) и (6), справедливыми для стационарного ламинарного несжимаемого потока.

Как видно из рис. 5, перепад давления демонстрирует нелинейную зависимость от массовой скорости газа, в то время как теоретическая линия для несжимаемого течения располагается существенно выше экспериментальных точек для всех трех микроканалов. Этот эффект обусловлен сжимаемостью газа в микроканалах, т. е. зависимостью плотности газа от давления. На том же ри-

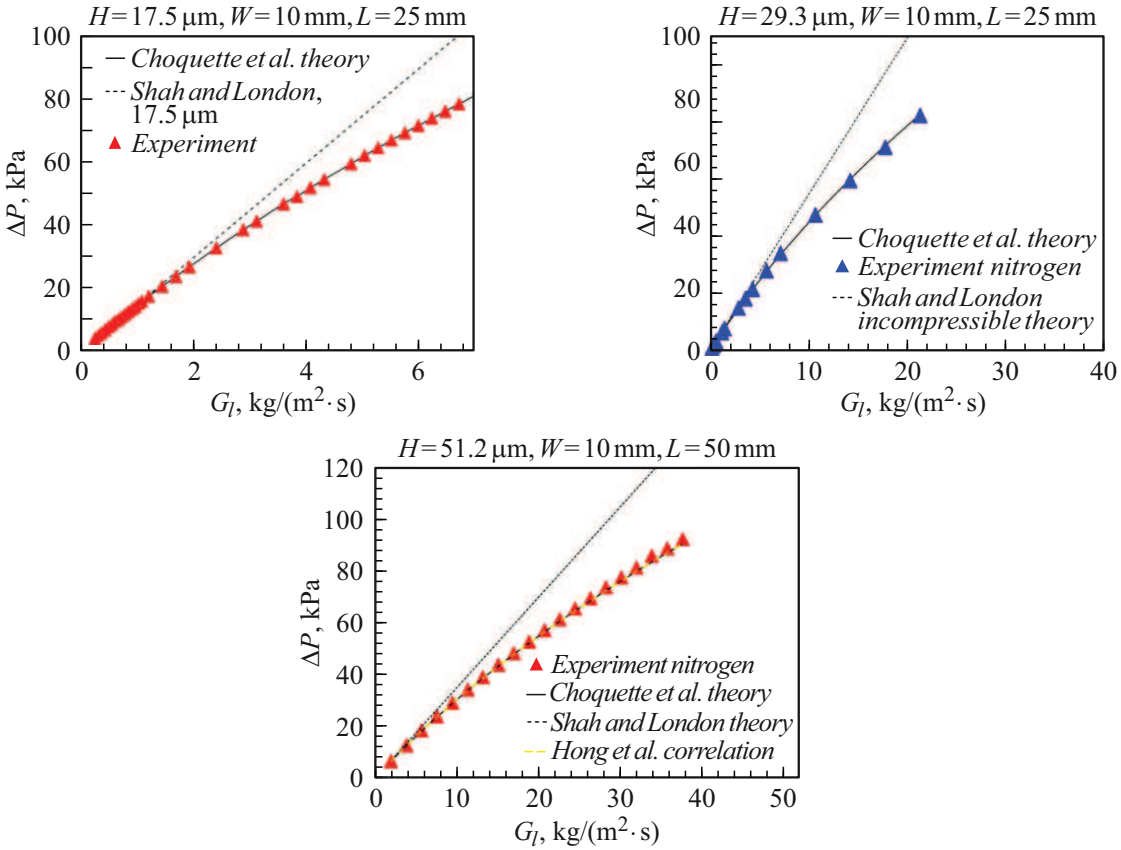


Рис. 5. Зависимость экспериментального перепада давления газа от массовой скорости газа в сравнении с теорией для однофазного ламинарного стационарного несжимаемого течения Шаха и Лондона согласно формулам (5) и (6), выражением (7) и двумерной корреляцией (8).

сунке показано хорошее качественное и количественное согласие экспериментальных данных с неявным решением Чокетта и др. [19] для изотермического ламинарного течения идеального сжимаемого газа, согласно формуле (7), где коэффициент трения Дарси f_D определялся на основе формулы (6), полученной для несжимаемого потока:

$$f_D \frac{L}{D_h} = \frac{P_{in}^2 - P_{out}^2}{RTG^2} - 2\ln\left(\frac{P_{in}}{P_{out}}\right),$$

$$P = \rho RT, \tag{7}$$

где f_D — коэффициент трения Дарси, L — длина канала, D_h — гидравлический диаметр канала, $P_{in,out}$ — давления на входе в канал и выходе из канала, R — удельная газовая постоянная, T— температура, G — массовая скорость, ρ — плотность.

