01

Zitterbewegung в сверхрешетке на основе дираковского кристалла в режиме блоховских осцилляций

© Е.И. Кухарь,[1] С.В. Крючков,[2] Н.А. Иванов[1]

[1] Волгоградский государственный технический университет,
400005 Волгоград, Россия
[2] Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Лаборатория физики низкоразмерных систем,
400066 Волгоград, Россия
e-mail: eikuhar@yandex.ru

Поступило в Редакцию 14 сентября 2025 г.
В окончательной редакции 1 марта 2026 г.
Принято к публикации 10 марта 2026 г.

Изложена теория управления длительностью колебаний zitterbewegung в сверхрешетке на основе 2*D*-дираковского кристалла за счет изменения напряженности электрического поля, приложенного вдоль оси сверхрешетки. Показано, что в резонансном случае, когда блоховская частота совпадает с удвоенной частотой zitterbewegung, характер затухания последнего существенно меняется: амплитуда zitterbewegung убывает обратно пропорционально корню из времени вместо экспоненциального затухания, как у безмассового дираковского электрона. Для случая, когда за период блоховских колебаний происходит значительное число осцилляций zitterbewegung, продемонстрирована возможность периодического восстановления амплитуды zitterbewegung так, что последний приобретает форму биений, частота огибающей которой напрямую зависит от напряженности продольного электрического поля.

Ключевые слова: zitterbewegung, дираковский кристалл, сверхрешетка, частота Раби, блоховские осцилляции.

DOI: 10.61011/JTF.2026.07.63119.263-25

Введение

Известно, что дираковские кристаллы являются удобной платформой для изучения эффектов квантовой электродинамики [1–3]. Одним из них является эффект zitterbewegung (ZB), представляющий собой быстрые осцилляции скорости свободного (псевдо)релятивистского электрона, связанные с интерференцией состояний с положительной и отрицательной энергиями. Математически такой эффект обусловлен наличием в дираковском гамильтониане слагаемых, связывающих импульс носителя заряда с его псевдоспиновой степенью свободы. Высокая частота соответствующих колебаний ($\sim 10^{21}$ Hz) затрудняет наблюдение ZB для свободного электрона в вакууме. Существенно более низкая частота ZB в твердотельных структурах (таких как системы со спин-орбитальной связью Рашбы или графеноподобные структуры), где электроны низкой энергии описываются гамильтонианом релятивистского типа [4,5], значительно облегчает экспериментальное обнаружение данного эффекта [6,7].

В работах [4,8] показано, что релятивистскую квантовую механику можно изучать на платформе полупроводников III–V-групп в присутствии спин-орбитального взаимодействия, где динамика электронов подчиняется аналогичным уравнениям. В экспериментальной работе [6] ZB обнаружен в виде значительных флуктуаций проводимости 2*D*-электронного газа с сильной спин-орбитальной связью типа Рашбы. Это оказалось возможным благодаря использованию точечных инжекторов со спин-поляризованными электронами. Экспериментальное исследование ZB в твердых телах стало возможным благодаря спин-гальваническим методам [9]. Так, в [10] этот эффект наблюдался как переменный ток на частотах GHz в деформированном *n*-InGaAs при умеренных температурах. Более того, амплитуда ZB линейно возрастала с увеличением силы спин-орбитальной связи. Следует отметить, что, помимо исследований динамики дираковских электронов в твердотельных системах, можно изучать оптический аналог ZB в фотонных кристаллах [11,12].

Несмотря на схожесть математического описания ZB как в вакууме, так и в твердых телах, в кристаллах это явление имеет иное происхождение. Так, в [13] показано, что природа ZB обусловлена законом сохранения энергии, обеспечивающим колебания скорости при движении электрона в периодическом потенциале кристалла. Возможность ZB теоретически исследовалась в [14,15] для дираковского электрона в графене. Это явление учитывается при исследовании проводящих свойств дираковских и полудираковских кристаллов [16]. Для теоретического анализа основных особенностей ZB достаточно использовать в качестве начального вектора состояния дельтаобразный в импульсном пространстве (*p*-пространстве) волновой пакет [17]. Однако последний, ввиду своей полной делокализации в пространстве положений, вносит

определенную трудность в практическую реализацию соответствующих колебаний. Для получения результатов, близких к возможным экспериментальным наблюдениям, следует рассматривать пакеты конечной ширины, хорошо локализованные как в импульсном пространстве, так и в пространстве положений. С другой стороны, осцилляции ZB для волнового пакета конечной ширины являются затухающими, и время затухания напрямую зависит от ширины пакета. Некоторые решения проблемы затухания ZB, основанные на особенностях взаимодействия дираковского электрона с высокочастотным электромагнитным излучением, предложены в [17–20].

Одной из причин затухания ZB является разбегание в реальном пространстве волновых субпакетов, соответствующих разным знакам энергии электронов. Поэтому, как обсуждалось в [21], уменьшение скорости этого разбегания может увеличить время осцилляций ZB. Линейный закон дисперсии (который является часто используемой моделью для электрона в чистом графене) не допускает такой возможности из-за постоянства скорости Ферми. Однако если имеется дираковский материал с более сложным законом дисперсии, содержащий долины в своей зонной структуре, то можно добиться существенного уменьшения групповой скорости за счет центрирования волновых пакетов в p-пространстве вблизи минимумов (максимумов) дисперсионных линий. В связи с этим для увеличения продолжительности ZB имеет смысл использовать различные структуры на основе дираковских кристаллов [21,22]. Среди них особое внимание уделяется графеновым сверхрешеткам (СР) [22–25], в которых за счет создания дополнительного периодического потенциала удается контролировать параметры зонной структуры и характеристики электронного переноса [26–32].

Отметим, что в реальных системах другой причиной затухания ZB (наряду с указанной выше) могут быть необратимые потери энергии носителей заряда в процессе их рассеяния на неоднородностях решетки (фононах, дефектах и т.д.). Характерное время затухания, связанного с такими диссипативными процессами, имеет порядок среднего времени свободного пробега носителя τ. Известной особенностью графена является то, что при комнатных температурах электрон-фононное взаимодействие в нем намного слабее, чем в $2D$-структурах на основе таких полупроводников, как GaAs или InSb. Это приводит к высокой подвижности носителей заряда. Так, для концентраций $10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2}$ подвижность электронов в графене имеет величину порядка $\mu \sim 10^5\,\mathrm{cm}^2/(\mathrm{V{\cdot}s})$ [33,34]. При этом длина свободного пробега λ для рассеяния электронов на акустических фононах в графене превышает $1\,\mu$m [34]. Простая оценка времени $\tau \sim \varepsilon_\mathrm{F}\mu/e\upsilon_\mathrm{F}^2 \sim \lambda/\upsilon_\mathrm{F}$ (ε_F — энергия, отвечающая уровню Ферми) дает значение порядка 10^3 fs. Эта оценка подтверждается и строгими расчетами [35]. Время затухания ZB, связанного с разбеганием волновых субпакетов, отвечающих различным знакам энергии, может быть на несколько порядков меньше времени диссипативного затухания и лежать в пределах от 10 до 100 fs [24,25,36,37]. Поэтому задача о преодолении бездиссипативного затухания может оказаться первоочередной по отношению к проблеме влияния на ZB диссипативных процессов.

