03

Численное исследование влияния конструкции МГД-перемешивателей на процесс непрерывного литья круглых слитков алюминиевого сплава. I. Структура течения в теплом верхе кристаллизатора

© С.Ю. Хрипченко, Е.Ю. Тонков

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
614013 Пермь, Россия
e-mail: tonkov.e@icmm.ru, khripch@icmm.ru

Поступило в Редакцию 20 октября 2025 г.
В окончательной редакции 25 декабря 2025 г.
Принято к публикации 15 января 2026 г.

Рассмотрено несколько вариантов конструкций МГД-перемешивателей, имеющих как трехфазные, так и двухфазные индукторы бегущего и вращающегося магнитных полей, а также перемешиватели, имеющие только один индуктор вращающегося поля, но создающий как тороидальное, так и полоидальное течение жидкого металла в процессе получения слитка. Путем численного моделирования были получены картины течений, создаваемые различными конструкциями МГД-перемешивателей. По предложенным авторами динамическим характеристикам течения жидкого металла в перемешиваемом объеме произведено сравнение эффективности работы этих конструкций.

Ключевые слова: МГД-перемешиватель, трехфазный и двухфазный индуктор, численное моделирование, полоидальное и тороидальное течение, эффективность МГД-перемешивания, наклонные полюса.

DOI: 10.61011/JTF.2026.06.62993.278-25

Введение

При изготовлении алюминиевых конструкционных элементов для строительной, автомобильной и аэрокосмической промышленности методом прессования важно, чтобы слитки из алюминиевых сплавов имели мелкокристаллическую структуру с равномерным распределением компонентов сплава и сторонней примеси по объему. В настоящее время необходимую структуру в основном получают введением в исходный расплав лигатур (при литье слитков), содержащих мелкодисперсные частицы, такие как Al_3Ti, TiB_2, AlB_2, TiC. Эти частицы, являясь дополнительными центрами кристаллизации, не дают процессу кристаллизации слитка идти по дендритному типу, а инициируют мелкокристаллическую структуру. Для улучшения процесса можно использовать дополнительную обработку ультразвуком [1]. После кристаллизации слитка его подвергают процессу гомогенизации (в специальных печах), длящемуся несколько часов и расходующему большое количество энергии. При введении модифицирующих частиц механические свойства полученного материала несколько снижаются в сравнении со слитком такой же структуры, но без добавления частиц.

Структура и свойства слитков из алюминиевых сплавов, получаемых на машинах непрерывного литья, могут быть улучшены другим способом (без введения модифицирующих частиц), путем воздействия на жидкий металл в теплом верхе кристаллизатора машины непрерывного литья управляемым МГД-перемешиванием в процессе кристаллизации сплава. При помощи МГД-перемешивателя создается перемешивающее течение над фронтом кристаллизации слитка, что непосредственно влияет на структуру и однородность распределения компонентов сплава и примесей в его объеме [2,3].

Тороидальное течение (вращение металла в горизонтальной плоскости) у фронта кристаллизации не дает образовываться дендритам, размывая их и создавая большое количество мелких центров кристаллизации, которые, вращаясь в сдвиговом потоке у фронта кристаллизации, обеспечивают образование зерен округлой формы [4], формируя мелкозернистую структуру слитка. Полоидальное течение (вихревое течение в плоскости вертикального сечения) усиливает теплоперенос от верхней части теплого верха кристаллизатора (куда непрерывно поступает жидкий алюминий) вниз к фронту кристаллизации [5]. Регулируя интенсивность течения и меняя его направление, можно эффективно влиять на геометрию фронта кристаллизации [6] и на распределение компонентов сплава и примесей по объему слитка. Таким образом, оба течения — как тороидальное, так и полоидальное — играют важную роль в формировании кристаллической структуры слитка и в процессе равномерного распределения компонентов сплава и сторонней примеси по его объему.

Исследования процесса МГД-перемешивания жидкого металла при непрерывном литье цилиндрических слитков проводилось для случаев, когда в жидком объеме металла индуктором вращающегося поля возбуждается

тороидальное течение, [7] либо индуктором бегущего поля возбуждается полоидальное течение [8]. Эти индукторы обычно являются трехфазными и питаются от трехфазной электросети.

В литературе [9,10] также рассматриваются случаи перемешивания металла пульсирующим магнитным полем. Такие индукторы являются однофазными, и перемешивание металла происходит за счет неоднородного распределения в перемешиваемом объеме переменного во времени магнитного поля. Примером может служить катушка, окружающая цилиндрический объем жидкого металла. Магнитное поле в этой катушке (создаваемое электрическим током, текущим в ней), генерирует в жидком металле электрический ток, который, взаимодействуя с этим полем, создает объемные силы, действующие на металл. Неоднородность распределения магнитного поля по высоте объема жидкого металла обусловливает и неоднородность электромагнитных сил, которая и приводит к генерации в объеме металла полоидального течения. Такое перемешивание имеет место при плавке металла в индукционных печах, течения при этом обычно обладают малой интенсивностью.

Перемешиватели, имеющие индуктор вращающегося или бегущего магнитного поля, могут выполняться как в трехфазном, так и в двухфазном исполнении. В работе [11] описываются МГД-перемешиватели, имеющие двухфазные индукторы, создающие бегущее магнитное поле. В работе показывается, что указанные конструкции в сравнении с трехфазными исполнениями обладают меньшими габаритами, что может иметь решающее значение при их использовании на современных многоручьевых установках непрерывного литья алюминиевых слитков [12].

Существуют так же предложения [13] о создании бегущего магнитного поля при помощи движущихся постоянных магнитов. Однако, по мнению авторов, подобные перемешиватели, в силу того, что в движение магниты необходимо приводить специальными электродвигателями, будут менее удобны из-за больших габаритов и уязвимости механической конструкции к атмосфере литейного цеха, чем МГД-перемешиватели.

Вопрос о габаритах МГД-перемешивателей и возможном снижении их размеров является актуальным в настоящее время. В то же время главной задачей этих устройств является эффективное перемешивание жидкого металла в процессе его непрерывного литья, поэтому при их конструировании с целью уменьшения габаритов необходимо одновременно оценивать эффективность перемешивания этими устройствами. В работе [12] проведено сравнение различных конструкций МГД-перемешивателей по характеру силового воздействия на жидкий металл. Однако более полное сравнение необходимо проводить по характеристикам перемешивающего течения, создаваемого МГД-перемешивателями.