Кроме того, для канала высотой 51.2 μm проведено сравнение с двумерной корреляцией Хонга и др. [20], согласно формуле (8), где Ma — среднее число Маха, Kn — число Кнудсена, а $Re = GD_h/\mu$ число Рейнольдса с параметрами газовой фазы:

$$f_D Re = \frac{96}{1 + 12Kn} + \frac{40.02Ma - 109.64Ma^2 + 658.25Ma^3}{(1 + 12Kn)^2}. \tag{8}$$

В табл. 3 содержатся экспериментальные параметры газа для канала высотой 51.2 μm, такие как температура во время измерений T, показатель адиабаты γ, удельная газовая постоянная R, динамическая вязкость μ, диапазон чисел Рейнольдса Re, расчетные значения $f_D Re$ для несжимаемого течения и по двумерной корреляции Хонга и др., а также среднее число Маха Ma и число Кнудсена Kn, которые определяются выражениями (9) и (10):

$$Ma = G\left(\frac{2}{P_{in} + P_{out}}\right)\sqrt{\frac{RT}{\gamma}}, \tag{9}$$

$$Kn = \frac{l_{free}}{D_h} = \sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}\frac{Ma}{Re}, \tag{10}$$

где l_{free} — длина свободного пробега молекул газа, γ — показатель адиабаты. Как видно из результатов,

Таблица 3. Экспериментальные параметры рабочего газа азота в канале высотой $51.2\,\mu$m

T, K	γ	R, J/(kg·K)	μ, Pa·s	Re	Kn	Ma	$f_D Re$ несжимаемый	$f_D Re$ Hong et al. корреляция
294.2	1.4	296.65	$1.755 \cdot 10^{-5}$	0.47 – 236.39	$4.35 \cdot 10^{-4}$ $-6.17 \cdot 10^{-4}$	$1.82 \cdot 10^{-4}$ $-6.4 \cdot 10^{-2}$	95.33	96–98.29

Таблица 4. Диапазоны рабочих параметров для анализа межфазного взаимодействия

Рабочая пара	Канал $H \times W \times L$, mm	G_l, kg/(m^2·s)	G_g, kg/(m^2·s)	ΔP_l, kPa	ΔP_g, kPa	ΔP_{tp}, kPa
HFE-7100/N_2	$0.0175 \times 10 \times 25$	14.6–73	0.24–23.8	7.1–29	7.1–137.9	13.7–252
	$0.0293 \times 10 \times 25$	25.9–129.4	0.1–32	3.6–21.4	1.7–108.5	5.7–154.7
	$0.0512 \times 10 \times 50$	34.3–147.1	0.1–37.5	4.6–16.5	0.4–90.6	5–126.4
Вода/N_2	$0.0175 \times 10 \times 25$	19.3–69.3	0.2–12	17–49.6	7.1–104	27.3–200
	$0.0293 \times 10 \times 25$	56.9–113.7	0.1–28.5	19.5–39	1.7–99.5	23.5–150.8
	$0.0512 \times 10 \times 50$	16.3–48.8	0.1–37.5	3–120.3	2.6–92.4	6.8–107.2

кривые прогнозирования перепада давления для газового потока в канале высотой $51.2\,\mu$m, построенные с использованием формулы Чокетта и др. (7) в сочетании с корреляциями для определения коэффициента трения Шаха и Лондона (6) и Хонга и др. (8), практически совпадают. Это связано с тем, что усредненное значение произведения коэффициента трения Дарси на число Рейнольдса $f_D Re$ изменяется незначительно при увеличении числа Маха.

Значения чисел Кнудсена в эксперименте находились в диапазоне от $4.35 \cdot 10^{-4}$ до $6.17 \cdot 10^{-4}$, что указывает на пренебрежимо малое влияние эффектов скольжения (разрежения) на величину $f_D Re_g$. Таким образом, экспериментальный перепад давления для газа при малых значениях числа Маха в отсутствие эффектов разрежения может быть корректно описан с использованием выражения (7), где коэффициент трения f_D определяется на основе полиномиального выражения Шаха и Лондона (6) для несжимаемого течения в длинных каналах. Такое определение перепада давления условно называется квазисжимаемостью.

Уравнение (7) приводится к следующему виду:

$$f_D \frac{L}{D_h} = \frac{\Delta P(2P_{out} + \Delta P) - P_{out}^2}{RTG^2} - 2\ln\left(1 + \frac{\Delta P}{P_{out}}\right),$$

$$P = \rho RT. \qquad (11)$$

Уравнение (11) решается численно (итерационным методом дихотомии) относительно $\Delta P = P_{in} - P_{out}$. Полученное значение используется для вычисления параметра Мартинелли X и последующего расчета перепада давления двухфазного течения.

Следует отметить, что влияние сжимаемости проявляется на входе и выходе канала, увеличивая локальное значение инварианты $f_D Re$, тогда как усредненное значение инварианты $f_D Re$ вдоль канала остается практически постоянным как для несжимаемого течения (выражение (5)). Этот факт подтверждается исследованиями [21–23]. Данное приближение изотермической квазисжимаемости справедливо именно для длинных каналов при $L \gg D_h$, поскольку площади теплообмена со стенками канала достаточно, чтобы считать поток газа изотермическим, а $f_D Re$ — постоянной из-за локальности сжимаемости на концах канала, что также подтверждается результатами исследований [22,24]. Кроме того, данное приближение действует для гладких микроканалов (характерные значения шероховатости используемых каналов — десятки нанометров, а высота каналов — десятки микрон, т. е. разница — три порядка) поскольку исходя из анализа литературы по однофазным потокам шероховатость стенок напрямую влияет на величину $f_D Re$.