Ниже показана возможность управления бездиссипативным затуханием ZB, а также структурой осцилляций ZB в СР, помещенной в постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси СР на основе дираковского кристалла. В частности, демонстрируется, что в режиме блоховских осцилляций в СР колебания ZB приобретают форму биений. Отметим, что использование постоянного поля вместо переменного, как это было в работах [17–19], может существенно упростить задачу о возможной экспериментальной проверке эффектов восстановления ZB.

1. Увеличение продолжительности zitterbewegung

СР на основе дираковских материалов, в частности, СР, создаются в лабораторных условиях и широко изучаются как теоретически, так и экспериментально [38–40]. К настоящему времени предложены различные механизмы, позволяющие создать дополнительный периодический потенциал для графена. Среди них можно указать создание периодически модулированного в пространстве электрического поля [27,41–43], использование подложки [26,44,45], наведение деформаций [43,46–48], химическое лигирование и гидрирование [49–51], травление и литография [39,52], разупорядочение [53] и т.д. Свяжем с $2D$-дираковским кристаллом плоскость xy. Считаем, что вдоль направления Ox создан дополнительный СР-потенциал с пространственным периодом d: $U(x+d) = U(x)$. Последний может быть сформирован за счет периодически чередующихся потенциальных барьеров, наведенных электростатическим полем так, как это предлагалось в [27,42]. Состояния электрона описываются спинором Ψ, компоненты которого отвечают двум различным псевдоспиновым состояниям. Рассмотрим состояния, отвечающие энергии ε и волновым числам, близким к дираковской точке. В этом случае гамильтониан системы можно записать в виде [27]:

$$\hat{H} = \upsilon_\mathrm{F}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + U(x),$$

где $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\}$ — матрицы Паули, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, υ_F — скорость Ферми. Используя разложение компонентов спинора Ψ по блоховским функциям и приближение сильной связи, можно показать, что в импульсном представлении гамильтониан системы будет иметь вид [54]:

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \Delta \sin\left(\frac{p_x d}{2\hbar}\right)\hat{\sigma}_x + \upsilon_\mathrm{F} p_y \hat{\sigma}_y. \qquad (1)$$

Здесь $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ — матрицы Паули, υ_F — скорость Ферми, параметр $\Delta = 2\hbar\upsilon_\mathrm{F}/d$ имеет смысл ширины минизоны

проводимости. Отметим, что собственные значения гамильтониана (1) дают электронный спектр СР, который получен в [27] в низкоэнергетическом приближении из соответствующего дисперсионного уравнения. Последнее записано в [27] для СР на основе бесщелевого графена в рамках модели Кронига–Пенни для внешнего периодического в координатном пространстве потенциала. В [28] аналогичный спектр получен в приближении сильной связи для графена на периодически чередующейся подложке. В работе [29] при изучении блоховских осцилляций в графеновой наноленте с СР использовался гамильтониан, аналогичный (1), но для одномерной модели.

Если кристалл помещен в пространственно однородное электрическое поле с векторным потенциалом **A**, то соответствующие электронные состояния являются решениями нестационарной задачи

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\left(\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi, \tag{2}$$

где ψ — спинор, описывающий электронные состояния в минизоне проводимости. Считаем, что электрическое поле является постоянным, а его вектор напряженности **E** направлен вдоль оси СР: $A_x=-cEt$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\Delta\sin\left(\frac{\Omega_{\mathrm{B}}t-\theta}{2}\right)\hat{\sigma}_x\psi+\frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_y\psi. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\theta=p_xd/\hbar$. $\hbar\Omega=2\upsilon_{\mathrm{F}}p_y$, $\Omega_{\mathrm{B}}=eEd/\hbar$ — блоховская частота. Далее воспользуемся унитарным преобразованием $\psi=\hat{S}^{+}\chi$ с оператором:

$$\hat{S}=\exp\left(\frac{i\Omega t}{2}\hat{\sigma}_z\right)\cdot\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\hat{\sigma}_x\right). \tag{4}$$

После преобразований придем к уравнению для нового спинора χ:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=-\Delta\sin\left(\frac{\Omega_{\mathrm{B}}t-\theta}{2}\right)\exp(i\Omega t\hat{\sigma}_z)\hat{\sigma}_x\chi. \tag{5}$$

Далее рассмотрим ситуацию, когда электрическое поле таково, что выполняется неравенство:

$$|\Omega_{\mathrm{B}}-2\Omega|\ll\Omega_{\mathrm{B}},\,2\Omega. \tag{6}$$

В этом случае, уравнение (5) удается решить в рамках приближения вращающейся волны (rotating wave approximation, RWA) [17]: в (5) следует оставить только те слагаемые, которые содержат разности частот $(\Omega_{\mathrm{B}}-2\Omega)$, и отбросить слагаемые, содержащие суммы $(\Omega_{\mathrm{B}}+2\Omega)$. В результате приходим к приближенному уравнению:

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=\frac{\Delta}{2}\exp\left(\frac{i}{2}\big((2\Omega-\Omega_{\mathrm{B}})t+\theta\big)\hat{\sigma}_z\right)\hat{\sigma}_y\chi. \tag{7}$$

Решением (7) является спинор:

$$\chi(t)=\exp\left(\frac{i}{2}\Big(\Omega-\frac{\Omega_{\mathrm{B}}}{2}\Big)t\hat{\sigma}_z\right)\times\left(\chi_1\exp\Big(\frac{i}{2}\,\Omega_{\mathrm{R}}t\Big)+\chi_2\exp\Big(-\frac{i}{2}\,\Omega_{\mathrm{R}}t\Big)\right), \tag{8}$$

где Ω_{R} — частота Раби, равная

$$\Omega_{\mathrm{R}}=\sqrt{\frac{\Delta^2}{\hbar^2}+\Big(\Omega-\frac{\Omega_{\mathrm{B}}}{2}\Big)^2}, \tag{9}$$

а независящие от времени спиноры χ_1 и χ_2 определяются с помощью уравнений, вытекающих из начального условия: $\psi(\mathbf{p},t=0)=\psi_{2D}(\mathbf{p})$ ($\psi_{2D}(\mathbf{p})$ — известный спинор). В результате для спинора $\psi(\mathbf{p},t)$ находим

$$\psi(\mathbf{p},t)=\left\{\exp\left(\frac{i\Omega_{\mathrm{R}}t}{2}\right)\hat{G}_{+}(\mathbf{p},t)+\exp\left(-\frac{i\Omega_{\mathrm{R}}t}{2}\right)\hat{G}_{-}(\mathbf{p},t)\right\}\psi_{2D}(\mathbf{p}), \tag{10}$$

