03

Построение и исследование электростатической T-матрицы и поляризуемости для частиц со сфероидальными и сферическими границами слоев

© В.Г. Фарафонов[1], Г.Ю. Беспятый[1], В.Б. Ильин[1,2,3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Санкт-Петербург, Россия
[3] Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: far@guap.ru

Поступила в редакцию 14.03.2026 г.
В окончательной редакции 26.03.2026 г.
Принята к публикации 26.03.2026 г.

Решена электростатическая задача для многослойной частицы, имеющей сферические или несофокусные сфероидальные границы слоев, расположенные в произвольном порядке. Скалярные потенциалы в окрестности границ слоев раскладывались соответственно по сферическому или сфероидальному базисам, и разложения потенциалов в каждом слое сшивались, используя разложения сфероидальных функций по сферическим и наоборот. Методом расширенных граничных условий со сфероидальным базисом (были использованы 2 схемы этого метода) получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения неизвестных полей. Решение проблемы сформулировано в виде T-матрицы, что удобно при рассмотрении ансамблей частиц. Показано, что полученная T-матрица должна быть симметричной, что является важным для контроля точности вычислений. В данной работе релеевское приближение, которое хорошо известно для софокусных сфероидов, распространяется на существенно более широкий класс частиц при учете того, что элемент T-матрицы T_{11} прямо пропорционален поляризуемости частицы. В частном случае двухслойных сфероидальных частиц со сферическим ядром, рассмотренном ранее, проведенные расчеты показали высокую эффективность предлагаемого решения электростатической задачи.

Ключевые слова: приближение Релея, электростатика, слоистые сфероиды, T-матрица, поляризуемость частиц.

DOI: 10.61011/OS.2026.04.63019.9248-25

Введение

Рассеяние света частицами, размер которых много меньше длины волны падающего излучения, является важной частью многих оптических исследований. Простое приближение Релея–Ганса [1,2] однородных эллипсоидальных частиц многие десятилетия было удобным средством для подобных приложений теории рассеяния света. Данное приближение многократно уточнялось [3]. Базируясь на электростатическом приближении, при котором волновое число равно нулю, приближение Релея–Ганса было распространено на эллипсоиды с оболочкой, в которых границы слоев являются софокусными [4].

Электростатическое приближение также развивалось, исходя из нужд современных исследований [5]. В частности, используя метод расширенных граничных условий (extended boundary condition method, EBCM) со сферическим базисом и аппарат T-матриц [6], развитые в статьях группы проф. E.C. Le [3], в работе [7] было предложено улучшенное электростатическое приближение.

Однако применение такого подхода даже к слоистым сфероидам крайне ограничено. В работе [8] было показано, что при использовании EBCM со сферическим базисом задача разрешима только при выполнении условия $a_i/b_i \leq \sqrt{2}+1$ для всех поверхностей, кроме ядра, отношение полуосей которого может быть любым. Инструментарий, который позволил получить данный результат, изложен в статьях [9,10] для сферического и сфероидального базисов соответственно. В работе [11] это утверждение было подтверждено численно для двухслойных софокусных сфероидов, явное решение для которых дает применение сфероидального базиса. Таким образом, для решения электростатических задач для многослойных частиц с несофокусными сфероидальными границами слоев следует использовать подход, максимально учитывающий геометрию задачи.

Настоящая работа посвящена решению электростатических задач для многослойных частиц со сферическими и сфероидальными границами слоев, расположенных в произвольном порядке. Ранее были рассмотрены частные случаи слоистых сфероидов [12], а также двухслойных сфероидов со сферическим ядром [13]. Ниже предлагается единый подход к построению T-матрицы и поляризуемости для любых указанных выше многослойных частиц, включающий две схемы вывода поверхностных интегральных уравнений при реализации метода EBCM. Характерным моментом предлагаемого решения является представление полей вблизи границы слоя в виде разложения либо по сфероидальным, либо по сферическим гармоникам, что позволяет в максимальной степени учесть геометрию частиц. После алгебраизации систем интегральных уравнений они решаются в явном виде в силу учета геометрии для каждой границы раздела сред. Затем проводится операция сшивки двух разложений для одного слоя. В результате переходные матрицы, связывающие соответствующие разложения, представляют собой бесконечномерные матрицы, за исключением случая софокусных границ слоя. Таким образом построенная T-матрица имеет наиболее простой вид. Большую роль играет основной элемент T_{11}, который с точностью до множителя $\frac{4\pi}{3}$ совпадает с поляризуемостью частицы. Затем рассматриваются свойства T-матрицы, а именно ее симметричность и зависимость элементов от размера слоистой частицы. Анализируется связь между T-матрицами, построенными в сферическом и сфероидальном базисах. Симметричность рассматриваемых T-матриц, а также совпадение поляризуемостей (или основного элемента T_{11}), рассчитанных в разных схемах, служит хорошей проверкой достоверности проводимых численных расчетов Анализ результатов численных расчетов, полученных ранее для частных случаев, показывает высокую эффективность данного подхода по сравнению со стандартным EBCM независимо от степени вытянутости или сплюснутости слоев рассматриваемых частиц.

Постановка задачи

Электростатические задачи обычно решаются с помощью скалярных потенциалов Φ, градиент которых дает напряженность электрического поля [4,14]:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{1}$$

Сначала сформулируем задачу в случае двухслойной частицы. Для потенциалов Φ_i^j введем два индекса, где верхний $j = 1, 2, 3$ указывает на потенциал поля вне частицы, внутри оболочки и ядра соответственно. Нижний индекс принимает значение $i = 1$ для регулярной части, не имеющей особенностей в начале координат, и значение $i = 2$ для иррегулярной части, которая убывает к нулю на бесконечности и имеет особенность в начале координат.

Обозначим потенциал поля вне частицы как $\Phi^1 = \Phi_1^1 + \Phi_2^1$, где Φ_1^1 — потенциал постоянного внешнего поля, Φ_2^1 — потенциал „рассеянного“ поля, возникающего из-за поляризации частицы. Потенциал поля внутри оболочки также представляется в виде суммы двух слагаемых: $\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2$, где первая часть (Φ_1^2) соответствует регулярному полю, а вторая (Φ_2^2) — иррегулярному. Наконец, из физических соображений поле внутри ядра описывается только регулярной составляющей: $\Phi^3 = \Phi_1^3$, так как не имеет особенностей $(\Phi_2^3 \equiv 0)$.

Из уравнений Максвелла следует, что скалярные потенциалы Φ_i^j являются решениями уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi_i^j = 0, \tag{2}$$

так как в электростатике волновое число $k = 0$. При рассмотрении волновых процессов приближение Релея, базирующееся на решении электростатической задачи, правомерно использовать, если размер частицы много меньше длины волны излучения. В электростатике граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и нормальных составляющих электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ на поверхностях раздела сред [4,14]. Для потенциалов соответствующие условия можно записать следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_1^j + \Phi_2^j \quad &= \Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1}, \\ \varepsilon_j \frac{\partial(\Phi_1^j + \Phi_2^j)}{\partial n_j} \quad &= \varepsilon_{j+1} \frac{\partial(\Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1})}{\partial n_j}, \end{aligned}\right\}_{\mathbf{r}\in S_j} \tag{3}$$

где $j = 1, 2$. Здесь $\frac{\partial}{\partial n_j}$ — производные вдоль внешних нормалей к поверхностям частицы S_1 и ядра S_2, а $\varepsilon_j, \varepsilon_{j+1}$ — диэлектрические проницаемости j-й и $(j+1)$-й сред, которые разделены поверхностью S_j.