Распространение примеси и эффективность теплопереноса в объеме металла при его перемешивании в большой степени зависит от интенсивности вихревого движения жидкого металла в вертикальной плоскости и коэффициента турбулентной диффузии в объеме металла. В связи с этим эффективность процесса перемешивания с этой стороны предлагается оценивать:

— по удельной средней по объему кинетической энергии полоидального течения жидкого металла (1);

— по компоненте ротора его скорости, лежащей в горизонтальной плоскости (2);

— по средней величине коэффициента турбулентной диффузии в жидком металле (3);

— по однородности распределения ротора скорости и коэффициента турбулентной диффузии в перемешиваемом объеме (4), (5);

Наиболее важной задачей перемешивания является измельчение кристаллической структуры, обусловленное действием течения жидкого металла вдоль фронта кристаллизации слитка. Основной вклад в этот процесс вносит тороидальное течение, инициируемое вращающимся магнитным полем. Даже в случае так называемого „твердотельного“ вращения, когда завихренность жидкого металла в объеме минимальна, его течение над поверхностью фронта кристаллизации обусловливает измельчение зерна кристаллизующегося металла. Сдвиговое течение вблизи фронта кристаллизации (как уже упоминалось выше), размывая ветви дендритов, образует большое количество мелких центров кристаллизации, которые, вращаясь под действием сдвигового течения, образуют округлую компактную форму [4] (которая тем мельче и ближе к сферической, чем выше скорость потока в области кристаллизации).

Для оценки процесса перемешивания с этой стороны предлагается в качестве параметра брать среднюю по объему (вблизи фронта кристаллизации) угловую скорость вращения жидкого металла (6):

$$w = \frac{\rho \sum_i^N (u_{r,z})_i^2}{2N}, \tag{1}$$

$$\langle \Omega \rangle = \sqrt{\frac{\sum_i^N ((rotu)_\varphi)_i^2}{N}}, \tag{2}$$

$$\langle D \rangle = \frac{1}{V} \int_0^V D dV, \tag{3}$$

$$I_\Omega(t) = \sqrt{\frac{\sum_i^N \Big(((rotu)_\varphi)_i - \langle (rotu)_\varphi \rangle \Big)_{t=t}^2}{N \langle (rotu)_\varphi \rangle_{t=t}^2}}, \tag{4}$$

$$I_D(t) = \sqrt{\frac{\sum_i^N (D_i - \langle D \rangle)_{t=t}^2}{N \langle D \rangle_{t=t}^2}}, \tag{5}$$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{\pi R^2 h} \iiint \frac{v_\varphi}{r} \, dr dz d\varphi. \tag{6}$$

Здесь ρ — плотность жидкого металла, u — скорость металла, i — индекс ячейки счетной области, N — число ячеек в рассматриваемой области, индексы z, φ — обозначают компоненты векторных величин, h —

высота слоя металла над фронтом кристаллизации, D — коэффициент турбулентной диффузии, ξ — малое по величине число, формально добавляемое в знаменатель для исключения ошибки деления на 0 в начальный момент времени.

Высота слоя металла h над фронтом кристаллизации в выражениях (6), выбираемая нами для осреднения скорости вращения, не должна быть равной высоте рассматриваемого теплого верха кристаллизатора. Это обусловлено тем, что фронт кристаллизации металла в некоторых случаях может находиться ниже активной зоны перемешивания, и осреднение скорости по всему объему перемешиваемого металла будет плохо характеризовать скорость над поверхностью фронта кристаллизации. Для определенности формально мы выбрали высоту h, равной половине радиуса объема перемешиваемой области: $h = R/2$.

Гидродинамические процессы, происходящие в жидком металле, описываются в низкочастотном приближении уравнениями магнитной гидродинамики для несжимаемой жидкости (с однородной по объему и неизменной во времени вязкостью и электрической проводимостью металла) [14].

Если взять за единицу измерения магнитного поля — B_0, времени — $1/\omega$, скорости — ν/R_0, расстояния — R_0, давления – $\rho\omega\nu$, то уравнения магнитной гидродинамики можно представить в безразмерном виде как:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}_\omega}\,\mathrm{rot}[\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{B}] + \Lambda\Delta\mathbf{B}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Re}_\omega}\,\boldsymbol{\nu}\nabla\boldsymbol{\nu} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}_\omega}\,\Delta\nu + F[\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}] \qquad (8)$$

где B_0 — максимальное магнитное поле создаваемое индуктором МГД-перемешивателя в перемешиваемом объеме металла; ω — круговая частота магнитного поля; ν — кинематическая вязкость жидкого металла; R_0 — величина радиуса перемешиваемого цилиндрического объема в теплом верхе кристаллизатора; безразмерные параметры: $\mathrm{Re}_\omega = \omega R_0^2/\nu$; $\Lambda = 1/(\sigma\omega\mu_0 R_0^2) = 1/\mathrm{Re}_\omega Pr_m = \delta^2/R_0$; $F = B_0^2/\omega\mu_0\rho\nu = 2Te/\mathrm{Re}_\omega^2 Pr_{m.} = P_{magn.}/P_{hydraulic.}$

Безразмерные числа Λ и F определяют соответственно отношение квадрата толщины скин- слоя δ^2 для магнитного поля в перемешиваемом металле к величине квадрата характерного размера рассматриваемой области R_0^2 и отношение магнитного давления к гидравлическому давлению.

Здесь числа $\mathrm{Re}_\omega = \omega\cdot R_0^2/\nu$; $Te = \sigma\omega\cdot B_0^2\cdot R_0^4/(2\cdot\rho\nu^2)$, подобные употребляемым в работах [15], можно только условно назвать соответственно числами Рэйнольдса (Re_ω) и Тейлора (Te) так как в них входит не скорость жидкого металла, а круговая частота магнитного поля индуктора. То же относится и к так называемому гидравлическому давлению в выражении $F = P_{magn.}/P_{hydraulic.}$

Таким образом, имеются три безразмерных параметра, определяющих МГД-процессы в жидком металле при воздействии на него магнитного поля МГД-перемешивателя. Оценку эффективности процессов перемешивания жидкого металла МГД-перемешивателями различных конструкций необходимо производить при одинаковых значениях этих безразмерных параметров Re_ω, F, Λ. Сравнение эффективности различных конструкций МГД-перемешивателей в настоящей работе проводилось при одинаковых значениях создаваемых перемешивателями магнитных полей и их частот, одинаковых геометрических размерах перемешиваемых областей и с одинаковыми свойствами жидкого металла [12].

1. Рассматриваемые конструкции МГД-перемешивателей

Рассмотрим четыре различных конструкций МГД-перемешивателей с целью сравнения их эффективности при перемешивании жидкого металла в теплом верхе машины непрерывного литья круглых слитков из алюминия и его сплавов:

Перемешиватель 1 объединяет два трехфазных индуктора как бегущего, так и вращающегося магнитного поля (рис. 1) [16,17];

Перемешиватель 2 подобен первому, но его индукторы имеют двухфазное исполнение. По этой причине его удобно объединять с другими аналогичными устройствами на одном литейном столе, к тому же он обладает несколько меньшими габаритами, чем первый перемешиватель (рис. 1) [18];

Перемешиватель 3 имеет только один двухфазный индуктор вращающегося поля, полюса которого наклонены относительно его центральной оси. Данная конструкция обладает меньшими габаритами в сравнении с первыми двумя перемешивателями (рис. 1) [19];

Перемешиватель 4 имеет только один двухфазный индуктор вращающегося поля с прямыми (ненаклонными) полюсами. Эта конструкция подобна применяемым в машинах непрерывного литья при производстве круглых алюминиевых слитков в настоящее время, и рассматривается нами в сравнении с первыми тремя конструкциями перемешивателей (рис. 1).