где введены следующие операторы:

$$\hat{G}_{\pm}(\mathbf{p},t)=\frac{1}{2}\,\hat{S}^{+}(t)\exp\left(\frac{i}{2}\Big(\Omega-\frac{\Omega_{\mathrm{B}}}{2}\Big)t\hat{\sigma}_z\right)\hat{U}_{\pm}(\mathbf{p})\hat{S}(0), \tag{11}$$

$$\hat{U}_{\pm}(\mathbf{p})=1\mp\frac{\Delta}{\hbar\Omega_{\mathrm{R}}}\exp\left(\frac{i\theta}{2}\,\hat{\sigma}_z\right)\hat{\sigma}_y\mp\frac{2\Omega-\Omega_{\mathrm{B}}}{2\Omega_{\mathrm{R}}}\,\hat{\sigma}_z. \tag{12}$$

Исследуем временную зависимость для поперечной по отношению к оси СР средней квантово-механической скорости дираковского электрона $\upsilon_y=\upsilon_{\mathrm{F}}\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$. Подстановка (10) в соответствующую формулу дает:

$$\upsilon_y=\upsilon_{\mathrm{F}}\sum_{s',s=\pm}\iint d^2\mathbf{p}\times\exp\left(\frac{i(s-s')\Omega_{\mathrm{R}}t}{2}\right)\psi^{+}_{2D}(\mathbf{p})\hat{G}^{+}_{s'}(\mathbf{p},t)\hat{\sigma}_y\hat{G}_s(\mathbf{p},t)\psi_{2D}(\mathbf{p}). \tag{13}$$

Для того чтобы электронная скорость была функцией времени, необходимо, чтобы начальный спинор $\psi_{2D}(\mathbf{p})$ являлся суперпозицией состояний, соответствующих положительной и отрицательной энергиям частицы. Для этого выберем структуру начального спинора, чаще всего рассматриваемую в теоретических работах и имеющую профиль гауссовского волнового пакета (Gaussian wave packet, GWP) [4,13,17,21]:

$$\psi_{2D}(\mathbf{p})=\frac{b}{\sqrt{\pi}\hbar}\times\exp\left(-\frac{b^2}{2\hbar^2}\big((p_x-p_{0x})^2+(p_y-p_{0y})^2\big)\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Здесь b — эффективная ширина GWP в одном из направлений. Ансамбль электронов в одинаковых начальных псевдоспиновых состояниях (14) может быть

инициализирован циркулярно поляризованными пикосекундными лазерными импульсами, аналогично тому, что было сделано в [10] для системы спиновых состояний в деформированном n-InGaAs. Теоретическая основа такой экспериментальной возможности на платформе углеродных наноструктур и дираковских систем приведена в работах [55,56], где также представлен набор оптимальных параметров для наблюдения ZB в лабораторных условиях. Выбор спинора в виде (14) обусловлен тем, что, во-первых, GWP демонстрирует минимальную неопределенность положения частицы и ее импульса. Во-вторых, как указано в [57], задание начального состояния в виде (14) охватывает большинство случаев, представляющих практический интерес, поскольку любой волновой пакет может быть аппроксимирован суперпозицией конечного числа GWP. После подстановки (14) в (13) и вычисления интегралов по p_x находим

$$\upsilon_y = -\frac{\upsilon_{\mathrm{F}} b\Delta}{\sqrt{\pi}\hbar^2}\exp\left(-\frac{d^2}{16b^2}\right)\sin\left(\frac{p_{0x}d}{2\hbar}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y$$
$$\times\exp\left(-\frac{b^2}{\hbar^2}(p_y-p_{0y})^2\right)\frac{\sin(\Omega_{\mathrm{R}}t)}{\Omega_{\mathrm{R}}}+\frac{\upsilon_{\mathrm{F}} b\Delta}{2\sqrt{\pi}\hbar^2}$$
$$\times\exp\left(-\frac{d^2}{16b^2}\right)\cos\left(\frac{p_{0x}d}{2\hbar}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y$$
$$\times\exp\left(-\frac{b^2}{\hbar^2}(p_y-p_{0y})^2\right)\frac{\Omega_{\mathrm{B}}-2\Omega}{\Omega_{\mathrm{R}}^2}\sin^2\left(\frac{\Omega_{\mathrm{R}}t}{2}\right). \quad (15)$$

Примененное выше приближение не позволяет рассматривать начальное состояние вблизи дна минизоны CP ($p_{0x}=0$). В противном случае, согласно (15), $\upsilon_y \propto (\Omega_{\mathrm{B}}-2\Omega)$ и скорость стремится к нулю при $\Omega_{\mathrm{B}}\to 2\Omega$. В этом случае в (5) необходимо оставлять слагаемые, содержащие суммы частот $(\Omega_{\mathrm{B}}+2\Omega)$, в то время как такие слагаемые отброшены при получении формулы (15). Таким образом, чтобы не нарушить условия RWA, необходимо рассматривать начальные состояния вдали от дна минизоны. В [22] показано, что продолжительность ZB в графеновой CP существенно возрастает, если GWP центрировать у потолка минизоны. В связи с этим имеет смысл рассмотреть состояния с начальным импульсом, равным $p_{0x}=\pi\hbar/d$. Тогда вместо (15) следует записать:

$$\upsilon_y = -\frac{\upsilon_{\mathrm{F}} b\Delta}{\sqrt{\pi}\hbar^2}\exp\left(-\frac{d^2}{16b^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y$$
$$\times\exp\left(-\frac{b^2}{\hbar^2}(p_y-p_{0y})^2\right)\frac{\sin(\Omega_{\mathrm{R}}t)}{\Omega_{\mathrm{R}}}. \quad (16)$$