Уравнения (1)−(3) представляют собой постановку задачи в дифференциальной форме. Ее можно использовать, например, для решения задачи методом разделения переменных [15]. В то же время чаще применяют иной подход, который формулируется как система поверхностных интегральных уравнений и называется методом расширенных граничных условий (EBCM) [8].

Фундаментом для получения постановки задачи в виде поверхностных интегральных уравнений служат соотношения, аналогичные тождествам Стреттона−Чу [16]. Для регулярных (Φ_1^j, Φ_1^{j+1}) и иррегулярных (Φ_2^j, Φ_2^{j+1}) потенциалов эти соотношения, связанные с поверхностью S_j, могут быть записаны следующим образом:

$$\int\limits_{S_j} \left\{ \Phi_1^{j,(j+1)}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_j} - \frac{\partial \Phi_1^{j,(j+1)}(\mathbf{r}')}{\partial n'_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds'$$

$$= \begin{cases} -\Phi_1^{j,(j+1)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_j, \\ 0, & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j, \end{cases} \tag{4}$$

$$\int\limits_{S_j} \left\{ \Phi_2^{j,(j+1)}(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_j} - \frac{\partial \Phi_2^{j,(j+1)}(\mathbf{r}')}{\partial n'_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds'$$

$$= \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in D_j, \\ \Phi_2^{j,(j+1)}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j, \end{cases} \tag{5}$$

где D_j — область, занимаемая частицей ($j = 1$) или ядром ($j = 2$), $\bar{D}_j$ — замыкание D_j. При этом как выше, так и далее используется одна и та же функция Грина скалярного уравнения Лапласа

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{6}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы точек наблюдения и интегрирования.

Суммируя уравнение (4) для потенциала Φ_1^j и уравнение (5) для потенциала Φ_2^j, получим

$$\int\limits_{S_j} \left\{ (\Phi_1^j(\mathbf{r}') + \Phi_2^j(\mathbf{r}')) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_j'} - \frac{\partial(\Phi_1^j(\mathbf{r}') + \Phi_2^j(\mathbf{r}'))}{\partial n_j'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\Phi_1^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_j, \\ \Phi_2^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j \end{cases} \tag{7}$$

и, учитывая граничные условия (3) на поверхности S_j, получим следующие уравнения:

$$\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right) \int\limits_{S_j} \left\{ \frac{\partial(\Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}') + \Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}')}{\partial n_j'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} ds' = \begin{cases} -\Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}) + \Phi_1^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_j, \\ -\Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}) - \Phi_2^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j. \end{cases} \tag{8}$$

Теперь для решения электростатической задачи имеются два уравнения, связанные с поверхностью частицы S_1, т. е. при $j = 1$, и два уравнения, связанные с поверхностью ядра S_2, т. е. при $j = 2$, для определения четырех неизвестных потенциалов. Отметим, что в последнем случае соответствующие уравнения упрощаются, так как потенциал $\Phi_2^3 \equiv 0$.

Существует другая схема построения системы интегральных уравнений, основанная на исключении в левой части потенциалов полей внутри частицы и внутри ядра. Сначала в уравнениях для потенциалов Φ_1^{j+1}, Φ_2^{j+1}, аналогичных уравнениям (7), исключим эти потенциалы с учетом граничных условий (3) В результате получим уравнения для потенциалов Φ_1^j, Φ_2^j:

$$\int\limits_{S_j} \left\{ (\Phi_1^j(\mathbf{r}') + \Phi_2^j(\mathbf{r}')) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_j'} - \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j+1}} \frac{\partial(\Phi_1^j(\mathbf{r}') + \Phi_2^j(\mathbf{r}'))}{\partial n_j'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_j, \\ \Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j. \end{cases} \tag{9}$$

Далее умножим уравнения на $\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}$ и точно так же, как выше, применим тождества (7). В результате получим

$$\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} - 1\right) \int\limits_{S_j} \left\{ \left(\Phi_1^j(\mathbf{r}') + \Phi_2^j(\mathbf{r}')\right) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'_j} \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}) + \Phi_1^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D_j, \\ \frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j} \Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}) - \Phi_2^j(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in R^3 \diagdown \bar{D}_j. \end{cases} \tag{10}$$

Теперь имеются два уравнения, связанные с поверхностью частицы S_1, относительно потенциалов Φ_2^1, Φ_1^2, Φ_2^2 (потенциал внешнего поля Φ_1^1 известен) и одно уравнение, связанное с поверхностью ядра S_2 вне поверхности, относительно потенциалов Φ_1^2, Φ_2^2 (потенциал $\Phi_2^3 \equiv 0$). Таким образом, для определения трех неизвестных потенциалов используются три интегральных уравнения. В этом случае достаточно рассматривать поля вне ядра. Четвертое уравнение можно использовать для определения потенциала внутри ядра Φ_1^3. Обобщение поставленной задачи на трехслойные частицы сводится к увеличению диапазона значений j на 1, а именно $j = 1, 2, 3$ в формулах (3)–(10), начиная с внешней поверхности частицы. Для n-слойной частицы в указанных формулах $j = 1, 2, \ldots, n$.

Сфероидальные и сферические базисы

Рассматриваемые многослойные частицы могут иметь как сферические, так и сфероидальные поверхности оболочки и ядра, но у этих поверхностей должны быть единые центр и ось симметрии. Используемые далее сферическая (r, θ, φ) и сфероидальная (ξ, η, φ) системы координат связаны с декартовой системой (x, y, z) стандартным образом [17]:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi = \frac{d}{2}[(\xi^2 - f)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi = \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1 - \eta^2)\right]^{1/2} \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta = \frac{d}{2}\,\xi\,\eta, \end{aligned} \tag{11}$$

где d — фокусное расстояние. Параметр $f = 1$ для вытянутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [1, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$; $f = -1$ для сплюснутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [0, \infty)$, $\eta \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Используемые ниже базисы состоят из гармоник [14], которые являются решениями уравнения Лапласа (2):