4. Анализ параметра межфазного взаимодействия

Параметр межфазного взаимодействия Чизхолма $C_{\exp}$ был определен на основе экспериментальных данных по однофазным течениям рабочих жидкостей (HFE-7100 и вода) и газа (азот), а также двухфазным течениям рабочих пар HFE-7100-азот и вода-азот в трех микроканалах. Экспериментальная база охватывает широкий диапазон режимов двухфазного течения. В табл. 4 приведены характерные значения массовых скоростей фаз и соответствующие диапазоны перепадов давлений для всех исследованных конфигураций. Базовые значения перепада давления для однофазных потоков были получены из отдельных адиабатных экспериментов, проведенных

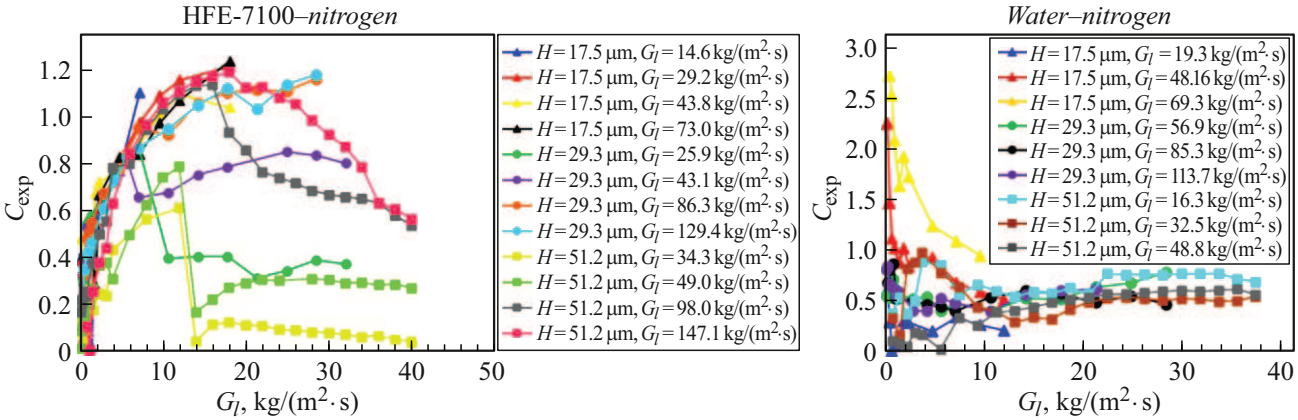


Рис. 6. Зависимость экспериментального параметра межфазного взаимодействия Чизхолма от массовой скорости газа при фиксированных массовых скоростях жидкости.

при тех же массовых скоростях, что и в двухфазных режимах, и на той же эффективной длине канала L.

Для жидкости, как несжимаемой среды, распределение давления вдоль канала является линейным, поэтому градиент давления корректно определяется как $(\Delta P/L)_l$. В расчетах использовалась аналитическая зависимость для ламинарного течения в прямоугольных каналах по Шаху и Лондону (формулы (5) и (6)).

Для газа ситуация принципиально иная: вследствие сжимаемости плотность и давление изменяются вдоль канала, что приводит к нелинейному распределению давления. В этих условиях величина $(\Delta P/L)g = (P_{in} - P_{out})/L$ теряет физический смысл как характеристика фрикционного сопротивления, поскольку не отражает истинный локальный градиент давления, используемый в моделях двухфазного течения. Поэтому для газовой фазы был введен эквивалентный фрикционный перепад давления, рассчитанный следующим образом: при фиксированной массовой скорости G, температуре T коэффициент трения Дарси f_D определялся по той же модели Шаха–Лондона, что и для жидкости (обеспечивая согласованность подхода), а затем подставлялся модифицированный вид неявного уравнения Чоккета (11) для изотермического ламинарного течения идеального газа. Это уравнение решалось относительно $\Delta P = P_{in} - P_{out}$ (при известном P_{out}) и таким образом находился термодинамически корректный эквивалентный перепад давления $\Delta P_{g,eq}$, соответствующий заданной массовой скорости и геометрии канала. На основе этих согласованных однофазных баз был вычислен параметр Мартинелли X и параметр Чизхолма $C_{\exp}$ по формуле, вытекающей из размерной формы модели раздельного течения (формулы (3) и (4)):

$$C_{\exp} = \frac{\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{tp} - \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_l - \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{g,eg}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_l \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{g,eg}}}, \qquad (12)$$