Из (11) нетрудно увидеть, что зависимость частоты Раби от квазиимпульса p_y достигает минимума при достижении параметром Ω, имеющим смысл частоты ZB для безмассового дираковского электрона, своего резонансного значения: $\Omega=\Omega_{\mathrm{B}}/2$. Последнее соответствует резонансному значению квазиимпульса, равному $p_y=p_{\mathrm{res}}\equiv eEd/4\upsilon_{\mathrm{F}}$. Для стандартного значения квазиимпульса $p_{0y}\sim\hbar\cdot 1.0\,\mu\mathrm{m}^{-1}$, соответствующего центру GWP [17], параметр Ω составляет $\Omega\sim 2\,\mathrm{THz}$. Таким образом, согласно условию (6), $|\Omega-\Omega_{\mathrm{B}}/2|\ll 2\,\mathrm{THz}$. С другой стороны, оценка ширины минизоны проводимости для структуры с CP составляет $\Delta=2\hbar\upsilon_{\mathrm{F}}/d\sim 20\,\mathrm{meV}$, что согласуется с типичными значениями для гарфеновых CP [29,42]. Тогда для параметра $\Omega_0=\Delta/\hbar$, фигурирующего в формуле (9) для частоты Раби, получим значение $\Omega_0\sim 30\,\mathrm{THz}$, что на порядок выше Ω. Проведенная численная оценка позволяет оставить для частоты Раби (9) квадратичные по величине $|\Omega-\Omega_{\mathrm{B}}/2|$ слагаемые. Таким образом, зависимость частоты Раби от квазиимпульса p_y в окрестности резонансного значения p_{res} имеет вид $\Omega_{\mathrm{R}}=\Omega_0+\alpha(p_y-p_{\mathrm{res}})^2$, где $\alpha=2\upsilon_{\mathrm{F}}^2/\hbar\Delta$.

Далее центрируем GWP так, чтобы его максимум приходился на резонансное значение квазиимпульса: $p_{0y}=p_{\mathrm{res}}$. Если GWP выбрать настолько узким в p-пространстве, что можно было бы пренебречь вкладами импульсов p_y, далекими от значения p_{res}, то частоту Раби, входящую в интеграл (16), можно заменить указанным выше квадратичным приближением. Последующие вычисления дают

$$\upsilon_y = -\frac{\upsilon_{\mathrm{F}} b}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{d^2}{16b^2}\right)\left(\sqrt{\frac{b^2+\sqrt{b^4+\hbar^4\alpha^2t^2}}{b^4+\hbar^4\alpha^2t^2}}\right.$$
$$\left.\times\sin\Omega_0 t+\sqrt{\frac{-b^2+\sqrt{b^4+\hbar^4\alpha^2t^2}}{b^4+\hbar^4\alpha^2t^2}}\cos\Omega_0 t\right). \quad (17)$$

Если принять во внимание типичные значения геометрических параметров $b\sim 1\,\mu\mathrm{m}$, $d\sim 0.05\,\mu\mathrm{m}$ [17,29,42], то показатель экспоненты, фигурирующей в (17), близок к нулю. Как следствие, экспонента в (17) может быть опущена. Спустя длительное время ($t\gg b^2/\hbar^2\alpha$), имеем

$$\upsilon_y = -b\sqrt{\frac{\Omega_0}{2t}}\sin\left(\Omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right). \quad (18)$$

Согласно (18), затухание ZB происходит не по экспоненциальному закону, как в случае безмассового дираковского электрона, а гораздо медленнее: $\upsilon_{x,\max}\propto t^{-1/2}$. Это обстоятельство должно способствовать увеличению длительности ZB и, как следствие, упрощению его экспериментального наблюдения.

Как известно, внешняя постоянная сила, вызванная действием электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}$ на электрон, находящийся в периодическом потенциале, приводит к блоховским осцилляциям носителя заряда с частотой Ω_{B}. Заметим, что за данные осцилляции отвечает первое слагаемое гамильтониана, фигурирующего в правой части уравнения (3). Согласно этому слагаемому, гамильтониан системы является нестационарным,

и в условиях блоховских осцилляций принимает такой вид, как если бы на электрон действовало некоторое эффективное силовое поле, периодически меняющееся во времени с блоховской частотой. В этом случае можно говорить о квазиэнергии, которая, согласно (8), равна $\tilde{\varepsilon} = \pm(1/2)\hbar\Omega_{\mathrm{R}}$. Из (8) видно, что искомое состояние системы представляет собой суперпозицию состояний, отвечающих различным знакам квазиэнергии. Следовательно, волновые субпакеты должны разбегаться со скоростью, равной групповой скорости $\partial\tilde{\varepsilon}/\partial p_y$, приводя к экспоненциальному затуханию ZB. Однако если центрировать GWP в точке минимума/максимума квазиэнергии, т. е. положить $p_{oy} = p_{\mathrm{res}}$, то групповая скорость субпакетов окажется равной нулю. Тем не мене, как это видно из (18), затухание ZB сохраняется. Однако оно имеет другой характер и природу, отличную от той, что у безмассового дираковского электрона. Очевидно, что затухание ZB в этом случае связано не с разбеганием волновых субпакетов в пространстве, а с их делокализацией (расплыванием во времени), что характерно для квантовых частиц с квадратичным законом дисперсии.

2. Эффект восстановления ZB

Покажем здесь, что при определенных условиях в СР на основе дираковского кристалла, помещенного в продольное постоянное электрическое поле, возможен эффект восстановления осцилляций ZB. Сначала обсудим качественную сторону такой возможности. На рис. 1, *a* сплошными линиями представлен график закона дисперсии $\varepsilon(p_x)$ носителя заряда в минизоне СР. Синяя и красная линии изображают состояния с положительными и отрицательными энергиями соответственно. Согласно уравнениям движения, постоянное однородное электрическое поле приводит к линейному росту со временем продольной компоненты p_x квазиимпульса электрона. Групповая скорость волнового пакета при этом меняется периодически, обеспечивая тем самым так называемые блоховские колебания электрона в минизоне проводимости [29]. Выясним, как будут вести себя волновые субпакеты, отвечающие различным знакам энергии, в течение одного периода блоховских осцилляций. Для простоты считаем, что начальное состояние сформировано в дираковской точке K, причем поперечная компонента квазиимпульса остается равной нулю ($p_y = 0$) на протяжении всего времени движения. В состоянии K ($\theta_0 = p_{0x}d/\hbar = 0$) субпакеты совпадают по своему положению. Однако их групповые скорости направлены в противоположные стороны, что приводит уменьшению с течением времени перекрытия субпакетов и, как следствие, к затуханию ZB. С увеличением значения компоненты p_x состояние системы перемещается по дисперсионной линии из точки K в точку A, отвечающую границе зоны Бриллюэна. При этом абсолютное значение групповой скорости субпакета непрерывно уменьшается (штриховая линия на рис. 1, *a*).