Перемешиватели 1 и 2 (рис. 1), имеющие индукторы бегущего и вращающегося поля, возбуждают в жидком металле теплого верха (рис. 2) кристаллизатора машины непрерывного литья полоидальное и тороидальное течение металла. Теплый верх кристаллизатора представляется нами как полый цилиндр *1* с огнеупорными стенками, расположенный над кристаллизатором *2* машины непрерывного литья. Вверху цилиндра имеется воронка *3* для приема жидкого металла. Между воронкой и цилиндром располагается перегородка *4* с центральным отверстием. Роль предлагаемой нами перегородки заключается в том, что она предотвращает передачу момента вращения от жидкого металла в цилиндре, на который действуют вращающие электромагнитные силы, металлу, заливаемому

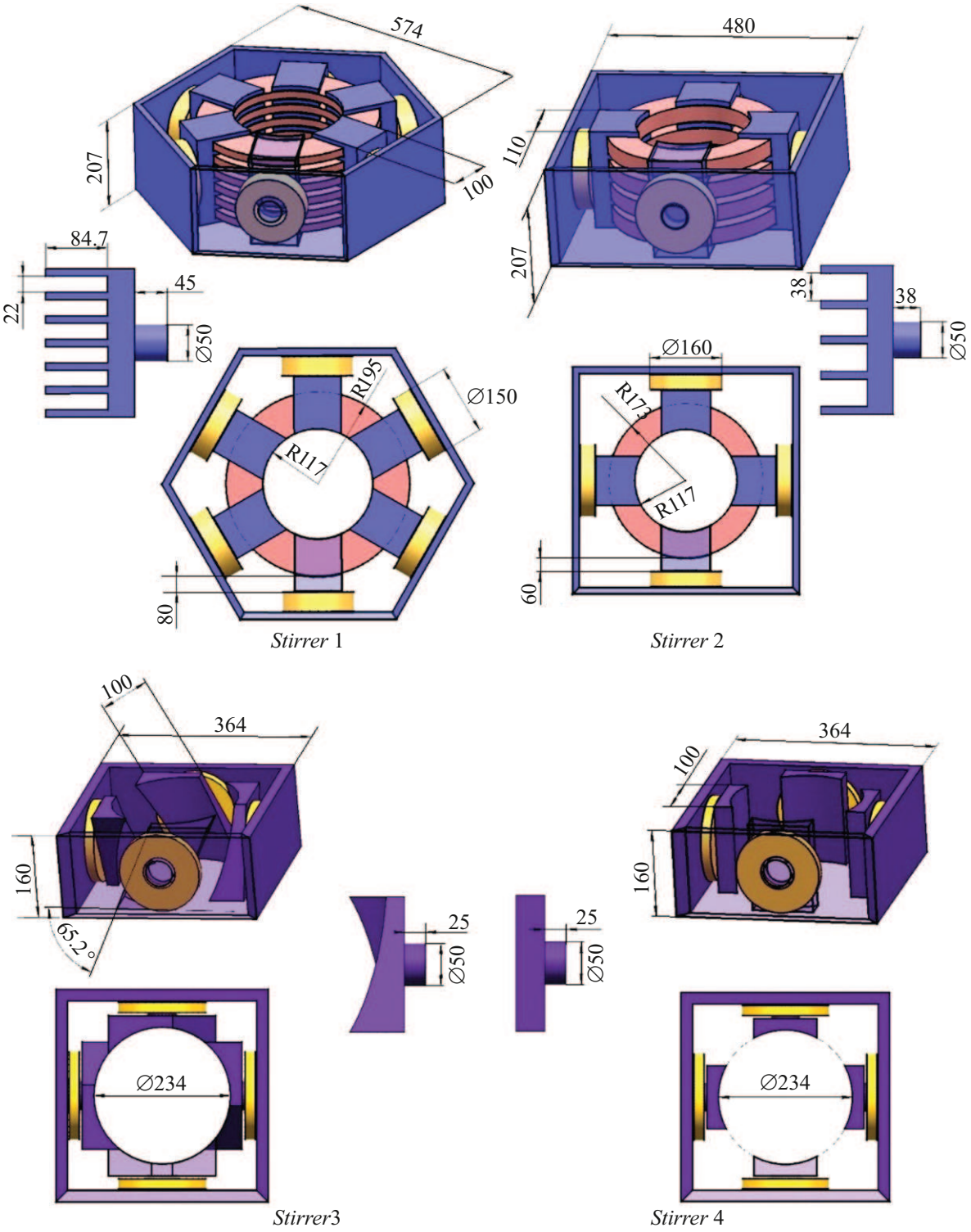


Рис. 1. Конструкции МГД-перемешивателей.

в воронку. В этом случае металл в рабочем объеме (цилиндре) может быть раскручен до больших скоростей без возникновения глубокого углубления поверхности металла в приемной воронке, что, к тому же, препятствует проникновению в рабочий объем загрязнений.

В результате перекрестного взаимодействия бегущего и вращающегося полей (в перемешивателях 1 и 2), результирующее течение в рабочем объеме теплого верха теряет осевую симметрию, и ее топология становиться сложной. Для подавления перекрестного влияния полей необходимо либо осуществлять питание индукторов

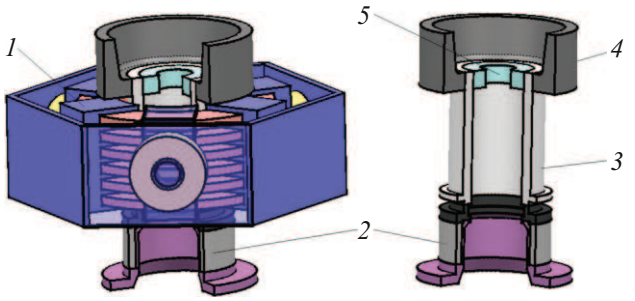


Рис. 2. МГД-перемешиватель (*1*) с кристаллизатором (*2*), теплым верхом (*3*) и приемной воронкой (*4*), на дне которой находится разделительная перегородка (*5*) с центральным отверстием.

электрическим током различных частот, либо осуществлять попеременную во времени работу индукторов [20].

Перемешиватели 3 и 4 (рис. 1) не имеют индуктора бегущего поля, поэтому лишены описанного выше недостатка [19]. Конструкция 3 создает полоидальное течение как вертикальными силами, возникающими за счет наклона полюсов индуктора, так и за счет трения о стенки теплого верха тороидального течения.