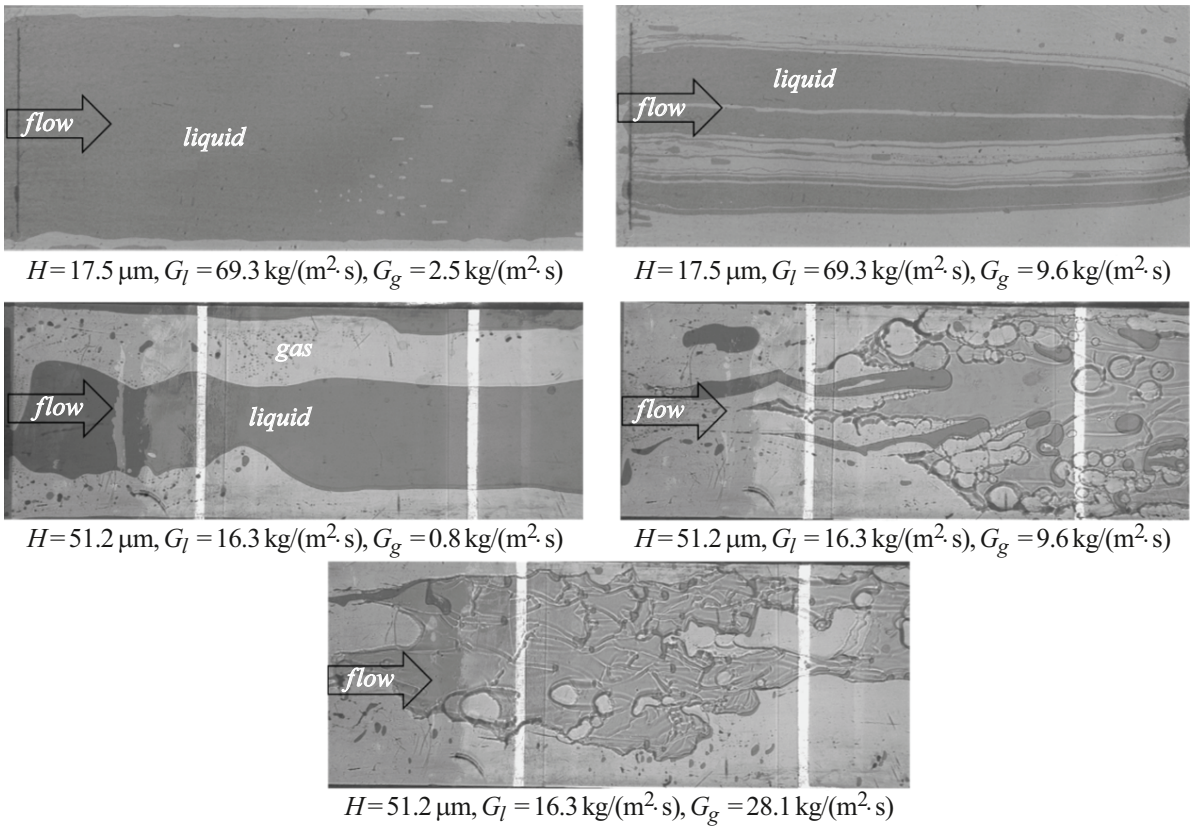
где $\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{g,eg}$ следует понимать как эффективный (эквивалентный) градиент, а не как истинный локальный градиент давления. Такой подход позволяет определять $C_{\exp}$. непосредственно из экспериментальных данных без аппроксимации однофазных зависимостей, что повышает достоверность оценки межфазного трения и обеспечивает корректное сравнение с теоретическими моделями.

Рис. 6 демонстрирует зависимость экспериментально определенного параметра Чизхолма от массовой скорости газа для двухфазных течений HFE-7100-азот и вода-азот во всех трех микроканалах при фиксированных значениях массовой скорости жидкости G_l.

Для течений вода-азот в канале высотой 17.5 μm при малых массовых скоростях газа наблюдается уменьшение параметра межфазного взаимодействия $C_{\exp}$. Это связано с сужением жидкостной струи и соответствующим увеличением области, занимаемой газом (рис. 7).

В то же время в каналах высотой 29.3 и 51.2 μm при низких массовых скоростях жидкости наблюдается повышенный разброс экспериментальных значений параметра Чизхолма $C_{\exp}$ при близких условиях течения ($G_g < 10$ kg/(m^{2}s)). Такое поведение обусловлено неустойчивым гидродинамическим режимом, при котором сигнал перепада давления демонстрирует сильные временные флуктуации (случайные колебания давления) и не достигает стационарного состояния даже при длительной регистрации. Визуально этот режим проявляется в виде хаотических, нерегулярных возмущений межфазных границ, приводящих к формированию быстро изменяющихся и нестабильных тонких жидкостных пленок.