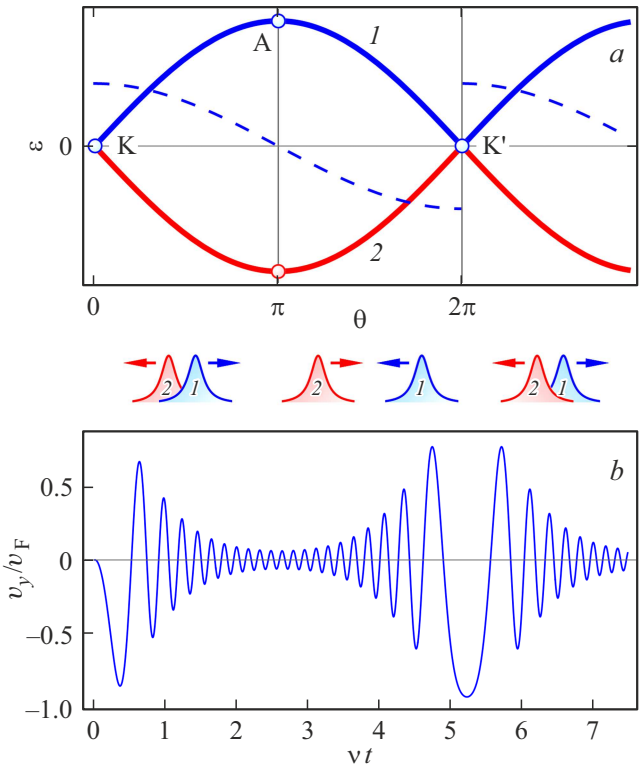


Рис. 1. К объяснению эффекта восстановления ZB: *a* — дисперсионные линии (сплошные линии) и направления движения волновых субпакетов, K и K′ — дираковские точки, A — граница зоны Бриллюэна, синяя линия *1* и красная линия *2* изображают состояния с положительными и отрицательными энергиями соответственно, штриховая линия отвечает групповой скорости субпакета с положительной энергией; *b* — зависимость электронной скорости от времени для пакета конечной ширины, $b = 0.5\,\mu$m, $E = 30$ kV/m.

Когда значение параметра $\theta = p_x d/\hbar$ достигнет границы зоны Бриллюэна ($\theta = \pi$), групповая скорость субпакетов обратится в нуль, и их разбегание прекратится. Дальнейшее возрастание значения квазиимпульса p_x приведет к смене знака групповой скорости субпакетов (известное как брэгговское отражение от границы минизоны) и, как следствие, к их сближению (направление движения волновых субпакетов изображено на рис. 1, *a* под схемой дисперсионных линий). В этой связи следует ожидать, что затухание ZB сменится его восстановлением. Согласно сказанному, полное восстановление амплитуды ZB должно произойти спустя время, в течение которого состояние переместится в дираковскую точку K′ (эквивалентную K), т. е. за время, равное периоду блоховских колебаний. После этого процесс повторится. Таким образом, описанные осцилляции в целом должны иметь вид биений, частота огибающей которых равна Ω_{B}. При этом следует учесть, что данные биения себя проявят, если за период блоховских осцилляций произойдет как значительное число полных колебаний ZB, так и их заметное затухание. То есть в рассматриваемой ситуации

блоховская частота Ω_B должна существенно отличаться от частоты ZB, что приведет к нарушению условия (6). Следовательно, для соответствующего количественного расчета приближение RWA уже неприменимо.

Проведем теперь количественный анализ описанного выше процесса. Запишем решение уравнения (3) в следующем виде:

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \hat{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt\hat{H}(p_x - eEt, p_y)\right)\psi_{1D}(\mathbf{p}), \quad (19)$$

где $\hat{T}$ — оператор хронологического упорядочения, $\psi_{1D}(\mathbf{p})$ — спинор, описывающий начальное состояние дираковского электрона. Будем считать, что последний делокализован в поперечном по отношению к оси CP направлении. В продольном же направлении начальный волновой пакет $\psi_{1D}(\mathbf{p})$ имеет гауссовский профиль шириной b, причем центрирован он так, чтобы поперечная компонента импульса оставалась равной нулю ($p_{0y} = 0$):

$$\psi_{1D}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\hbar}\lim_{b_1\to\infty}\sqrt{\frac{b_1 b}{\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\hbar^2}\left(b^2(p_x - p_{0x})^2 + b_1^2 p_y^2\right)\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \quad (20)$$

После подстановки (19) и (20) в формулу для поперечной по отношению к оси CP компоненты скорости электрона и совершения предельного перехода $b_1 \to \infty$, получаем

$$\upsilon_y = \frac{2\upsilon_F b}{\sqrt{\pi}d}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{4\Delta}{\hbar\Omega_B}\left(\cos\left(\frac{\Omega_B t}{2} - \xi\right) - \cos\xi\right)\right) \times \exp\left(-\frac{4b^2}{d^2}(\xi - q)^2\right)d\xi. \quad (21)$$

Представим (21) в виде ряда. Для этого используем стандартное разложение [58,59]:

$$\sin(\beta\sin\gamma) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta)\sin(2n+1)\gamma, \quad (22)$$

где $J_n(\beta)$ — функция Бесселя n-го порядка. Чтобы воспользоваться (22), приведем сначала формулу (21) к виду

$$\upsilon_y = \frac{2\upsilon_F b}{\sqrt{\pi}d}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{8\Delta}{\hbar\Omega_B}\sin\left(\frac{\Omega_B t}{4}\right) \times \sin\left(\xi - \frac{\Omega_R t}{4}\right)\right)\exp\left(-\frac{4b^2}{d^2}(\xi - q)^2\right)d\xi. \quad (23)$$

Применим для синуса подынтегральной функции (23) разложение (22), сделав при этом в (22) замены: $\beta \to (8\Delta/\hbar\Omega_B)\sin(\Omega_B t/4)$, $\gamma \to \xi - \Omega_B t/4$. В результате придем к выражению

$$\upsilon_y = \frac{4\upsilon_F b}{\sqrt{\pi}d}\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}\left(\frac{8\Delta}{\hbar\Omega_B}\sin\frac{\Omega_B t}{4}\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left((2n+1)\left(\xi - \frac{\Omega_B t}{4}\right)\right)\exp\left(-\frac{4b^2}{d^2}(\xi - q)^2\right)d\xi. \quad (24)$$

Взяв в (24) интеграл по переменной ξ, запишем

$$\upsilon_y = 2\upsilon_F\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2 d^2}{16b^2}\right) \times J_{2n+1}\left(\frac{8\Delta}{\hbar\Omega_B}\sin\left(\frac{\Omega_B t}{4}\right)\right)\sin\left((2n+1)\left(q - \frac{\Omega_B t}{4}\right)\right). \quad (25)$$

Здесь $q = p_{0x}d/2\hbar$. В пределе $\Omega_B \to 0$ результат (25) переходит в соответствующую формулу [22]. Действительно, зависимость скорости υ_F от времени, построенная по формуле (22) для $p_{0x} = 0$ и показанная на рис. 1, b ($\nu = \upsilon_F/b$), представляет собой биения. Графики здесь построены для следующих типичных значений параметров [17,29]: $b = 0.5\,\mu$m, $d = 0.05\,\mu$m, $E = 30$ kV/m. Временна́я зависимость, показанная на рис. 1, b, демонстрирует следующее. Во-первых, в процессе удаления/сближения волновых пакетов происходит периодическое изменение не только амплитуды осцилляций ZB, но и их частоты: при приближении центров субпакетов к дираковской точке частота ZB уменьшается, а при удалении от нее — увеличивается. Во-вторых, времена, в течение которых амплитуда и частота ZB достигают начальных значений, совпадают, и равны периоду блоховских осцилляций.