а) в сферической системе

$$\begin{matrix} \Upsilon_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ \Upsilon_{ml}^{(2)}(\mathbf{r}) \end{matrix} = \begin{matrix} r^l \\ \frac{1}{2l+1} r^{-(l+1)} \end{matrix} \upsilon_{ml}(\theta, \varphi),$$

$$\upsilon_{ml}(\theta, \varphi) = \begin{matrix} \upsilon_{mle}(\theta, \varphi) \\ \upsilon_{mlo}(\theta, \varphi) \end{matrix} = \bar{P}_l^m(\cos\theta) \sqrt{\frac{2 - \delta_m^0}{2\pi}} \begin{matrix} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{matrix} \tag{12}$$

b) в вытянутой сфероидальной системе

$$\begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)} & (d, \mathbf{r}) \\ \Psi_{ml}^{(2)} & (d, \mathbf{r})\end{matrix} = \begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(d, \xi, \eta, \varphi) \\ \Psi_{ml}^{(2)}(d, \xi, \eta, \varphi)\end{matrix}$$

$$= \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{l} P_l^m(\xi)}{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{d}{2}\right)^{-(l+1)} Q_l^m(\xi)} \psi_{ml}(\eta, \varphi)$$

$$\psi_{ml}(\eta\varphi)(\eta, \varphi) = \begin{matrix}\psi_{mle}(\eta, \varphi) \\ \psi_{mlo}(\eta, \varphi)\end{matrix}$$

$$= \bar{P}_l^m(\eta)\sqrt{\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}} \begin{matrix}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{matrix} \tag{13}$$

c) в сплюснутой сфероидальной системе

$$\begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(-id, \mathbf{r}) \\ \Psi_{ml}^{(2)}(-id, \mathbf{r})\end{matrix} = \begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(-id, \xi, \eta, \varphi) \\ \Psi_{ml}^{(2)}(-id, \xi, \eta, \varphi)\end{matrix}$$

$$= \frac{\left(\frac{-id}{2}\right)^{l} P_l^m(i\xi)}{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{-id}{2}\right)^{-(l+1)} Q_l^m(i\xi)} \psi_{ml}(\eta, \varphi),$$

$$\psi_{ml}(\eta\varphi) = \begin{matrix}\psi_{mle}(\eta, \varphi) \\ \psi_{mlo}(\eta, \varphi)\end{matrix} = \bar{P}_l^m(\eta)\sqrt{\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}} \begin{matrix}\cos m\varphi, \\ \sin m\varphi,\end{matrix} \tag{14}$$

где $l \geq m \geq 0$ — неотрицательные целые числа, символ Кронекера $\delta_m^0 = 1$ или 0, когда $m = 0$ и $m \neq 0$ соответственно, $P_l^m(\eta)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода, а соответствующие нормированные функции равны

$$\bar{P}_l^m(\eta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\eta)$$

$$= N_{ml}^{-1}\, P_l^m(\eta). \tag{15}$$

Для функций, зависящих от угловой координаты η, вторые линейно независимые решения $Q_l^m(\eta)$ не рассматриваются, так как они имеют особенности при $\eta = \pm 1$ и не подходят по физическим соображениям.

Переход от вытянутых сфероидальных гармоник к сферическим осуществляется с помощью предельного перехода $d \to 0$, $\xi \to \infty$, при этом $\frac{d}{2}\xi \to r$. Для угловых функций достаточно $d \to 0$, при этом $\eta \to \cos\theta$. В целом для сфероидальных гармоник этот предельный переход дает следующие асимптотики:

$$\Psi_{mn}^{(1)}(d, \mathbf{r}) = C_{mn,1}\Upsilon_{ml}^{(1)}(\mathbf{r})\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)$$

$$= C_{mn,1}\Upsilon_{ml}^{(1)}(\mathbf{r})\left(1 + O(d)\right), \tag{16}$$

$$\Psi_{mn}^{(2)}(d, \mathbf{r}) = C_{mn,2}\Upsilon_{ml}^{(2)}(\mathbf{r})\left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)$$

$$= C_{mn,2}\Upsilon_{ml}^{(2)}(\mathbf{r})\left(1 + O(d)\right), \tag{17}$$

что с точностью до константы соответствует сферическому базису.

Сфероидальные угловые функции ψ_{ml} образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \psi_{mn}(\eta, \varphi)\psi_{\mu\nu}(\eta, \varphi)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi = \delta_m^\mu \delta_n^\nu, \tag{18}$$

т.е. на поверхности любого координатного сфероида Ω. Сферические угловые функции (12) также образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой (18) на любой координатной сфере при замене $\eta \longrightarrow \cos\theta$.

Для функций, зависящих от радиальных координат, используется следующее определение, отличающееся постоянным множителем от указанного в [14]:

$$P_l^m(\xi) = \left(\xi^2 - 1\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(\xi)}{d\xi^m},$$

$$Q_l^m(\xi) = \left(\xi^2 - 1\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_l(\xi)}{d\xi^m}. \tag{19}$$

Для анализа взаимосвязей между сферическими и сфероидальными гармониками удобно использовать для них соответствующие векторы $\boldsymbol{\Upsilon}_m^{(i)}(\mathbf{r}) = \left\{\Upsilon_{ml}^{(i)}(\mathbf{r})\right\}$ и $\boldsymbol{\Psi}_m^{(i)}(d, \mathbf{r}) = \left\{\Psi_{ml}^{(i)}(d, \mathbf{r})\right\}$ из соотношений (12), (13). Теперь для сферических и сфероидальных гармоник 1-го и 2-го родов можно записать матричные уравнения [12]:

$$\boldsymbol{\Psi}_m^{(i)}(d, \mathbf{r}) = \nabla_m^{(i)}(d)\boldsymbol{\Upsilon}_m^{(i)}(\mathbf{r}), \tag{20}$$

где элементы матриц перехода определяются из соотношений

$$\nabla_{nl,m}^{(1)}(d) = (-1)^{(n-l)/2}\left(\frac{d}{2}\right)^{(n-l)}$$

$$\frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l-m)!}\frac{(2n+1)N_{mn}}{(2l+1)N_{ml}}, \quad n \geq l, \tag{21}$$

$$\nabla_{nl,m}^{(2)}(d) = \left(\frac{d}{2}\right)^{(l-n)} \frac{(l-m)!}{(l-n)!!(n+l+1)!!}$$

$$\frac{(2l+1)N_{ml}}{N_{mn}}, \quad n \leq 1. \tag{22}$$

Поскольку матрица $\nabla^{(1)}(d)$ связывает полиномы степени не выше n-й, то она является нижнетреугольной, т.е. $\nabla_{nl,m}^{(1)}(d) = 0$ при $n < l$. Следует отметить, что суммирование в формуле (20) ведется по индексам, четность которых совпадает с соответствующей четностью индекса в левой части равенства.

Для сфероидальных гармоник 2-го рода матрицы перехода являются верхнетреугольными, так как для них на бесконечности справедливы оценки (17).

В случае предельного перехода $d \to 0$, $\xi \to \infty$ от сфероидальных гармоник к сферическим (16), (17) матрицы перехода (20–22) становятся диагональными:

$$\nabla^{(1)}_{nl,m}(0) = \frac{(2n-1)!!}{(n-m)!}\delta^l_n = C_{mn,1}\delta^l_n,$$

$$\nabla^{(2)}_{nl,m}(0) = \frac{(n-m)!}{(2n-1)!!}\delta^l_n = C_{mn,2}\delta^l_n. \qquad (23)$$

Итак, диагональные элементы матриц соответствуют константам $C_{mn,1}$, $C_{mn,2}$ из формул (16), (17). Отметим, что произведение этих констант равно единице: $C_{mn,1}\,C_{mn,2} = 1$.

В работе [12] показано, что для матриц перехода 1-го и 2-го родов справедливо следующее соотношение:

$$\nabla^{(1)}_m(d)\nabla^{(2)T}_m(d) = I, \qquad (24)$$

которое позволяет найти обратные матрицы

$$\left(\nabla^{(1)}_m(d)\right)^{-1} = \nabla^{(2)T}_m(d),$$

$$\left(\nabla^{(2)}_m(d)\right)^{-1} = \nabla^{(1)T}_m(d), \qquad (25)$$

где T означает транспонирование матрицы.