Перемешиватель 4 создает полоидальное течение только за счет трения о стенки создаваемого им тороидального течения. Вертикальные силы, возникающие за счет неоднородности пульсирующего магнитного поля, у такого перемешивателя меньше, чем у перемешивателя 3, поэтому их вклад в создание полоидального течения значительно меньше.

2. Постановка задачи

Для оценки эффективности работы рассматриваемых нами конструкций перемешивателей и сравнения их между собой в настоящей работе произведено численное моделирование электромагнитных процессов с расчетом гидродинамики жидкого металла при перемешивании в теплом верхе кристаллизатора. Расчетная модель (рис. 3) представляет собой индуктор соответствующей конструкции, помещенный во внешний цилиндр воздушного объема. Внутри индуктора находится домен жидкого алюминия, представляющий собой занимаемый металлом объем теплого верха. От верхней части домена жидкого алюминия до границы расчетной области располагается цилиндрический объем, служащий частью, в которой решаются уравнения для течения воздуха при определении свободной поверхности раздела фаз. В качестве примера на рис. 3 приведен трехфазный МГД-перемешиватель с индукторами вращающегося и бегущего магнитных полей. Катушки индукторов рассматриваются в виде цилиндров без разрешения отдельных витков.

Для математического моделирования перемешивания жидкого металла под действием объемной наведенной

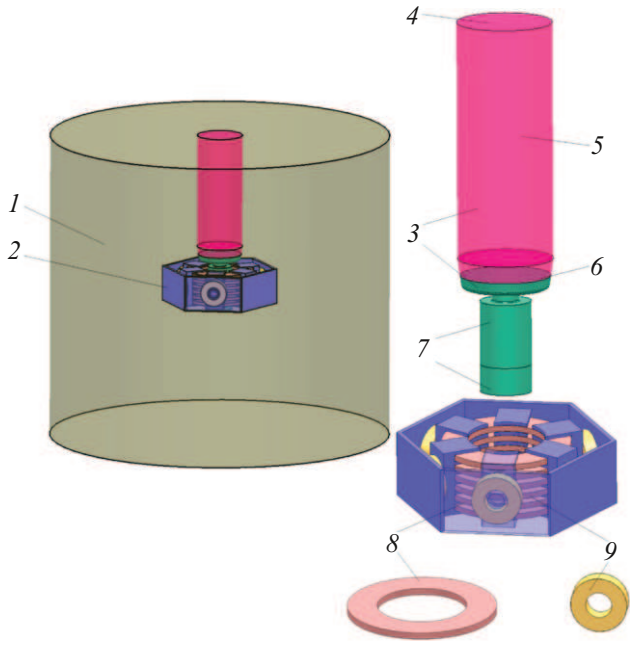


Рис. 3. Расчетная модель МГД-перемешивателя: *1* — вспомогательный объем, *2* — перемешиватель, *3* — смачиваемые стенки, *4* — стенка, *5* — воздушный домен, *6* — свободная поверхность металла, *7* — домен жидкого металла, *8* — катушка индуктора бегущего поля, *9* — катушка индуктора вращающегося поля.

силы в настоящей работе предложена методика расчета в COMSOL Multiphysics v 6.2 [21], состоящая из нескольких этапов (см. таблицу).

Расчет гидродинамических процессов внутри теплого верха в связи со сложностью задачи в большинстве случаев производится при условии неподвижной верхней границы жидкого металла. По этой причине появляющаяся на поверхности металла воронка обычно не учитывается. Деформация поверхности металла приводит к изменению распределения объемных электромагнитных сил и геометрии объема металла, что, в свою очередь, влияет на топологию генерируемого в металле течения. Кроме того, глубокая воронка на поверхности алюминия может привести к захвату загрязнений со свободной поверхности и переносу их в основной объем. Эти обстоятельства ставят цель разработки методики расчета перемешивания жидкого металла, учитывающей свободную поверхность раздела фаз (жидкий металл-воздух). Решение поставленной задачи производилось поэтапно по схеме, представленной в таблице.

3. Методика расчета

3.1. Электромагнитные силы [12,22]

На данном этапе решается система уравнений Максвелла в стационарной низкочастотной постановке (9) во всей расчетной области в электродинамическом при-

Этапы расчета течения жидкого металла в теплом верхе под воздействием МГД-перемешивателя

Номер этапа	Содержание этапа
1	Электромагнитные силы. Стационарный электродинамический расчет.
2	Нестационарный двухфазный гидродинамический расчет с определением формы свободной поверхности.
3	Перестроение геометрической и сеточной моделей с учетом поверхности раздела фаз.
4	Электромагнитные силы. Стационарный электродинамический расчет с перестроенной геометрией.
5	Стационарный гидродинамический расчет с „замороженной“ свободной поверхностью и уточненной сеточной моделью

ближении (без учета влияния движения металла на магнитное поле):

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{J}$ — вектор плотности тока, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции магнитного поля, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, i — мнимая единица, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, μ_r — относительная магнитная проницаемость материала.

3.1.1. Граничные условия

На внешней границе цилиндрической расчетной области (воздушного домена на рис. 3) определяется условие „изоляции“ магнитного поля:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности границы расчетной области.

Принята гомогенизированная модель расчета катушек с заданием плотности тока без учета геометрии намотанного провода. Расчетный домен представляет собой цилиндр, площадь сечения которого совпадает с площадью сечения обмотки. Плотность тока в катушке определяется путем задания количества витков катушки и амплитудного значения электрического тока в одном витке (10):

$$\mathbf{J}_e = \frac{NI_{coil}}{S}\,\mathbf{e}_{coil}, \tag{10}$$

где N — число витков катушки, I_{coil} — амплитудное значение тока в одном витке, S — площадь поперечного сечения катушки, $\mathbf{e}_{coil}$ — вектор, указывающий направление течения тока в катушке.

Принята квадратичная степень дискретизации для получения равномерного распределения поля электромагнитных сил.

Решение уравнений производилось полностью связанным методом (fully coupled), при котором все дифференциальные уравнения разрешаются в рамках одной итерации с прямым решателем (MUMPS).