При увеличении массовой скорости газа G_g течение стабилизируется: колебания давления затухают, сигнал становится стационарным, а межфазные границы приобретают регулярный периодический характер, что подтверждается данными шлирен-визуализации (рис. 7). В результате жидкостная пленка распределяется по ширине канала более равномерно, а ее площадь остается



$H = 17.5\,\mu m$, $G_l = 69.3\,kg/(m^2 \cdot s)$, $G_g = 2.5\,kg/(m^2 \cdot s)$

$H = 17.5\,\mu m$, $G_l = 69.3\,kg/(m^2 \cdot s)$, $G_g = 9.6\,kg/(m^2 \cdot s)$

$H = 51.2\,\mu m$, $G_l = 16.3\,kg/(m^2 \cdot s)$, $G_g = 0.8\,kg/(m^2 \cdot s)$

$H = 51.2\,\mu m$, $G_l = 16.3\,kg/(m^2 \cdot s)$, $G_g = 9.6\,kg/(m^2 \cdot s)$

$H = 51.2\,\mu m$, $G_l = 16.3\,kg/(m^2 \cdot s)$, $G_g = 28.1\,kg/(m^2 \cdot s)$

Рис. 7. Визуализация течений вода-азот в исследуемых микроканалах. Вид сверху.

практически неизменной при дальнейшем росте массовой скорости газа. Соответственно площадь межфазного взаимодействия, определяемая распределением тонких пленок по стенкам канала, стабилизируется, и вместе с ней — параметр Чизхолма C_{exp}.

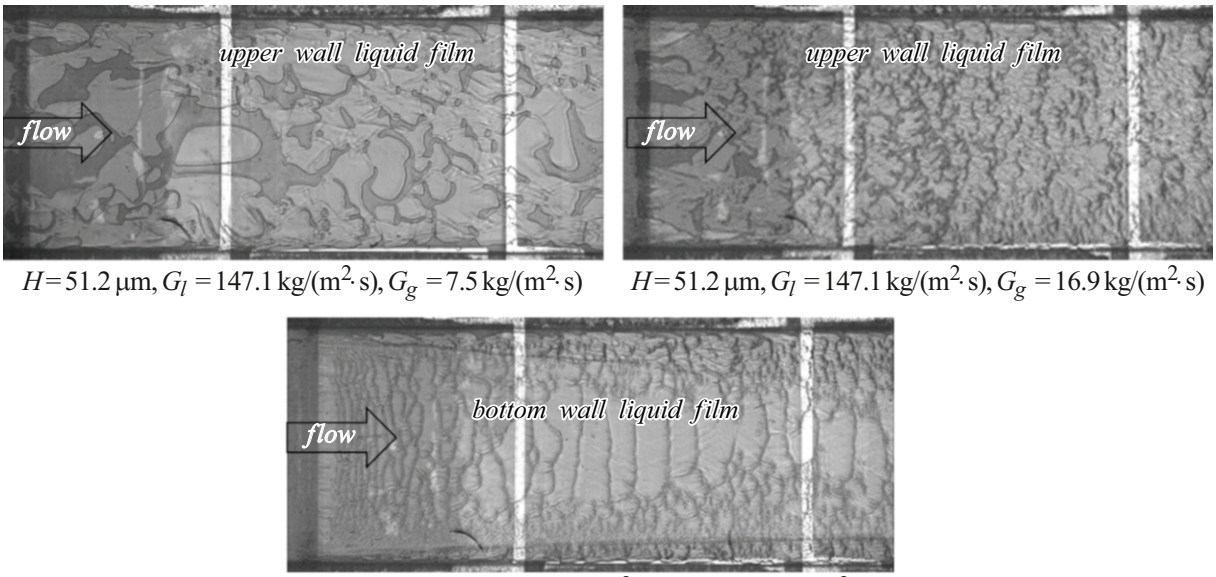
Для двухфазных потоков HFE-7100-азот наблюдается монотонный рост параметра межфазного взаимодействия, обусловленный увеличением площади межфазной поверхности вследствие развития газопленочного течения по ширине канала. Замедление темпов роста параметра межфазного взаимодействия объясняется локальным расширением межфазной поверхности в ядре потока, вызванным размазыванием жидкостных мостиков в сплошную пленку. Данный процесс инициируется капиллярно-модуляционной неустойчивостью, обусловленной градиентом капиллярного давления на искривленной межфазной границе. Она проявляется в виде пальцеобразного вытеснения жидкой фазы газом и развивается при вытеснении более вязкой жидкости менее вязкой фазой (газом). Локальные возмущения границы вызваны преимущественно капиллярными силами, тогда как инерция газа и вязкость жидкости определяют лишь динамику роста и стабилизацию структур, но не их зарождение.

Снижение параметра межфазного взаимодействия — в том числе в виде скачкообразных изменений — связано с уменьшением площади межфазной поверхности. Это происходит при переходе к стратифицированному волновому режиму течения, при котором жидкость преимущественно сосредоточена в виде волнообразной пленки на нижней стенке канала. Подобное поведение подтверждается данными шлирен-визуализации, представленными на рис. 8.