Если требуется найти матрицы перехода от одного сфероидального базиса к другому, связанному с несофокусной сфероидальной системой координат, то нужно сначала перейти к сферическому базису, а затем к другому сфероидальному:

$$\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(d_1,\mathbf{r}) = \nabla^{(1)}_m(d_1)\mathbf{\Upsilon}^{(1)}_m(\mathbf{r}) = \nabla^{(1)}_m(d_1)\,\left(\nabla^{(1)}_m(d_2)\right)^{-1}$$
$$\times\,\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(d_2,\mathbf{r}) = \Delta^{(1)}_m(d_1,d_2)\,\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(d_2,\mathbf{r}). \qquad (26)$$

Учитывая соотношения (25), получим

$$\Delta^{(1)}_m(d_1,d_2) = \nabla^{(1)}_m(d_1)\,\nabla^{(2)T}_m(d_2),$$

$$\Delta^{(2)}_m(d_1,d_2) = \nabla^{(2)}_m(d_1)\nabla^{(1)T}_m(d_2). \qquad (27)$$

Принимая во внимание соотношения (25) и (27), можно найти обратные матрицы:

$$\left(\Delta^{(1)}_m(d_1,d_2)\right)^{-1} = \Delta^{(1)}_m(d_2,d_1)$$

$$= \nabla^{(1)}_m(d_2)\,\nabla^{(2)T}_m(d_1) = \Delta^{(2)T}_m(d_1,d_2) \qquad (28)$$

и аналогично

$$\left(\Delta^{(2)}_m(d_1,d_2)\right)^{-1} = \Delta^{(2)}_m(d_2,d_1)$$

$$= \nabla^{(2)}_m(d_2)\nabla^{(1)T}_m(d_1) = \Delta^{(1)\,T}_m(d_1,d_2). \qquad (29)$$

Таким образом, для обращения сфероидальных матриц перехода достаточно либо поменять местами аргументы, либо транспонировать аналогичную матрицу другого рода.

В дальнейшем потребуется разложение функции Грина в сферической системе координат [14]:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_{0m})\frac{1}{2l+1}(r_<)^l(r_>)^{-(l+1)}$$
$$\times\,\bar{P}^m_l(\cos\theta)\bar{P}^m_l(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\Upsilon^{(1)}_{ml}(\mathbf{r}_<)\Upsilon^{(2)}_{ml}(\mathbf{r}_>), \qquad (30)$$

где $r_< = \min(r,r')$, $r_> = \max(r,r')$.

Аналогично разложение функции Грина для уравнения Лапласа в вытянутой сфероидальной системе координат с учетом соотношений (13) имеет вид [14]

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta^m_0)$$
$$\times\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P^m_l(\xi_<)Q^m_l(\xi_>)\bar{P}^m_l(\eta)\bar{P}^m_l(\eta')\cos m(\varphi-\varphi')$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\Psi^{(1)}_{ml}(d,\mathbf{r}_<)\;\Psi^{(2)}_{ml}(d,\mathbf{r}_>), \qquad (31)$$

где $\xi_< = \min(\xi,\xi')$, $\xi_> = \max(\xi,\xi')$.

В случае сплюснутых сфероидальных координат и гармоник нужно сделать стандартную замену $\xi \to i\xi$, $d \to -id$. В результате формулы (21), (22) будут иметь вид

$$\nabla^{(1)}_{nl,m}(-id) = \left(\frac{d}{2}\right)^{(n-l)}\frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l-m)!}\frac{(2n+1)N_{mn}}{(2l+1)N_{ml}},$$
$$n \ge l, \qquad (32)$$

$$\nabla^{(2)}_{nl,m}(-id) = \left(\frac{-id}{2}\right)^{(l-n)}\frac{(l-m)!}{(l-n)!!(n+l+1)!!}$$
$$\times\,\frac{(2l+1)N_{ml}}{N_{mn}}, \qquad n \le l. \qquad (33)$$

Остальные соотношения остаются справедливыми при указанной выше замене. Например, связь между вытянутыми и сплюснутыми гармониками записывается следующим образом:

$$\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(d_1,\mathbf{r}) = \nabla^{(1)}_m(d_1)\,\mathbf{\Upsilon}^{(1)}_m(\mathbf{r})$$
$$= \nabla^{(1)}_m(d_1)\left(\nabla^{(1)}_m(-id_2)\right)^{-1}\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(-id_2,\mathbf{r})$$
$$= \Delta^{(1)}_m(d_1,-id_2)\mathbf{\Psi}^{(1)}_m(-id_2,\mathbf{r}), \qquad (34)$$

при этом

$$\Delta^{(1)}_m(d_1,-id_2) = \nabla^{(1)}_m(d_1)\nabla^{(2)T}_m(-id_2),$$

$$\Delta^{(2)}_m(d_1,-id_2) = \nabla^{(2)}_m(d_1)\nabla^{(1)T}_m(-id_2). \qquad (35)$$

При выводе остальных формул нужно действовать аналогично.

Разложение потенциалов по гармоникам

С целью максимального учета геометрии частицы будем в окрестности сфероидальной границы потенциалы полей представлять в виде разложений по сфероидальным гармоникам, а в окрестности сферической поверхности потенциалы будем записывать в виде разложений по сферическим гармоникам. Сшивка разложений одних и тех же потенциалов внутри оболочки частицы осуществляется с помощью связей между сфероидальными и сферическими гармониками, изложенных в предыдущем разделе.

Сфероидальная поверхность в соответственно выбранной сфероидальной системе является координатной, поэтому ее уравнение имеет вид

$$\xi = \xi_0, \tag{36}$$

в то время как уравнение сферической поверхности в сферической системе записывается следующим образом:

$$r = r_0. \tag{37}$$

В электростатической (как и волновой) задаче для осесимметричных частиц можно провести разделение относительно азимутального угла [18], т.е. задача решается независимо для каждого слагаемого обобщенного ряда Фурье по азимутальному углу φ.

При вертикальной ориентации внешнего поля соответствующие потенциалы не зависят от азимутального угла, поэтому здесь индекс $m = 0$, а при горизонтальной ориентации используются только члены с индексом $m = 1$, что ниже будет учтено при суммировании по индексу m.

Регулярный и иррегулярный потенциалы в окрестности внешней поверхности частицы будем представлять в виде разложений по сфероидальным или сферическим гармоникам:

$$\begin{matrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_2^1 \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \begin{matrix} a_{1,ml}^{(1)} \Phi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{1,ml}^{(1)} \Phi_{ml}^{(2)}(\mathbf{r}), \end{matrix} \tag{38}$$

где базисными функциями являются либо сфероидальные гармоники $\Phi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) = \Psi_{ml}^{(1)}(d, \xi, \eta, \varphi)$, либо сферические $\Phi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) = \Upsilon_{ml}^{(1)}(r, \theta, \varphi)$ в зависимости от типа поверхности, а штрих означает, что с учетом свойств четности суммирование нужно вести только по нечетным индексам l. Заметим, что здесь речь идет о потенциалах внешнего и „рассеянного" излучений. Далее аналогичные обозначения будут использоваться для разложений потенциалов в оболочке и ядре, при этом они не зависят от показателя преломления и отличаются только родом радиальных функций.