Результатом расчета данного этапа является поле объемных сил, под действием которых осуществляется перемешивание жидкого металла:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

3.2. Нестационарный расчет движения жидкого металла с учетом движения воздушной фазы и свободной поверхности [21]

На данном этапе выполняется определение формы свободной поверхности раздела фаз жидкий алюминий-воздух путем решения осредненных по Рэйнольдсу уравнений Навье–Стокса для многокомпонентной смеси с k-ε-Realizable-моделью турбулентности в поле силы тяжести (11) в нестационарной постановке:

$$\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla\cdot[-p\mathbf{I} + \mathbf{K}] + \mathbf{F} + \rho\mathbf{g},$$

$$\rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{F} = \mathbf{J}\times\mathbf{B},$$

$$\mathbf{K} = (\mu + \mu_T)(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$$

$$\rho\frac{\partial k}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)k = \nabla\cdot\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}\right)\nabla k\right] + P_k - \rho\varepsilon,$$

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\varepsilon = \nabla\cdot\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla\varepsilon\right] + C_1\rho s\varepsilon$$

$$-C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu\varepsilon}},$$

$$C_1 = \max\left\{0,43; \frac{\eta}{\eta+5}\right\}, \quad \eta = \frac{sk}{\varepsilon},$$

$$s = \sqrt{2\mathbf{s}:\mathbf{s}}, \quad \mathbf{s} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$\mu_T = \rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s U^{(*)}\frac{k}{\varepsilon}},$$

$$A_s = \sqrt{6}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(\sqrt{6}W)\right]$$

$$W = \frac{2\sqrt{2}\mathbf{s}:(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s})}{|\mathbf{s}|^3}, \quad U^{(*)} = \sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}+\boldsymbol{\Omega}:\boldsymbol{\Omega}},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^T], \quad P_k = \mu_T[\nabla\mathbf{u}:(\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T)] \tag{11}$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{u}$ — вектор скорости жидкости; p — давление жидкости; $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $\mathbf{K}$ — тензор вязких напряжений; $\mathbf{F}$ — вектор объемной электромагнитной силы; $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения; $\mathbf{J}$ — вектор плотности электрического тока; $\mathbf{B}$ — вектор индукции магнитного поля; μ — коэффициент динамической вязкости; μ_T — турбулентная вязкость; $(\nabla\mathbf{u})^T$ — транспонированный градиент скорости; k — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации турбулентной энергии; P_k — коэффициент генерации турбулентных вихрей за счет градиента скорости; P_k — турбулентное число Прандтля для k; σ_ε — турбулентное число Прандтля для ε; C_1, C_2, C_μ — эмпирические константы; символ „:“ в данном случае означает двойное скалярное произведение тензоров; все производные по времени ввиду стационарной постановки обнуляются; s — инвариант скорости деформации; $\boldsymbol{\Omega}$ — тензор вращения; $U^{(*)}$, W — вспомогательные переменные; A_s, A_0 — безразмерные константы модели турбулентности.

Свойства материала (плотность, динамическая вязкость) в переходных ячейках определяются как средние значения характеристик двух жидкостей (жидкий алюминий и воздух) с учетом их соотношения в ячейке (12). Сила поверхностного натяжения в данной модели не учитывается:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{st} &= 0, \\ \rho &= \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\varphi, \\ \mu &= \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathbf{F}_{st}$ — сила поверхностного натяжения; ρ_1 — плотность алюминия; ρ_2 — плотность воздуха; μ_1 — коэффициент динамической вязкости алюминия; μ_2 — коэффициент динамической вязкости воздуха; ρ — плотность двухкомпонентной среды; μ — динамическая вязкость двухкомпонентной среды.

Тем самым граница раздела фаз представляется как некий „псевдодиффузионный слой“ промежуточного материала с плавным (без разрыва) переходом свойств (рис. 4) из одного материала в другой. Толщина данного слоя задается напрямую. Исходя из того, что в реальности толщина этого слоя равна нулю, а в используемой математической модели она конечна, и чем меньшее заданное значение толщины переходного слоя, тем более физичными получаются результаты, но менее стабильно выполняется расчет.

Деформация границы раздела осуществляется под действием давления, возникающего в результате действия центробежных сил, и вычисляется на каждом временном шаге (13):

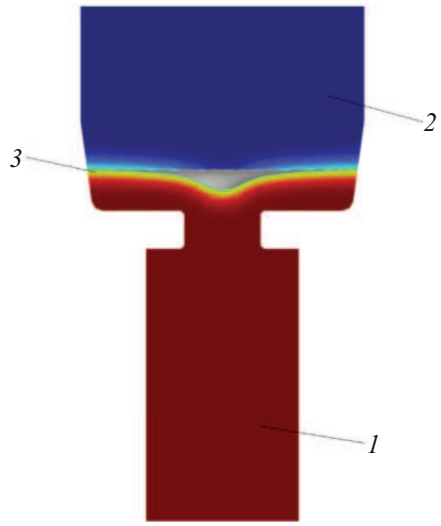


Рис. 4. Пример разделения фаз с „псевдодиффузионным слоем“: *1* — жидкий алюминий, *2* — воздух, *3* — „псевдодиффузионный слой“.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = \gamma\nabla\cdot\left[\epsilon_{ls}\nabla\varphi - \varphi(1-\varphi)\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\right],$$

где φ — функция уровня; ϵ_{ls} — параметр, определяющий толщину переходного „псевдодиффузионного“ слоя (в рамках данной задачи принят равным 5 mm, что соответствует наименьшему значению, при котором расчет выполнялся стабильно); γ — параметр, инициализирующий скорость перемещения границы раздела (влияет на стабильность решения; обычно задается равным максимальной скорости перемещения свободной поверхности).

Использование описанного выше „Volume of fluid“ (VOF) метода для расчета перемещения границы раздела фаз сопряжено с некоторыми ограничениями на используемую сеточную модель. Данный метод не позволяет качественно описать пограничный слой, так как ведет себя нестабильно при слишком „вытянутых“ пристеночных элементах, т. е. сеточная модель, при которой данная модель считается стабильной, не позволяет качественно описать градиент скорости в пограничном слое. Ввиду этого в настоящей работе вводится математическая модель, состоящая из нескольких этапов (см. таблицу), одним из которых является определение свободной поверхности на „грубой“ сетке, а другим является стационарный гидродинамический расчет течения жидкости в установившемся объеме без учета домена воздуха на „уточненной“ сеточной модели.

3.2.1. Граничные условия

На границах расчетной области (рис. 3) задается условие стенки, определяющиее их непроницаемость

и обнуление скорости жидкой среды на поверхности (условие прилипания).

Для стабильного расчета перемещения границы раздела фаз задается условие смачивемости („wetted wall“) на стенках, по которым эта граница сдвигается (рис. 3). В рассматриваемом случае линейные размеры поверхности металла много больше размеров области действия сил поверхностного натяжения вблизи боковых стенок, поэтому эти силы не учитываются, а угол смачивания считался равным 90°.

Во всей расчетной области задается условие, что действие силы тяжести сонаправлено оси рассматриваемого цилиндра.

В качестве начальных условий задается распределение фаз жидкий алюминий-воздух, соответствующее значению налитого металла до процесса перемешивания.

3.3. Перестроение геометрической и сеточной моделей [21]

Данный этап необходим для уточнения геометрии домена жидкого алюминия с учетом свободной поверхности на заданном режиме работы у заданной конструкции (данный этап необходимо выполнять на каждом режиме работы устройства, так как геометрия свободной поверхности заметно меняется). Результатом предыдущего этапа расчета является поле концентрации домена жидкого алюминия относительно воздушной среды (рис. 4). Свободная поверхность жидкого алюминия получается путем построения „изоповерхности“ по величине функции уровня φ на значении 0.5 (это значение является серединой „псевдодиффузионного слоя“ заданной толщины).