Следовательно, изменение экспериментального параметра межфазного взаимодействия при изменении массовых скоростей газа или жидкости определяется гидродинамическим режимом течения, который напрямую управляет геометрией межфазной поверхности и, как следствие, площадью межфазного контакта. Именно эта площадь определяет величину дополнительного фрикционного сопротивления, которое количественно выражается через параметр Чизхолма C_{exp}. Таким образом, наблюдаемые особенности зависимости параметра Чизхолма от массовой скорости газа — немонотонность, плато, скачки — являются отражением смены режимов: от нестабильных нестационарных к газопленочным (капельно-кольцевой и стратифицированный).

5. Модифицированная модель раздельного течения и ее валидация

В предыдущих разделах были рассмотрены ключевые физические особенности, определяющие гидравли-



$H = 51.2\,\mu\text{m}, G_l = 147.1\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}, G_g = 7.5\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}$ $H = 51.2\,\mu\text{m}, G_l = 147.1\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}, G_g = 16.9\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}$

$H = 51.2\,\mu\text{m}, G_l = 147.1\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}, G_g = 37.5\,\text{kg/(m}^2\cdot\text{s)}$

Рис. 8. Визуализация течений HFE-7100-азот в исследуемых микроканалах. Вид сверху.

ческое сопротивление в рассматриваемых микроканалах, а именно влияние сжимаемости в однофазных газовых потоках и экспериментальное определение и анализ параметра межфазного взаимодействия Чизхолма в условиях двухфазного течения. Исходя из анализа поведения параметра Чизхолма и с учетом того, что экспериментальные данные для однофазного течения газа описываются неявным соотношением (6), выведенным для идеального сжимаемого изотермического газа при условии $L \gg D_h$, разд. 5 объединяет полученные результаты в целостную модифицированную модель раздельного течения, позволяющую рассчитывать фрикционный перепад давления двухфазного потока с учетом квазисжимаемости газовой фазы и экспериментально обоснованного описания межфазного трения. Основная идея модификации заключается в следующем: во-первых, сохраняется структура модели — раздельный учет фаз. Во-вторых, модифицируется только базовое значение перепада давления для газовой фазы, которое теперь вычисляется не по формуле для несжимаемого течения, а на основе уравнения Чокетта (11), учитывающего сжимаемость. При этом коэффициент трения Дарси f_D для газа принимается таким же, как и для несжимаемого случая (по Шаху–Лондону), что подтверждается экспериментами при малых числах Маха ($Ma < 0.3$). Таким образом, параметр Мартинелли X и соответственно параметр Чизхолма C_{exp} становятся согласованными с реальными условиями течения в микроканалах.

Предложенная модификация (уравнения (13)–(22)) позволяет корректно описывать межфазное взаимодействие в условиях квазисжимаемости, когда сжимаемость газа существенна, но число Маха остается малым, и эффекты разрежения и шероховатости отсутствуют:

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{tp} = \varphi_l^2 \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_l, \tag{13}$$

$$\varphi_l^2 = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2}, \tag{14}$$

$$X^2 = \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_l \Big/ \left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{g,eq}, \tag{15}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_l = \frac{f_D G_l^2}{2\rho_l D_h}, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{L}\right)_{g,eq} : \; f_D \frac{L}{D_h} = \frac{P_{in}^2 - P_{out}^2}{RTG_g^2} - 2\ln\left(\frac{P_{in}}{P_{out}}\right),$$

$$\Delta P = P_{in} - P_{out}, \tag{17}$$

$$P = \rho RT, \tag{18}$$

$$f_D = 96(1 - 1.3553AR + 1.9467AR^2 - 1.7012AR^3 + 0.9564AR^4 - 0.2537AR^5)/Re_{l,g}, \tag{19}$$

$$Re_l = \frac{G_l D_h}{\mu_l} = \frac{G(1-x)D_h}{\mu_l}, \tag{20}$$

$$Re_g = \frac{G_g D_h}{\mu_g} = \frac{GxD_h}{\mu_g}, \tag{21}$$

$$x = \frac{G_g}{G_l + G_g}, \tag{22}$$

где Re_l и Re_g — числа Рейнольдса жидкости и газа, x — массовое содержание газовой фазы, μ_l и μ_g — динамические вязкости жидкости и газа соответственно. Рис. 9 демонстрирует соотношение между экспериментально определенными значениями параметра Чизхолма и его