Если единичное внешнее поле направлено вдоль или перпендикулярно оси симметрии сфероида, то в соответствующих рядах (38) отличны от нуля только коэффициенты

$$a_{01}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \quad \text{или} \quad a_{11}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \tag{39}$$

соответственно.

Для поля внутри оболочки в окрестности внешней поверхности соответствующие потенциалы представляются в виде

$$\begin{matrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \begin{matrix} a_{1,ml}^{(2)} & \Phi_{1,ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{1,ml}^{(2)} & \Phi_{1,ml}^{(2)}(\mathbf{r}). \end{matrix} \tag{40}$$

Потенциалы полей во внешней окрестности поверхности ядра частицы могут быть представлены в виде

$$\begin{matrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \begin{matrix} a_{2,ml}^{(2)} & \Phi_{2,ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{2,ml}^{(2)} & \Phi_{2,ml}^{(2)}(\mathbf{r}). \end{matrix} \tag{41}$$

Разные обозначения для базисных функций в окрестностях внешней и внутренней поверхностей оболочки указывают на то, что они могут быть либо сферическими, либо сфероидальными гармоникам (12)–(14).

Наконец, потенциал поля внутри ядра имеет вид

$$\Phi_1^3 = \sum\nolimits_{l=1}' a_{ml}^{(3)} \Phi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}). \tag{42}$$

Проведем сшивку разложений (40) и (41), используемых внутри оболочки для одних и тех же потенциалов. Предположим, что внешняя поверхность оболочки является вытянутой сфероидальной, а внутренняя — сферической. В этом случае, учитывая уравнения (20)–(25), получим

$$\begin{matrix} \Phi_1^2 \\ \Phi_2^2 \end{matrix} = \sum_{l=1}^{\infty}{}' \begin{matrix} a_{1,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{1,ml}^{(2)} \Psi_{ml}^{(2)}(\mathbf{r}) \end{matrix}$$

$$= \sum_{l=1} \begin{matrix} a_{1,ml}^{(2)} \sum\limits_{n=1}{}' \nabla_{ln,m}^{(1)}(d)\, \Upsilon_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{1,ml}^{(2)} \sum\limits_{n=1}{}' \nabla_{ln,m}^{(2)}(d)\, \Upsilon_{mn}^{(2)}(\mathbf{r}) \end{matrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}' \begin{matrix} a_{2,mn}^{(2)} \Upsilon_{mn}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ b_{2,mn}^{(2)} \Upsilon_{mn}^{(2)}(\mathbf{r}). \end{matrix} \tag{43}$$

В матричном виде с учетом соотношений между вытянутыми сфероидальными и сферическими гармониками (25) имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{(1)\,T}(d) & 0 \\ 0 & \nabla^{(2)\,T}(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

При обращении данного матричного уравнения с учетом свойств матриц перехода получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{(2)}(d) & 0 \\ 0 & \nabla^{(2)T}(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где использованы векторы коэффициентов разложений и транспонированные матрицы.

В случае внешней сферической поверхности и внутренней сфероидальной после аналогичных преобразований получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{(2)}(d) & 0 \\ 0 & \nabla^{(1)}(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} \tag{46}$$

и

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{(1)T}(d) & 0 \\ 0 & \nabla^{(2)T}(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

т.е. по сравнению с предыдущим случаем матрицы перехода поменялись местами.

Если внешняя поверхность рассматриваемого слоя является сплюснутой сфероидальной, то в соотношениях $(43)-(45)$ достаточно сделать замену $d \to -id$. Обобщая полученный результат на все возможные случаи, получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_m^{(1)T}(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}^{(2)T}(s_1 s_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

и

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\nabla}_m^{(2)}(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}^{(1)}(s_1 s_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

где использованы единые обозначения для вытянутых сфероидов $s_i = d_i$, для сплюснутых сфероидов $s_i = -id_i$, для слоя сфероидальная — сферическая поверхность $\tilde{\Delta}_m^{(1)T}(s_1, 0) = \nabla^{(1)T}(s_1)$ и, наконец, сферическая — сфероидальная поверхность $\tilde{\Delta}_m^{(1)T}(0, s_2) = \nabla^{(2)}(s_2)$.

Построение и исследование T-матриц

Рассмотрим электростатическую задачу более подробно для двухслойных частиц разных видов, используя две схемы метода EBCM. В заключение этого раздела исследуем свойства построенных T-матриц.

Метод EBCM: 1-я схема

Для алгебраизации интегральных уравнений на поверхности частицы подставим в систему (8) разложения потенциалов и функции Грина в системе координат, соответствующей внешней поверхности. В результате в силу ортогональности базисных функций получим

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(1)} &= A_{21}^{(1)}\mathbf{a}_1^{(2)} + A_{22}^{(1)}\mathbf{b}_1^{(2)}, \\ \mathbf{b}^{(1)} &= A_{11}^{(1)}\mathbf{a}_1^{(2)} + A_{12}^{(1)}\mathbf{b}_1^{(2)}. \end{cases} \tag{50}$$

Аналогично, для ядра частицы используя разложения потенциалов и функции Грина, получим

$$\begin{cases} \mathbf{a}_2^{(2)} = A_{21}^{(2)}\mathbf{a}^{(3)}, \\ \mathbf{b}_2^{(2)} = A_{11}^{(2)}\mathbf{a}^{(3)}. \end{cases} \tag{51}$$

Выше были введены векторы $\mathbf{a}_i^{(j)} = \left\{a_{ml}^j\right\}_m^\infty$, $\mathbf{b}_i^{(j)} = \left\{b_{ml}^j\right\}_m^\infty$ и диагональные матрицы

$$A_{21}^{(1)} = \left\{\delta_l^n + (\varepsilon_2 - 1)L_{nn,m}^{1,21}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{22}^{(1)} = \left\{(\varepsilon_2 - 1)L_{nn,m}^{1,22}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{11}^{(1)} = \left\{-(\varepsilon_2 - 1)L_{nn,m}^{1,11}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{12}^{(1)} = \left\{\delta_l^n - (\varepsilon_2 - 1)L_{nn,m}^{1,12}\right\}_m^\infty. \tag{52}$$

Здесь использовано обозначение для интегралов

$$L_{nl,m}^{1,ki} = \int\limits_{S_1} \Phi_{mn}^{(k)}(\bar{r}) \frac{\partial \Phi_{ml}^{(i)}(\bar{r})}{\partial n} \mathrm{d}s. \tag{53}$$

Данные матрицы являются диагональными в силу ортогональности угловых функций (18). Отметим, что для системы (50) можно использовать определитель

$$det = A_{21}^{(1)}A_{12}^{(1)} - A_{11}^{(1)}A_{22}^{(1)} = \varepsilon_2, \tag{54}$$

так как свойства систем с диагональными матрицами аналогичны свойствам обычных систем с линейными алгебраическими уравнениями. Для второй системы, подставляя соответствующие гармоники и интегрируя по поверхности ядра, получим аналогичные матрицы.