Для уточнения геометрии в настоящей работе путем интерполяции полученных ранее дискретных значений φ задавалась функция (14) зависимости координаты высоты подъема свободной поверхности z от координат x, y (рис. 5, a):

$$z = f(x, y)$$

после чего выполнялось построение поверхности $S[x, y, f(x, y)]$, выходящей за пределы цилиндрического объема теплого верха (рис. 5, b), и „уточнялась“ форма домена жидкого алюминия (рис. 5, c).

После уточнения геометрии домена алюминия по предложенной в настоящей работе методике идет этап перестроения сеточной модели для уточнения пристеночного слоя. На свободной поверхности задается граничное условие „стенка с проскальзыванием“, поэтому на ней нет необходимости построения призматических слоев (рис. 6). В цилиндрическом „воздушном домене“ (рис. 5) на последующих этапах расчетной методики не предполагается решение гидродинамических уравнений, в связи с чем дискретизацию данной области можно описать менее подробно, в то же время добавив количество призматических слоев в пристеночном слое. Это

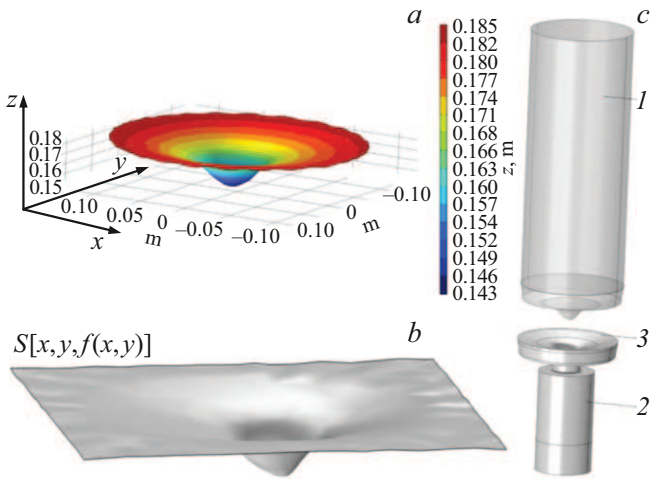


Рис. 5. Уточнение геометрии с учетом формы свободной поверхности: *1* — воздушный домен, *2* — домен жидкого алюминия, *3* — поверхность раздела.

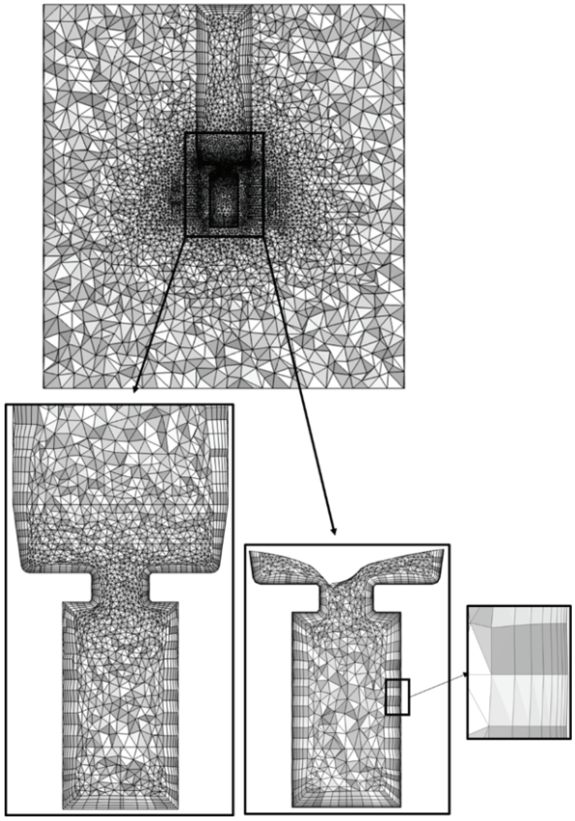


Рис. 6. Сеточная модель изначальной геометрии (слева) и с учетом формы свободной поверхности (справа).

поможет перераспределить сгущение в сеточной модели без увеличения требуемых вычислительных мощностей.

На рис. 6 представлены сеточные модели: слева — использующееся для расчета двухфазного течения с целью определения формы свободной поверхности, справа —

для расчета гидродинамики перемешивания на уточненной сеточной модели.

3.4. Электромагнитные силы [21]

После перестроения геометрической и сеточной моделей в предложенной методике идет этап пересчета электродинамической части задачи для уточнения перераспределения поля наведенных токов и объемных сил в цилиндре. Постановка задачи данного этапа не отличается от этапа номер 1.

3.5. Гидродинамический расчет установившегося течения [21]

При уточненной геометрии объема жидкого металла с принятой формой свободной поверхности производится вычисление установившегося течения подобно этапу 2. Результатом данного этапа будут поле скоростей турбулентного течения и локальные коэффициенты турбулентной диффузии.

4. Верификация принятой математической модели

В работе [22] описана верификация модели стационарной задачи вращения жидкого металла под действием вращающегося магнитного поля. На рис. 7 представлены графики экспериментальной и расчетной зависимостей частоты вращения жидкого металла под действием магнитного поля, создаваемого индуктором вращающегося магнитного поля при разных значениях тока в катушках.

Из рис. 7 видно, что принятая модель отвечает необходимой для решения поставленной задачи точности. Кривая численного решения проходит несколько выше экспериментальной, однако в настоящей работе выполнение расчетов носит сравнительный характер, поэтому точность данной математической модели мы считаем достаточной.

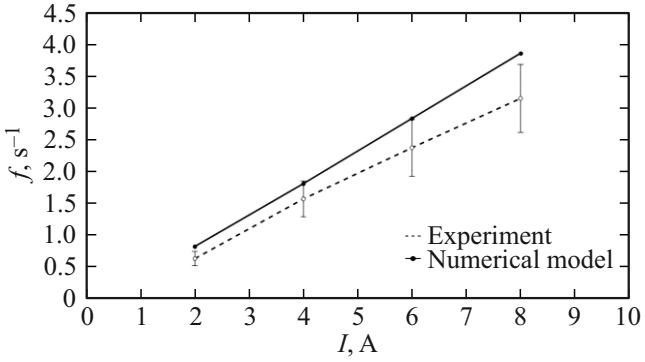


Рис. 7. Экспериментальная (штриховая линия) и расчетная (сплошная кривая) зависимости количества оборотов в секунду f, совершаемых жидким металлом в тигле, от величины действующего значения электрического тока в одной фазе индуктора вращающегося поля МГД-перемешивателя [22].