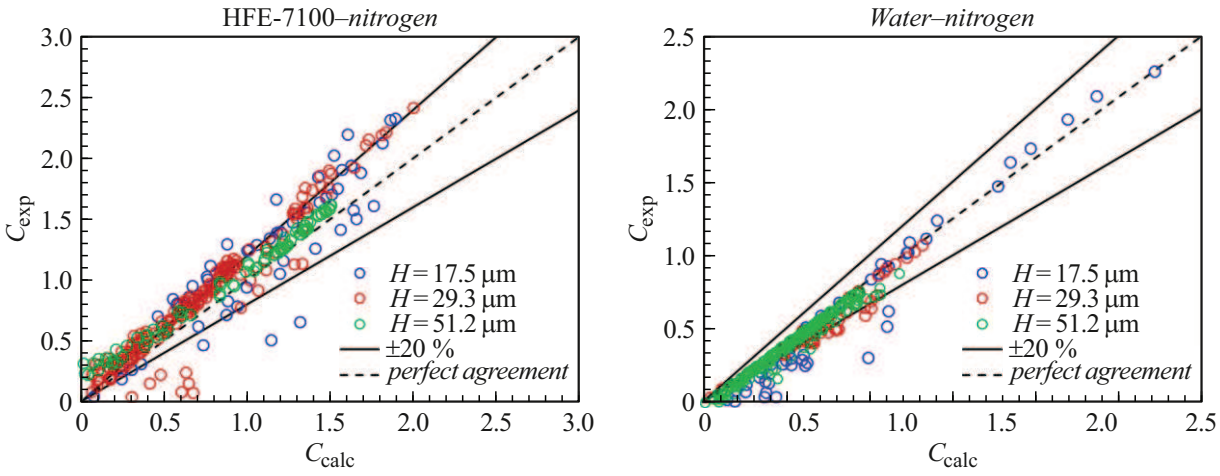


Рис. 9. Сравнение экспериментального и расчетного в рамках модифицированной модели параметра межфазного взаимодействия.

расчетными значениями, полученными по предложенной модели для течений HFE-7100-азот и вода-азот. Расчетные значения параметра Чизхолма C_{calc} определяется по формуле (12) с использованием модельных градиентов давления для однофазных течений, полученных с учетом сжимаемости газа. Наблюдается хорошее качественное и количественное согласие между экспериментом и расчетом: в диапазоне стационарных гидродинамических режимов (газопленочные, стратифицированный) большинство точек лежат в полосе ±20 % относительно линии идеального соответствия. Это подтверждает корректность и применимость предложенной модификации модели при устойчивых условиях течения.

Однако отдельные точки выходят за пределы указанного диапазона ±20 %. Их расположение не случайно и объясняется двумя физическими причинами: во-первых, это нестабильные или переходные гидродинамические режимы течения, при которых наблюдаются хаотические колебания давления, разрывы жидкостных пленок и низкая воспроизводимость межфазной структуры — такие режимы характерны для низких массовых скоростей газа $G_g < 10\,\mathrm{kg/(m^2{\cdot}s)}$, особенно в каналах высотой 29.3 и 51.2 μm; во-вторых, это геометрический эффект, связанный с влиянием толщины жидкостной пленки на эффективный гидравлический диаметр газового потока — в узких каналах высотой 17.5 μm толщина пленки становится соизмеримой с высотой канала, что приводит к уменьшению эффективного сечения для газа и, как следствие, к завышению расчетного значения параметра Чизхолма по сравнению с экспериментальным, особенно при низких G_g. Этот эффект наиболее выражен для HFE-7100-азот, а для воды он дополнительно усиливается за счет смачивания верхней и нижней стенок канала, которое способствует формированию компактной жидкой струи и снижению площади межфазного контакта при малых расходах.

Предложенная модификация ограничена ламинарным режимом течения как для жидкости, так и для газа, а также предположением об изотермичности газа, справедливым при условии $L \gg D_h$ и при малых значениях чисел Маха и Кнудсена. Применение известных корреляций для турбулентных однофазных течений (например, формулы Блазиуса) в рамках данной модели требует дополнительной экспериментальной валидации параметра Чизхолма.

Следует подчеркнуть, что модификация не является универсальной, поскольку не учитывает ряд физических эффектов, характерных для газовых потоков в расширенном диапазоне условий: классическую сжимаемость при высоких числах Маха ($Ma > 0.3$), переходные и турбулентные режимы течения, тепловыделение, эффекты разрежения и влияние шероховатости поверхности. Все эти факторы оказывают прямое влияние на коэффициент трения Дарси f_D и соответственно на инвариант $f_D Re$. Учет указанных эффектов возможен только на основе экспериментального определения параметра Чизхолма в двухфазных потоках при известных термодинамических и гидродинамических характеристиках газовой фазы.

В текущей формулировке модификация применима к гладким прямоугольным микроканалам с гидравлическим диаметром порядка десятков микрометров. Тем не менее она может служить физически обоснованной основой для разработки универсальных корреляций, предназначенных для прогнозирования фрикционного перепада давления двухфазных течений в микроканалах различной геометрии, включая трапецеидальные, круглые и треугольные каналы, при условии соответствующего обобщения базовых однофазных зависимостей.

Заключение

В работе проведено экспериментальное исследование изменения параметра межфазного взаимодействия двухфазных газожидкостных течений в плоских микроканалах высотой от 17.5 до 51.2 μm. Для визуализации

структуры потоков использована отражательная безножевая оптическая шлирен-методика, а также определены характерные параметры шероховатости внутренних поверхностей микроканалов.

Показано, что перепад давления для однофазного потока газа во всех исследованных каналах с высокой точностью описывается соотношением для идеального изотермического квазисжимаемого течения. Для двухфазных течений экспериментально определен параметр межфазного взаимодействия Чизхолма и исследована его зависимость от массовой скорости газа при фиксированных значениях массовой скорости жидкости.