Окончательно с учетом соотношений $(12)-(14)$ матричные элементы для различных видов поверхностей легко найти в явном виде. Например, для разных внешних поверхностей двухслойной частицы получим:

а) вытянутая сфероидальная

$$\begin{aligned} (A_{21}^{(1)})_{nn} =& 1 + (\varepsilon_2 - 1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ & ((\xi_0)^2 - 1)P_n^{m'}(\xi_0)Q_n^m(\xi_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_{22}^{(1)})_{nn} =& (\varepsilon_2 - 1)\left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)^2 \left(\frac{d}{2}\right)^{-(2n+1)} \\ & \times ((\xi_0)^2 - 1)Q_n^{m'}(\xi_0)Q_n^m(\xi_0), \end{aligned}$$

$$(A_{11}^{(1)})_{nn} = -(\varepsilon_2 - 1)\left(\frac{d}{2}\right)^{2n+1}((\xi_0)^2 - 1)P_n^{m'}(\xi_0)P_n^m(\xi_0),$$

$$(A_{12}^{(1)})_{nn} = 1 - (\varepsilon_2 - 1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}((\xi_0)^2 - 1)Q_n^{m'}(\xi_0)P_n^m(\xi_0), \tag{55}$$

б) сплюснутая сфероидальная

$$(A_{21}^{(1)})_{nn} = 1 - (\varepsilon_2 - 1)\left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)$$
$$((\xi_0)^2 + 1)P_n^{m'}(i\xi_0)Q_n^m(i\xi_0),$$
$$(A_{22}^{(1)})_{nn} = -(\varepsilon_2 - 1)\left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)^2\left(\frac{-id}{2}\right)^{-(2n+1)}$$
$$\times ((\xi_0)^2 + 1)Q_n^{m'}(i\xi_0)Q_n^m(i\xi_0),$$
$$(A_{11}^{(1)})_{nn} = (\varepsilon_2 - 1)\left(\frac{-id}{2}\right)^{2n+1}$$
$$\times ((\xi_0)^2 + 1)P_n^{m'}(i\xi_0)P_n^m(i\xi_0),$$
$$(A_{12}^{(1)})_{nn} = 1 + (\varepsilon_2 - 1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$
$$\times ((\xi_0)^2 + 1)Q_n^{m'}(i\xi_0)P_n^m(i\xi_0), \qquad (56)$$

в) сферическая

$$(A_{21}^{(1)})_{nn} = 1 + (\varepsilon_2 - 1)\frac{n}{2n+1},$$
$$(A_{22}^{(1)})_{nn} = -(\varepsilon_2 - 1)\frac{n+1}{2n+1}(r_0)^{-(2n+1)},$$
$$(A_{11}^{(1)})_{nn} = -(\varepsilon_2 - 1)\frac{n}{2n+1}(r_0)^{2n+1},$$
$$(A_{12}^{(1)})_{nn} = 1 + (\varepsilon_2 - 1)\frac{n+1}{2n+1}. \qquad (57)$$

Выше для проверки во всех трех случаях можно использовать равенство (54). Матричные элементы для ядра нетрудно найти из приведенных выше соотношений, выбирая только две из четырех матриц.

Общую систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(1)} = A_1\mathbf{a}^{(3)}, \\ \mathbf{b}^{(1)} = A_2\mathbf{a}^{(3)}, \end{cases} \qquad (58)$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_m^{(2)}(s_1, s_2) & 0 \\ 0 & \tilde{\Delta}_m^{(1)}(s_1, s_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{21}^{(2)} \\ A_{11}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad (59)$$

и равны

$$A_1 = \left(A_{21}^{(1)}\tilde{\Delta}^{(2)}A_{21}^{(2)} + A_{22}^{(1)}\tilde{\Delta}^{(1)}A_{11}^{(2)}\right),$$
$$A_2 = \left(A_{11}^{(1)}\tilde{\Delta}^{(2)}A_{21}^{(2)} + A_{12}^{(1)}\tilde{\Delta}^{(1)}A_{11}^{(2)}\right). \qquad (60)$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты разложения потенциала „рассеянного“ излучения, а именно

$$\mathbf{b}^{(1)} = A_2(A_1)^{-1}\mathbf{a}^{(1)} = T\mathbf{a}^{(1)}. \qquad (61)$$

Ранее была найдена связь между T-матрицей и поляризуемостью частицы [18]. Например, при ориентации внешнего поля перпендикулярно и параллельно оси вращения частицы имеем

$$\alpha_x = \alpha_y = -\frac{4\pi}{3}\frac{b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\frac{4\pi}{3}T_{11},$$
$$\alpha_z = -\frac{4\pi}{3}\frac{b_{01}^{(1)}}{a_{01}^{(1)}} = -\frac{4\pi}{3}T_{11}. \qquad (62)$$

Таким образом, для приближения Релея требуется только один элемент этой матрицы — T_{11}. Для полного решения электростатической задачи требуется вся T-матрица.

Метод EBCM: 2-я схема

Здесь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) для неизвестных коэффициентов получают аналогичным образом из системы (10)

$$\begin{cases} \varepsilon_2\mathbf{a}_1^{(2)} = B_{21}^{(1)}\mathbf{a}^{(1)} + B_{22}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}, \\ \varepsilon_2\,\mathbf{b}_1^{(2)} = B_{11}^{(1)}\mathbf{a}^{(1)} + B_{12}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}. \end{cases} \qquad (63)$$

Отметим, данная система может быть получена при решении (50) с учетом определителя (54). Аналогично для ядра частицы используются разложения потенциалов и функции Грина, получим

$$\begin{cases} \varepsilon_3\mathbf{a}_1^{(3)} = B_{21}^{(2)}\mathbf{a}_2^{(2)} + B_{22}^{(2)},\mathbf{b}_2^{(2)}, \\ 0 = B_{11}^{(2)}\mathbf{a}_2^{(2)} + B_{12}^{(2)}\mathbf{b}_2^{(2)}, \end{cases} \qquad (64)$$

где первое уравнение системы (64) полезно только для определения коэффициентов поля внутри ядра $\mathbf{a}_1^{(3)}$. Выше были введены матрицы

$$B_{21}^{(1)} = \left\{\delta_l^n - (\varepsilon_2 - 1)K_{nl,m}^{1,21}\right\}_m^\infty = A_{12}^{(1)},$$
$$B_{22}^{(1)} = \left\{(\varepsilon_2 - 1)K_{nl,m}^{1,22}\right\}_m^\infty = -A_{22}^{(1)},$$
$$B_{11}^{(1)} = \left\{-(\varepsilon_2 - 1)K_{nl,m}^{1,11}\right\}_m^\infty = -A_{11}^{(1)},$$
$$B_{12}^{(1)} = \left\{\delta_l^n - (\varepsilon_2 - 1)K_{nl,m}^{1,12}\right\}_m^\infty = A_{21}^{(1)}. \qquad (65)$$

Здесь использовано обозначение для интегралов

$$K_{nl,m}^{1,ki} = \int\limits_{S_1} \frac{\partial\Phi_{mn}^{(i)}(\mathbf{r})}{\partial n}\Phi_{ml}^{(k)}(\mathbf{r})\mathrm{d}s. \qquad (66)$$

Отметим, что элементы матриц K и L связаны друг с другом следующим образом: $K_{nl}^{11,m} = L_{ln}^{11,m}$, $K_{nl}^{22,m} = L_{ln}^{22,m}$ и $K_{nl}^{12,m} = L_{ln}^{21,m}$, $K_{nl}^{12,m} = L_{ln}^{21,m}$. Для второй системы, подставляя соответствующие гармоники и интегрируя по поверхности ядра, получим аналогичные матрицы.