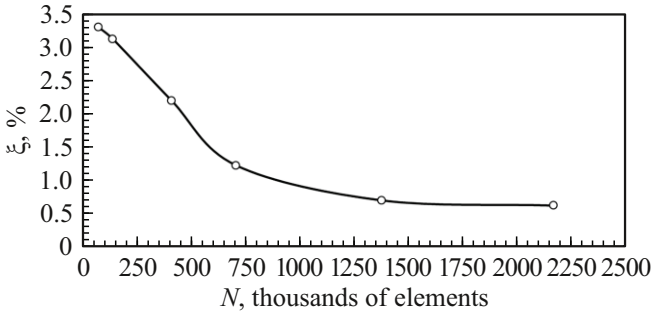


Рис. 8. Сеточная сходимость. Представлена зависимость точности расчета электромагнитной силы ξ от количества элементов сеточной модели, описанной в работе [12].

В работе [12] представлен график зависимости точности расчета электромагнитной силы от количества элементов сеточной модели (рис. 8). Исходя из рис. 8, для принятой в настоящей работе математической модели используется сеточная модель (рис. 6, справа) с размерами элементов, эквивалентных размерам сетки, представленной в работе [12] (по которой выполнялись указанные на рис. 8 расчеты). На рис. 8 эта точка соответствует значению 0.729 млн. элементов, что соответствует точности порядка 1 % без значительных вычислительных затрат.

5. Результаты

Для оценки интенсивности полоидального течения, возбуждаемого рассматриваемыми конструкциями перемешивателей, авторами настоящей работы произведен анализ зависимости φ-компоненты ротора скорости (полоидального) течения от времени перемешивания. На рис. 9, *a* видно, что в начальный отрезок времени средний по всему объему ротор скорости полоидального течения $\langle\Omega\rangle$, возбуждаемого перемешивателями 1 и 2, существенно выше среднего ротора скорости, возбуждаемого перемешивателями 3 и 4. Это обусловлено наличием у перемешивателей 1 и 2 индуктора, создающего бегущее поле (которое действует в основном на пристеночный слой), возбуждающего в начальный момент вертикальное движение, преимущественно в пристеночной области, что приводит к возникновению больших градиентов скорости, так как течение в ядре объема еще не установилось. В связи с этим средний ротор скорости в начальный момент действия индуктора (в перемешивателях 1 и 2) возрастает гораздо интенсивнее, чем ротор скорости в перемешивателях 3 и 4, в которых при отсутствии индуктора бегущего поля вертикальные силы, действующие на металл, меньше, чем у первых двух перемешивателей, а градиент скорости увеличивается по мере раскручивания металла (и появления „тейлоровских вихрей“). После выхода течения „в стационар“ (примерно 8–10 s от начала

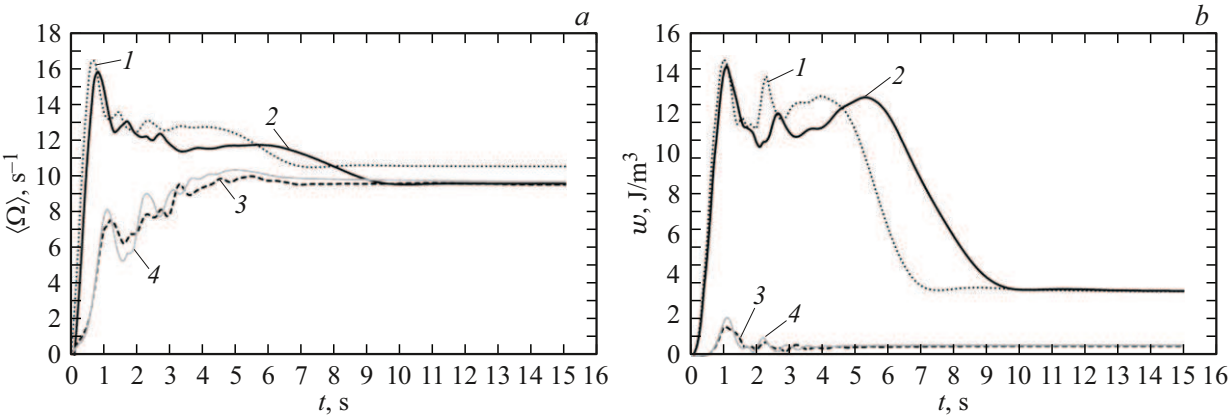


Рис. 9. *a* — зависимость среднего значения полоидальной компоненты ротора $\langle\Omega\rangle$ возбуждаемого течения от времени работы перемешивателя, *b* — зависимость средней по объему плотности кинетической энергии полоидального течения; кривая *1* — перемешиватель 1, кривая *2* — перемешиватель 2, кривая *3* — перемешиватель 3, кривая *4* — перемешиватель 4.

работы) значения ротора скорости возбуждаемого перемешивателями 1 и 2 значительно снижается примерно до уровня, создаваемого перемешивателями 3 и 4, что может быть объяснено тем, что вихревое течение, возбуждаемое вертикальной компонентой силы, наводимой индуктором бегущего поля (в перемешивателях 1 и 2) в пристеночной области, распространяется на весь объем, вовлекая в завихренность большую массу жидкого металла.

На рис. 9, *b* представлены зависимости средней плотности кинетической энергии полоидального течения, возбуждаемого перемешивателями рассматриваемых конфигураций, из которых видно, что интенсивность полоидального течения (отвечающего за конвективную составляющую переноса массы), возбуждаемого перемешивателями 1 и 2, значительно превосходит интенсивность течения, возбуждаемого перемешивателями 3 и 4. Это происходит вследствие того, что в вариантах перемешивателей 1 и 2 полоидальное течение возникает как в результате действия индуктора бегущего поля, так и вследствие вращения жидкости и ее трения о стенки объема („тейлоровские вихри"), в то время как перемешиватели 3 и 4 создают течение в вертикальной плоскости преимущественно за счет возникновения „тейлоровских вихрей" и гораздо меньших вертикальных электромагнитных сил. По оценке средней плотности кинетической энергии можно сделать вывод о том, что по конвективной составляющей переноса массы перемешиватели с наличием индуктора бегущего поля более эффективны, чем перемешиватели 3 и 4 (рис. 9, *b*). Плотность кинетической энергии полоидального течения, возбуждаемого перемешивателем 3, мало отличается от перемешивателя 4. Это говорит о том, что вертикальная составляющая скорости течения, возникающая в этих перемешивателях, не высока.

На рис. 10 представлена картина распределения вертикальной и радиальной компонент вектора скорости в сечении домена жидкого металла, на которой можно заметить, что вихревая структура в перемешивателях 1 и 2 (с индуктором бегущего поля) имеет сложную топологию с отсутствием симметрии относительно центральной оси объема теплого верха. Вместо двух полоидальных вихрей, перемешиватели 1 и 2 возбуждают в основном две более сложные вихревые структуры, расположенные в верхней и нижней частях цилиндра (стрелочками на линиях траекторий движения показано направление движения, рис. 10, *a*, *b*).