На рис. 2 приведены временные зависимости, построенные для различных значений начального квазиимпульса p_{0x} и напряженности электрического поля. Видно, что при $p_{0x} \neq 0$ по-прежнему осцилляции поперечной компоненты скорости электрона представляют собой биения, в которых затухание колебаний ZB сменяется их восстановлением, и наоборот. Однако структура этих биений несколько сложнее биений в случае, когда $p_{0x} = 0$. Для графика на рис. 2, a, построенного для $\theta_0 = p_{0x}d/\hbar < \pi$, характерен временной участок M_1M_2, на котором происходит „двойное восстановление“ ZB, причем моменты времени на этом интервале, отвечающие максимуму амплитуды, сближаются при $\theta_0 \to \pi$. Если начальный волновой пакет центрирован на границе зоны Бриллюэна ($\theta_0 = \pi$, рис. 2, b), то эффект „двойного восстановления“ уже отсутствует, однако затухание происходит медленнее, чем в случае $\theta_0 = 0$. Это свидетельствует о том, что начальные групповые скорости субпакетов, отвечающих различным знакам энергии, равны нулю, и субпакеты относительно долгое время максимально перекрывают друг друга.

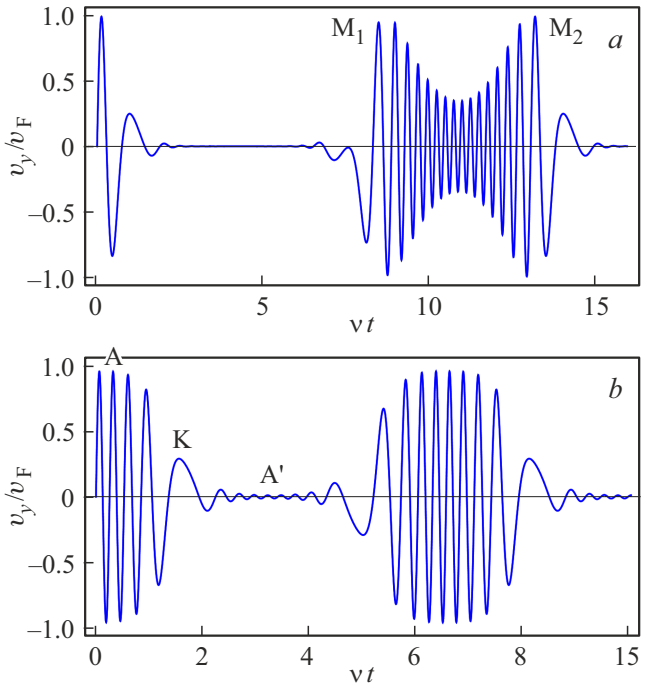


Рис. 2. Зависимость поперечной компоненты скорости электрона от времени, $d = 0.08\,\mu$m, $b = 0.5\,\mu$m, $\nu = \upsilon_F/b$; *a* — $\theta_0 = \pi/3$, $E = 15$ kV/m, *b* — $\theta_0 = \pi$, $E = 30$ kV/m.

Стоит обратить внимание на следующую особенность в поведении осцилляций ZB в CP при $p_{0x} \neq 0$. Для большей наглядности будем считать, что начальный волновой пакет центрирован на границе зоны Бриллюэна (точка A, $\theta_0 = \pi$). Из рис. 2, *b* видно, что затухание ZB на временном отрезке AA′ изначально сопровождается уменьшением частоты ZB (участок AK), что свидетельствует о приближении состояния к дираковской точке K. После ее прохождения частота ZB начинает возрастать, что соответствует удалению центра волнового пакета от дираковской точки. Однако несмотря на смену знака производной $\partial\varepsilon/\partial p_x$ при прохождении точки K, колебания ZB продолжают затухать вплоть до достижения центра пакета противоположной границы зоны Бриллюэна (участок KA′). Это говорит о продолжающемся удалении волновых субпакетов друг от друга. Дело в том, что, согласно общей теории [1,2], при переходе через дираковскую точку происходит изменение состояния дираковского электрона таким образом, что фазы волновых функций меняются на противоположные. Как следствие, субпакет, отвечавший до перехода через точку K за положительную энергию, после перехода через эту точку начинает отвечать уже за отрицательную энергию и наоборот. Таким образом, наблюдение на эксперименте участка KA′ с минимальной амплитудой и максимальной частотой ZB при $\theta_0 = \pi$ может выступать в качестве косвенного доказательства того, что при переходе через дираковскую точку волновые функции дираковского электрона приобретают дополнительный фазовый сдвиг, известный как фаза Берри.

Заключение

Предложена теория управления длительностью колебаний ZB в CP на основе 2*D*-дираковского кристалла за счет электрического поля, приложенного вдоль оси CP. Постоянное электрическое поле, как известно, приводит к так называемым блоховским колебаниям электрона в минизоне проводимости. Математически за данные колебания отвечает периодическое во времени слагаемое гамильтониана, фигурирующего в правой части уравнения (3). При соблюдении условия резонанса (6) данное слагаемое обеспечивает формирование долины в квазиэнергетическом спектре. В этом случае затухание ZB можно преодолеть за счет центрирования GWP таким образом, чтобы его максимум совпадал с центром квазиэнергетической долины. Последнее приводит к равенству нулю групповой скорости волновых субпакетов, отвечающих разным знакам энергии. Как следствие, это устраняет разбегание субпакетов, являющееся основной причиной затухания ZB. Тем не менее, согласно (18), затухание ZB остается, но происходит уже не по экспоненциальному закону, как в случае безмассового дираковского электрона, а гораздо медленнее: $\upsilon_{x,\max} \propto t^{-1/2}$. Последнее характерно для достаточно узких в *p*-пространстве GWP, центрированных в точке минимума/максимума дисперсионной линии [20]. Это обстоятельство должно способствовать увеличению длительности ZB и, как следствие, упрощению его экспериментального наблюдения.

В случае, когда за период блоховских колебаний происходит значительное число осцилляций ZB, возможно периодическое восстановление амплитуды ZB так, что последний приобретает форму биений, частота огибающей которой напрямую зависит от напряженности продольного электрического поля. Возрастание амплитуды ZB объясняется периодическим приближением в *p*-пространстве состояния электрона к границе минизоны проводимости. Это обеспечивает снижение до нуля групповой скорости субпакетов и последующую смену направления их движения, известное как брэгговское отражение. Это приводит к тому, что уменьшение перекрытия волновых субпакетов сменяется его увеличением. Как следствие, амплитуда ZB восстанавливается.