Теперь общую систему с учетом уравнений (63)–(65) и (44) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -A_{11}^{(2)} & A_{21}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{(1)T}(d) & 0 \\ 0 & \nabla^{(2)}\,T(d) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{12}^{(1)} & -A_{22}^{(1)} \\ -A_{11}^{(1)} & A_{21}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \end{pmatrix} = 0. \qquad (67)$$

Из уравнения (67) можно найти T-матрицу, которая получается в рамках второй схемы:

$$\mathbf{b}^{(1)} = (B_2)^{-1} B_1 \mathbf{a}^{(1)} = T_{\mathrm{II}} \mathbf{a}^{(1)}, \qquad (68)$$

где

$$B_1 = \left(A_{11}^{(2)} \nabla^{(1)T} A_{12}^{(1)} + A_{21}^{(2)} \nabla^{(2)T} A_{11}^{(1)} \right),$$

$$B_2 = \left(A_{11}^{(2)} \nabla^{(1)T} A_{22}^{(1)} + A_{21}^{(2)} \nabla^{(2)T} A_{21}^{(1)} \right). \qquad (69)$$

Сравнивая соотношения (60) и (69), нетрудно заметить, что $B_1 = A_2^T$ и $B_2 = A_1^T$. Отсюда следует, что $T_{\mathrm{II}} = T_{\mathrm{I}}^T$, где T_{I} соответствует T-матрице в рамках первой схемы. Поскольку и в одном, и в другом случае речь идет об одной и той же T-матрице, то она является симметричной:

$$T = A_2(A_1)^{-1} = (B_2)^{-1} B_1 = \left(A_2 (A_1)^{-1} \right)^T. \qquad (70)$$

Важно отметить, что свойство симметричности T-матрицы можно эффективно использовать для верификации результатов численных расчетов. Например, непосредственные расчеты показывают, что в первой схеме при существенном влиянии погрешностей, т. е. когда схема становится численно неустойчивой, ошибки приводят к сильному увеличению по абсолютной величине элементов первого столбца, в то время как поведение элементов первой строки имеет обратную тенденцию — они значительно меньше отличаются от правильных результатов. Для второй схемы картина обратная — сильно растут элементы первой строки. Поведение элементов T-матрицы для волновой задачи рассеяния примерно такое же, при этом элементы первого столбца непосредственно связаны с коэффициентами разложения рассеянного поля.

При решении задачи для многослойной частицы матрицы A_{ik}, B_{ik}, а также переходные матрицы $\tilde{\Delta}_m^{(1)}(s_1, s_2)$, $\tilde{\Delta}_m^{(2)}(s_1, s_2)$ находятся для каждого слоя точно так же, как для внешнего слоя двухслойной частицы. После этого нетрудно найти матрицы A_1, A_2 как результат матричного произведения аналогично (59), но для всех имеющихся слоев. T-матрица и поляризуемость многослойной частицы определяются по формулам (61) и (62) соответственно. 2-я схема метода EBCM для многослойной частицы работает точно так же, как и для двухслойной частицы, поэтому симметричность T-матрицы и в этом случае не вызывает сомнений.

Рассмотрим зависимость элементов T-матрицы от размера частицы. Для этого наряду с исходной частицей будем решать электростатическую задачу для подобной частицы с коэффициентом подобия ν, у которой фокусное расстояние $\tilde{d} = \nu d$, отношение полуосей $\tilde{a}/\tilde{b} = a/b$ и значение радиальной координаты $\tilde{\xi}_0 = \xi_0$. Ядро второй частицы будет иметь радиус $\tilde{r}_0 = \nu r_0$. В результате форма второй частицы и форма ее ядра будут такими же, как у исходной частицы, но их размеры изменятся в соответствии с коэффициентом подобия.

Принимая во внимание геометрию двух частиц, соответствующие геометрические факторы (см. (53) и (55)) связаны следующим образом:

$$\tilde{L}_{nn,\ m}^{1,21} = L_{nn,m}^{1,\ 21}, \quad \tilde{L}_{nn,m}^{1,22} = \nu^{-(2n+1)} L_{nn,m}^{1,22},$$

$$\tilde{L}_{nn,m}^{1,11} = \nu^{(2n+1)}\, L_{nn,\ m}^{1,\ 11}, \quad \tilde{L}_{nn,m}^{1,12} = L_{nn,m}^{1,\ 12}, \qquad (71)$$

где $i = 1, 2$, при этом внеинтегральные элементы при разных индексах n, l равны нулю. Для шаров со сфероидальным ядром равенства (71) также справедливы, что легко увидеть из соотношений (57).

Для диагональных матриц, фигурирующих в системах (50) и (51), с учетом соотношений (71) получим

$$\tilde{A}_{21}^{(i)} = A_{21}^{(i)}, \quad (\tilde{A}_{22}^{(i)})_{nn} = \nu^{-(2n+1)}\, (A_{22}^{(i)})_{nn},$$

$$(\tilde{A}_{11}^{(i)})_{nn} = \nu^{(2n+1)}\, (A_{11}^{(i)})_{nn}, \quad tildeA_{12}^{(i)} = A_{12}^{(i)}, \qquad (72)$$

где $i = 1, 2$ и снова данные равенства сохраняются для шаров со сфероидальным ядром.

Для элементов треугольных матриц $\nabla^{(1)}$ и $\nabla^{(2)}$, связанных со сшивкой разложений внутри оболочки, имеем

$$\tilde{\nabla}_{nl}^{(1)} = \nu^{(n-l)}\, \nabla_{nl}^{(1)},$$

$$\tilde{\nabla}_{nl}^{(2)} = \nu^{(l-n)} \nabla_{nl}^{(1)}. \qquad (73)$$

Данный результат следует из уравнений (21), (22). Для элементов обратных матриц соответствующие соотношения можно легко найти из (27)–(29).

Теперь обратимся к системе (58) и матрицам A_1 и A_2, из которых строится T-матрица (61):

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{a}}^{(1)} = \tilde{A}_1 \tilde{\mathbf{a}}^{(3)}, \\ \tilde{\mathbf{b}}^{(1)} = \tilde{A}_2 \tilde{\mathbf{a}}^{(3)}, \end{cases} \qquad (74)$$

где

$$\tilde{A}_1 = \left(\tilde{A}_{21}^{(1)} \tilde{\nabla}^{(2)} \tilde{A}_{21}^{(2)} + \tilde{A}_{22}^{(1)} \tilde{\nabla}^{(1)} \tilde{A}_{11}^{(2)} \right),$$

$$\tilde{A}_2 = \left(\tilde{A}_{11}^{(1)} \tilde{\nabla}^{(2)} \tilde{A}_{21}^{(2)} + \tilde{A}_{12}^{(1)} \tilde{\nabla}^{(1)} \tilde{A}_{11}^{(2)} \right). \qquad (75)$$