На основе совместного анализа данных по перепаду давления однофазных течений жидкости и газа, эволюции параметра межфазного взаимодействия Чизхолма и результатов шлирен-визуализации предложена модификация классической модели раздельного течения Локхарта–Мартинелли. Предложенная модель аналитически учитывает влияние сжимаемости газовой фазы, характерное для условий течения в микроканалах при малых числах Маха и Кнудсена. Сравнение с экспериментальными данными показало, что большинство точек лежат в диапазоне $\pm 20\,\%$ относительно расчетных значений, а отклонения за пределы этого интервала объясняются либо нестабильными гидродинамическими режимами, либо геометрическим эффектом изменения эффективного гидравлического диаметра из-за наличия жидкостных пленок.

Полученные результаты подтверждают физическую обоснованность и прогностическую способность разработанной модели. Это позволяет рассматривать ее в качестве основы для создания универсальных корреляций, предназначенных для прогнозирования фрикционного перепада давления газожидкостных течений в микроканалах различной конфигурации.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-00709, http://rscf.ru/project/25-29-00709/).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] D.B. Tuckerman, R.F.W. Pease. IEEE Electron Device Lett., **2**, 126 (1981). DOI: 10.1109/EDL.1981.25367
[2] S.G. Kandlikar. Heat Transfer Eng., **26**, 5 (2005). DOI: 10.1080/01457630591003655
[3] I. Mudawar. J. Electron. Packag., **133**, 041002 (2011). DOI: 10.1115/1.4005300
[4] S.G. Kandlikar, W.J. Grande. Heat Transfer Eng., **24**, 3 (2003). DOI: 10.1080/01457630304040
[5] A. Kawahara, P.M.-Y. Chung, M. Kawaji. Int. J. Multiphase Flow, **28**, 1411 (2002). DOI: 10.1016/S0301-9322(02)00037-X
[6] J.R. Thome. Int. J. Heat Fluid Flow, **25**, 128 (2004). DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2003.11.005.
[7] S.G. Kandlikar. Exp. Therm. Fluid Sci., **26**, 389 (2002). DOI: 10.1016/S0894-1777(02)00150-4
[8] I. Mudawar. Compon. Packag. Technol., **24**, 122 (2001). DOI: 10.1109/6144.926375/
[9] J.R. Thome, V. Dupont, A.M. Jacobi. Int. J. Heat Mass Transfer, **47**, 3375 (2004). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.01.006
[10] Z. Jie, C. Dang, Q. Meng. Front. Heat Mass Transfer, **19**, (2025). DOI: 10.32604/fhmt.2025.066792
[11] M.E. Elgack, K. Al-Souqi, M.O. Hamdan, M. Abdelgawad. Int. J. Thermofluids, **24**, 100921 (2024). DOI: 10.1016/j.ijft.2024.100921
[12] F. Municchi, I. El Mellas, O.K. Matar, M. Magnini. Int. J. Heat Mass Transfer, **195**, 123166 (2022). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123166
[13] R.W. Lockhart, R.C. Martinelli. Chem. Eng. Prog., **45**, 39 (1949).
[14] D. Chisholm. Int. J. Heat Mass Transfer, **10**, 1767 (1967). DOI: 10.1016/0017-9310(67)90047-6
[15] A. Kawahara, M. Sadatomi, K. Nei, H. Matsuo. Int. J. Heat Fluid Flow, **30**, 831 (2009). DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.02.017
[16] S.M. Kim, I. Mudawar. Int. J. Heat Mass Transfer, **55**, 3246 (2012). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.02.047
[17] J. Yue, G. Chen, Q. Yuan. Chem. Eng. J., **102**, 11 (2004). DOI: 10.1016/j.cej.2004.02.001
[18] R.K. Shah, A.L. London. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data* (Academic Press, NY., 1978)
[19] S.F. Choquette, M. Faghri, E.J. Kenyon, B. Sunden. *Compressible fluid flow in micron sized channels* (HTD-Vol. 327, National Heat Transfer Conference, ASME, NY., 1996), p. 25–32.
[20] C. Hong, Y. Asako, J.H. Lee. J. Phys. D: Appl. Phys., **41** (10), 105111 (2008). DOI: 10.1088/0022-3727/41/10/105111
[21] M.J. Kohl, S.I. Abdel-Khalik, S.M. Jeter, D.L. Sadowski. Sensors Actuators A: Phys., **118** (2), 212 (2005). DOI: 10.1016/j.sna.2004.07.014
[22] G.L. Morini, M. Lorenzini, S. Colin, S. Geoffroy. Heat Transfer Eng., **28** (8–9), 670 (2007). DOI: 10.1080/01457630701326308
[23] Y. Asako, T. Pi, S.E. Turner, M. Faghri. Int. J. Heat Mass Transfer, **46** (16), 3041 (2003). DOI: 10.1016/S0017-9310(03)00074-7
[24] A.K. Shapiro. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow* (John Wiley, NY., 1953), v. 1, 2.