Наличие во временной зависимости осцилляций ZB участков с пониженной амплитудой и повышенной частотой, наступающих после прохождения волновых субпакетов в *p*-пространстве через дираковскую точку, свидетельствует об изменении фазы волновых функций на величину, известную как фаза Берри. Таким образом, наблюдение указанных временных интервалов может стать основой для экспериментального обнаружения фазовых изменений в состояниях дираковских электронов.

Финансирование работы

Работа поддержана грантом Российского научного фонда на проведение фундаментальных научных иссле-

дований и поисковых научных исследований № 25-22-20071.

Вклад авторов

Е.И. Кухарь — общее руководство исследованием, концепция исследования, интерпретация результатов, аналитические расчеты, оформление рукописи; С.В. Крючков — обсуждение результатов, редактирование; Н.А. Иванов — построение графиков, оформление иллюстраций, численная проверка.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A. Geim. Rev. Mod. Phys., **81**, 109 (2009). DOI: 10.1103/RevModPhys.81.109
[2] I. Romanovsky, C. Yannouleas, U. Landman. Phys. Rev. B, **87**, 165431 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.165431
[3] Y. Kim, J.D. Lee. Mater. Today Phys., **21**, 100525 (2021). DOI: 10.1016/j.mtphys.2021.100525
[4] J. Schliemann, D. Loss, R.M. Westervelt. Phys. Rev. Lett., **94**, 206801 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.206801
[5] Н.Е. Фирсова, С.А. Ктиторов. ФТТ, **63** (2), 277 (2021). DOI: 10.21883/FTT.2021.02.50478.148 [N.E. Firsova, S.A. Ktitorov. Phys. Solid State, **63** (2), 313 (2021). DOI: 10.1134/S1063783421020074]
[6] Y. Iwasaki, Y. Hashimoto, T. Nakamura, S. Katsumoto. J. Phys. Conf. Ser., **864**, 012054 (2017). DOI: 10.1088/1742-6596/864/1/012054
[7] I. Stepanov, S. Kuhlen, M. Ersfeld, M. Lepsa, B. Beschoten. Appl. Phys. Lett., **104**, 062406 (2014). DOI: 10.1063/1.4864468
[8] С.А. Тарасенко, А.В. Пошакинский, Е.Л. Ивченко, И. Степанов, М. Эрсфельд, М. Лепса, Б. Бешотен. Письма в ЖЭТФ, **108**, 348 (2018). DOI: 10.1134/S0370274X18170083 [S.A. Tarasenko, A.V. Poshakinskiy, E.L. Ivchenko, I. Stepanov, M. Ersfeld, M. Lepsa, B. Beschoten. JETP Lett., **108**, 326 (2018). DOI: 10.1134/S0021364018170022]
[9] E.L. Ivchenko, S.D. Ganichev. *Spin-Photogalvanics* (Springer International Publishing, Cham., 2017), v. 157, p. 281. DOI: 10.1007/978-3-319-65436-2_9
[10] I. Stepanov, M. Ersfeld, A.V. Poshakinskiy, M. Lepsa, E.L. Ivchenko, S.A. Tarasenko, B. Beschoten. Coherent electron zitterbewegung. arXiv:1612.06190v1 (2016). DOI: 10.48550/arXiv.1612.06190
[11] H. Deng, F. Ye, B.A. Malomed, X. Chen, N.C. Panoiu. Phys. Rev. B, **91**, 201402 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevB.91.201402
[12] S. Lovett, P. Walker, A. Osipov, A. Yulin, P.U. Naik, C.E. Whittaker, I.A. Shelykh, M.S. Skolnick, D.N. Krizhanovskii. Light Sci. Appl., **12**, 126 (2023). DOI: 10.1038/s41377-023-01162-x
[13] W. Zawadzki, T.M. Rusin. Phys. Lett. A, **374**, 3533 (2010). DOI: 10.1016/j.physleta.2010.06.028
[14] M.I. Katsnelson. Europ. Phys. J. B, **51**, 157 (2006). DOI: 10.1140/epjb/e2006-00203-1
[15] J. Cserti, G. Dávid. Phys. Rev. B, **74**, 172305 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevB.74.172305
[16] D.O. Oriekhov, V.P. Gusynin. Phys. Rev. B, **106**, 115143 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.115143
[17] T.M. Rusin, W. Zawadzki. Phys. Rev. B, **88**, 235404 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.235404
[18] P. Reck, C. Gorini, K. Richter. Phys. Rev. B, **101**, 094306 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.094306
[19] V. Junk, P. Reck, C. Gorini, K. Richter. Phys. Rev. B, **101**, 134302 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.134302
[20] E.I. Kukhar, S.V. Kryuchkov. Physica E, **167**, 116164 (2025). DOI: 10.1016/j.physe.2024.116164
[21] T.M. Rusin, W. Zawadzki. Phys. Rev. B, **76**, 195439 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.195439
[22] Е.И. Кухарь, С.В. Крючков, Н.А. Иванов. Изв. РАН Сер. Физ., **88** (2), 264 (2024). DOI: 10.31857/S0367676524020177 [E.I. Kukhar, S.V. Kryuchkov, N.A. Ivanov. Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., **88** (2), 233 (2024). DOI: 10.1134/S1062873823705299]
[23] Q. Wang, R. Shen, L. Sheng, B.G. Wang, D.Y. Xing. Phys. Rev. A, **89**, 022121 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevA.89.022121
[24] J. Luan, S. Li, T. Ma, L.-G. Wang. J. Phys. Condens. Matter, **30**, 395502 (2018). DOI: 10.1088/1361-648X/aadbe0
[25] A. Kamal, A. Jellal. Physica E, **125**, 114193 (2021). DOI: 10.1016/j.physe.2020.114193
[26] П.В. Ратников. Письма в ЖЭТФ, **90**, 515 (2009). [P.V. Ratnikov. JETP Lett., **90**, 469 (2009). DOI: 10.1134/S0021364009180143]
[27] M. Barbier, P. Vasilopoulos, F.M. Peeters. Phys. Rev. B, **80**, 205415 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevB.80.205415
[28] S.V. Kryuchkov, E.I. Kukhar. Physica E, **46**, 25 (2012). DOI: 10.1016/j.physe.2012.08.014
[29] V. Krueckl, K. Richter. Phys. Rev. B, **85**, 115433 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevB.85.115433
[30] I.S.F. Bezerra, J.R.F. Lima. Physica E, **123**, 114171 (2020). DOI: 10.1016/j.physe.2020.114171
[31] D.E. Fernandes. Phys. Rev. B, **107**, 085119 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevB.107.085119
[32] J. Seffadi, A. Jellal, P. Díaz, D. Laroze. Comput. Mater. Sci., **258**, 114018 (2025). DOI: 10.1016/j.commatsci.2025.114018
[33] A. Akturk, N. Goldsman. J. Appl. Phys., **103**, 053702 (2008). DOI: 10.1063/1.2890147
[34] J.-H. Chen, C. Jang, S. Xiao, M. Ishigami, M.S. Fuhrer. Nature Nanotech., **3**, 206 (2008). DOI: 10.1038/nnano.2008.58
[35] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Phys. Rev. B, **77**, 195412 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevB.77.195412
[36] W. Zawadzki, T.M. Rusin. J. Phys. Condens. Matter, **23**, 143201 (2011). DOI: 10.1088/0953-8984/23/14/143201
[37] A. Santacruz, P.E. Iglesias, R. Carrillo-Bastos, F. Mireles. Phys. Rev. B, **105**, 205405 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.105.205405
[38] J.A. Briones-Torres, J. Madrigal-Melchor, J.C. Martínez-Orozco, I. Rodríguez-Vargas. Superlattices Microstruct., **73**, 98 (2014). DOI: 10.1016/j.spmi.2014.05.028
[39] C. Forsythe, X. Zhou, K. Watanabe, T. Taniguchi, A. Pasupathy, P. Moon, M. Koshino, P. Kim, C.R. Dean. Nature Nanotech., **13**, 566 (2018). DOI: 10.1038/s41565-018-0138-7
[40] A.I. Berdyugin, N. Xin, H. Gao, S. Slizovskiy, Z. Dong, S. Bhattacharjee, P. Kumaravadivel, S. Xu, L.A. Ponomarenko, M. Holwill, D.A. Bandurin, M. Kim, Y. Cao, M.T. Greenaway, K.S. Novoselov, I.V. Grigorieva, K. Watanabe, T. Taniguchi, V.I. Fal'ko, L.S. Levitov, R.K. Kumar, A.K. Geim. Science, **375**, 430 (2022). DOI: 10.1126/science.abi8627