Принимая во внимание соотношения (71)–(73), можно найти зависимость элементов матриц $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ от коэффициента подобия:

$$(\tilde{A}_1)_{nl} = \nu^{(l-n)} (A_1)_{nl},$$

$$(\tilde{A}_2)_{nl} = \nu^{(n-l)} (A_2)_{nl}. \qquad (76)$$

Найденные соотношения (76) позволяют записать систему (74) следующим образом:

$$\begin{cases} \nu^n\ \tilde{a}_n^{(1)} = (A_1)_{nl}(\nu^l \tilde{a}_l^{(3)}), \\ \nu^{-(n+1)}\tilde{b}_n^{(1)} = (A_2)_{nl}(\nu^l\ \tilde{a}_l^{(3)}). \end{cases} \quad (77)$$

Из этих уравнений следует, что векторы $\nu^n\tilde{a}_n^{(1)}$ и $\nu^{-(n+1)}\tilde{b}_n^{(1)}$ связаны T-матрицей:

$$\nu^{-(n+1)}\tilde{b}_n^{(1)} = (T)_{nl}(\nu^l\ \tilde{a}_l^{(3)}). \quad (78)$$

С другой стороны,

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(1)} = \tilde{T}\ \tilde{\mathbf{a}}^{(1)}. \quad (79)$$

Сравнивая полученные соотношения (78) и (79), находим связь между элементами T-матриц для двух подобных частиц:

$$(\tilde{T})_{nl} = \nu^{(n+l+1)}(T)_{nl}. \quad (80)$$

В частности, поляризуемость зависит от объема частицы:

$$\tilde{\alpha} = \nu^3\alpha. \quad (81)$$

Отметим, что данное соотношение справедливо для всех компонентов тензора, которым является поляризуемость (62). Коэффициент пропорциональности зависит от формы и внутренней структуры частицы, как и от диэлектрических проницаемостей ядра и оболочек, но не зависит от ее размера.

T-матрица связывает векторы коэффициентов разложений внешнего и „рассеянного" полей в (38). Если базисными функциями являются сфероидальные гармоники $\Phi_{ml}^{(i)}(\mathbf{r}) = \Psi_{ml}^{(i)}(d, \xi, \eta, \varphi)$, то имеем дело со сфероидальной T-матрицей:

$$\mathbf{b}^{(1)} = T\mathbf{a}^{(1)}. \quad (82)$$

В случае сферического базиса $\Phi_{ml}^{(i)}(\mathbf{r}) = \Upsilon_{ml}^{(1)}(r, \theta, \varphi)$ получаем сферическую T-матрицу:

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(1)} = \tilde{T}\ \tilde{\mathbf{a}}^{(1)}. \quad (83)$$

Сфероидальный и сферический базисы связаны между собой матрицей перехода:

$$\tilde{\mathbf{a}}^{(1)} = \nabla^{(1)T}(d)\mathbf{a}^{(1)} \quad (84)$$

и

$$\tilde{\mathbf{b}}^{(1)} = \nabla^{(2)T}(d)\mathbf{b}^{(1)}. \quad (85)$$

Теперь можно записать связь между T-матрицами:

$$\tilde{T} = \nabla^{(2)T}(d)T\nabla^{(2)}(d) \quad (86)$$

и

$$T = \nabla^{(1)}(d)\tilde{T}\nabla^{(1)T}(d). \quad (87)$$

Здесь следует отметить, что симметричность данных матриц может служить хорошим критерием правильности численных расчетов. Кроме того, укажем на еще одно свойство $\tilde{T}_{11} = T_{11}$, так как эти элементы с точностью до одной и той же константы равны поляризуемости частицы.

Выводы

1. Построено решение электростатической задачи для многослойной частицы со сфероидальными и сферическими границами слоев, при этом они могут чередоваться произвольным образом. Используемый метод расширенных граничных условий позволяет в явном виде решить соответствующие бесконечные алгебраические системы для неизвестных коэффициентов разложений потенциалов полей по наиболее подходящим базисам соответственно для сферической или сфероидальных поверхностей. Затем для каждого слоя с разными видами границ проводится сшивка соответствующих разложений полей. Главный член T_{11} построенной T-матрицы с точностью до постоянной $4\pi/3$ совпадает с поляризуемостью частицы, которая дает возможность рассчитывать ее оптические свойства.

2. Найдены связи между сфероидальными и сферическими T-матрицами, которые получаются при использовании соответственно сфероидального или сферического базисов. Доказана симметричность T-матрицы, а также найдена зависимость ее элементов от размера многослойной частицы. В частности, поляризуемость частицы линейно зависит от ее объема.

3. Проведенные ранее численные расчеты показали высокую эффективность предлагаемого решения в частных случаях сфероида со сферическим или сфероидальным ядром. В частности, было показано, что для сфероидальной частицы с отношением полуосей $a/b \geq \sqrt{2}+1$ при любом ядре целесообразно использовать данный подход, поскольку непосредственное использование широко известного сферического базиса дает неправильные результаты.

Список литературы

[1] Lord Rayleigh. Philos. Mag., **44** (266), 28 (1897). DOI: 10.1080/14786449708621026

[2] R. Gans. Ann. Phys., **342**, 881 (1912). DOI: 10.1002/andp.19123420503

[3] M. Majic, L. Pratley, D. Schebarchov et al. Phys. Rev. A, **99**, 013853 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.013853

[4] К. Борен, Д. Хаффмен. *Поглощение и рассеяние света малыми частицами* (Мир, М., 1986).

[5] N.G. Khlebtsov, S.V. Zarkov. J. Phys. Chem. C, **128** (36), 15029 (2024). DOI: 10.1021/acs.jpcc.4c03126

[6] P.C. Waterman. Proc. IEEE, **53**, 805 (1965). DOI: 10.1109/PROC.1965.4058

[7] N.G. Khlebtsov, E.C. Le Ru. J. Raman Spectrosc., **52**, 285 (2021). DOI: 10.1002/jrs.5980

[8] В.Г. Фарафонов, В.И. Устинов, М.В.Соколовская. Опт. и спектр., **120**, 470 (2016). DOI: 107868/S0030403416030077

[9] В.Г. Фарафонов. Опт. и спектр., **117**, 949 (2014). DOI: 10.7868/S0030403414120083

[10] В.Г. Фарафонов, А.А. Винокуров, С.В. Барканов. Опт. и спектр., **111**, 1026 (2011). DOI: 101134/S0030200X11120071

[11] В.Г. Фарафонов, В.Б. Ильин. Опт. и спектр., **115**, 836 (2013). DOI: 10.1007/S003040341310056
[12] V.G. Farafonov, V.I. Ustinov, V.B. Il'in. J. Math. Sci., **252** (5), 702 (2021). DOI: 10.1007/s10958-021-05192-x
[13] V.G. Farafonov, V.I. Ustinov, A.E. Farafonova, V.B. Il'in. J. Math. Sci., **277** (4), 698 (2023). DOI: 10.1007/s10958-023-06875-3
[14] Ф.М. Морс, Г. Фешбах. *Методы теоретической физики* (ИЛ., М., 1958).
[15] В.Г. Фарафонов, В.И. Устимов. Опт. и спектр., **124** (2), 255 (2018). DOI: 10.21883/OS.2018.02.45533.212-17
[16] Д. Колтон, Р. Кресс. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния* (Мир, М., 1987).
[17] В.И. Комаров, Л.И. Пономарев, В.Ю. Славянов. *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции* (Наука, М., 1976).
[18] В.Г. Фарафонов, В.И. Устимов. Опт. и спектр., **119** (6), 1020 (2015). DOI: 107868/S0030403415120119