[41] S. Dubey, V. Singh, A.K. Bhat, P. Parikh, S. Grover, R. Sensarma, V. Tripathi, K. Sengupta, M.M. Deshmukh. Nano Lett., **13**, 3990 (2013). DOI: 10.1021/nl4006029
[42] R. Huber, M.-H. Liu, S.-C. Chen, M. Drienovsky, A. Sandner, K. Watanabe, T. Taniguchi, K. Richter, D. Weiss, J. Eroms. Nano Lett., **20**, 8046 (2020). DOI: 10.1021/acs.nanolett.0c03021
[43] J. Luan, K. Guo, S. Li, T. Ma, L.-G. Wang, H.-Q. Lin. Phys. Lett. A, **409**, 127510 (2021). DOI: 10.1016/j.physleta.2021.127510
[44] L.A. Ponomarenko, R.V. Gorbachev, G.L. Yu, D.C. Elias, R. Jalil, A.A. Patel, A. Mishchenko, A.S. Mayorov, C.R. Woods, J.R. Wallbank, M. Mucha-Kruczynski, B.A. Piot, M. Potemski, I.V. Grigorieva, K.S. Novoselov, F. Guinea, V.I. Fal'ko, A.K. Geim. Nature, **497**, 594 (2013). DOI: 10.1038/nature12187
[45] S. Cao, M. Chen, J. Zeng, N. Ma, R. Zheng, Y. Feng, S. Yan, J. Liu, K. Watanabe, T. Taniguchi. 2D Mater., **10**, 025016 (2023). DOI: 10.1088/2053-1583/acbdaa
[46] A.L. Vazquez de Parga, F. Calleja, B. Borca, M.C.G. Passeggi, Jr., J.J. Hinarejos, F. Guinea, R. Miranda. Phys. Rev. Lett., **100**, 056807 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.056807
[47] H. Yan, Z.-D. Chu, W. Yan, M. Liu, L. Meng, M. Yang, Y. Fan, J. Wang, R.-F. Dou, Y. Zhang, Z. Liu, J.-C. Nie, L. He. Phys. Rev. B, **87**, 075405 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.075405
[48] Y. Zhang, Y. Kim, M.J. Gilbert, N. Mason. npj 2D Mater Appl., **2**, 31 (2018). DOI: 10.1038/s41699-018-0076-0
[49] Z. Sun, C.L. Pint, D.C. Marcano, C. Zhang, J. Yao, G. Ruan, Z. Yan, Y. Zhu, R.H. Hauge, J.M. Tour. Nat. Commun., **2**, 559 (2011). DOI: 10.1038/ncomms1577
[50] Л.А. Чернозатонский, П.Б. Сорокин, Е.Э. Белова, Й. Брюнинг, А.С. Федоров. Письма в ЖЭТФ, **85**, 84 (2007). [L.A. Chernozatonskiĭ, P.B. Sorokin, E.É. Belova, J. Brüning, A.S. Fedorov. JETP Lett., **85**, 77 (2007). DOI: 10.1134/S002136400701016X]
[51] L.A. Chernozatonskii, P.B. Sorokin, J.W. Brüning. Appl. Phys. Lett., **91**, 183103 (2007). DOI: 10.1063/1.2800889
[52] A. Sandner, T. Preis, C. Schell, P. Giudici, K. Watanabe, T. Taniguchi, D. Weiss, J. Eroms. Nano Lett., **15**, 8402 (2015). DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b04414
[53] S. Jia, J. Wang, G. Yang, Y. Yang, C. Bai. Physica E, **45**, 146 (2012). DOI: 10.1016/j.physe.2012.07.016
[54] E.I. Kukhar, S.V. Kryuchkov, N.A. Ivanov. Phys. Lett. A, **565**, 131135 (2026). DOI: 10.1016/j.physleta.2025.131135
[55] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, C.F. Roos. Nature, **463**, 68 (2010). DOI: 10.1038/nature08688
[56] T.M. Rusin, W. Zawadzki. J. Phys. Condens. Matter, **26**, 215301 (2014). DOI: 10.1088/0953-8984/26/21/215301
[57] I.R. Lavor, D.R. da Costa, A. Chaves, S.H.R. Sena, G.A. Farias, B. Van Duppen, F.M. Peeters. J. Phys. Condens. Matter, **33**, 095503 (2021). DOI: 10.1088/1361-648X/abcd7f
[58] А. Снайдер, Д. Лав. *Теория оптических волноводов* (Радио и связь, М., 1987) [A.W. Snyder, J.D. Love. *Optical Waveguide Theory* (Chapman and Hall, London, 1983)]
[59] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции* (Наука, М., 1974), т. 2, с. 15. [H. Bateman, A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions* (MC Grow-Hill Book Company, NY.–Toronto–London, 1953), v. 2.]