На рис. 11 представлены траектории жидких частиц при течениях в теплом верхе и приемной воронке, возбуждаемых перемешивателями 1–4. Из рис. 11 видно, что во всех рассмотренных вариантах жидкость движется по спирали отдельно в верхней и нижней частях цилиндра, но ось этих спиралей в вариантах перемешивателей 1 и 2 не совпадает с осью цилиндра и имеет несколько изгибов. По этой причине распределение вертикальной и радиальной компонент скорости в среднем продольном сечении теплого верха (рис. 10, *a*, *b*) имеет вид одного вихря, и может вводить в заблуждение о топологии течения. В действительности жидкий металл вблизи стенок теплого верха имеет выраженное одинаковое направление, но по искривленной, ввиду перекрестного взаимодействия, спирали, что приводит к картинам, представленным на рис. 10, *a*, *b*.

Описанное выше явление асимметрии течения относительно центральной оси теплого верха возникает вследствие перекрестного взаимодействия бегущего и вращающегося магнитных полей. Данное обстоятельство, с одной стороны, порождает сложное течение жидкого металла, а с другой — приводит к локализации зон перемешивания. Другими словами, подобного рода течение приводит к перемешиванию нижней и верхней областей по отдельности. Полоидальное течение в подобных конструкциях, как считается, улучшает перенос тепла от поверхности металла в теплом верхе к фронту кристаллизации. Однако при наличии структуры, состоящей из двух зон вихрей (рис. 10, *a*, *b*), конвективный

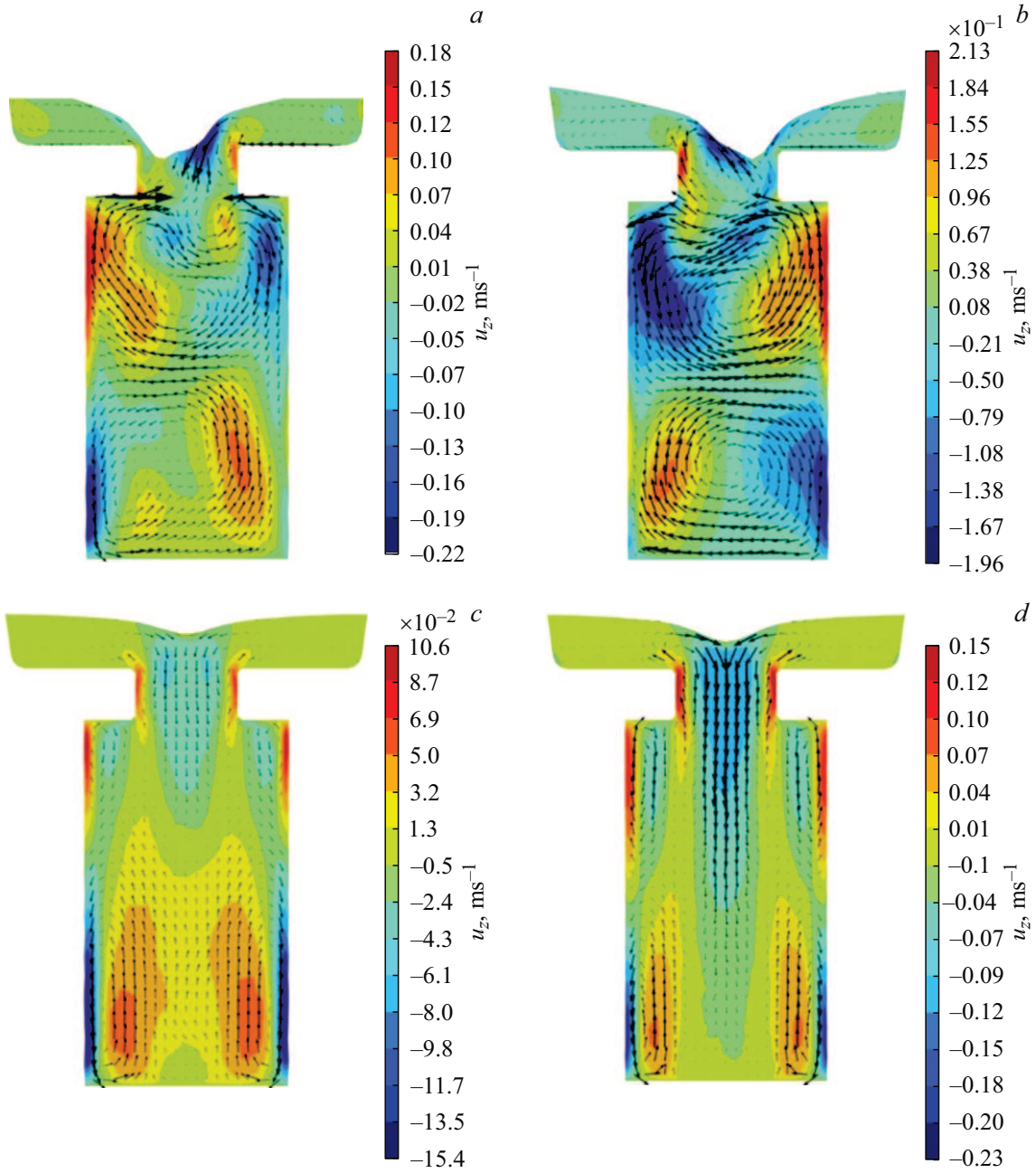


Рис. 10. Распределение вертикальной и радиальной компонент скорости жидкого металла в среднем продольном сечении теплого верха и приемной воронки перемешивателей 1–4: *a* — перемешиватель 1; *b* — перемешиватель 2; *c* — перемешиватель 3; *d* — перемешиватель 4.

перенос тепла от поверхности теплого верха к фронту кристаллизации будет затруднен и преимущественно локализирован в верхней половине теплого верха. Подобное явление наблюдается в экспериментах [5].

Стоит отметить, что картина течения в перемешивателе 1 схожа с вихревой структурой перемешивателя 2, но все же более хаотична. Перенос массы за счет турбулентной диффузии наиболее высок при работе перемешивателя 1 и несколько хуже в перемешивателе 2 (рис. 12, *a*). Менее существенный перенос осуществляют перемешиватели 3 и 4, причем наименьший перенос массы за счет турбулентной диффузии создает перемешиватель 3 (рис. 12, *a*). Похожим образом распределяется среднее значение модуля завихренности течения, создаваемого рассматриваемыми нами перемешивателями (рис. 12, *b*).

Для уменьшения габаритов МГД-перемешивателя, как уже говорилось выше, в настоящей работе был рассмотрен вариант отказа в конструкции перемешивателя от индуктора бегущего поля (рис. 1, перемешиватели 3

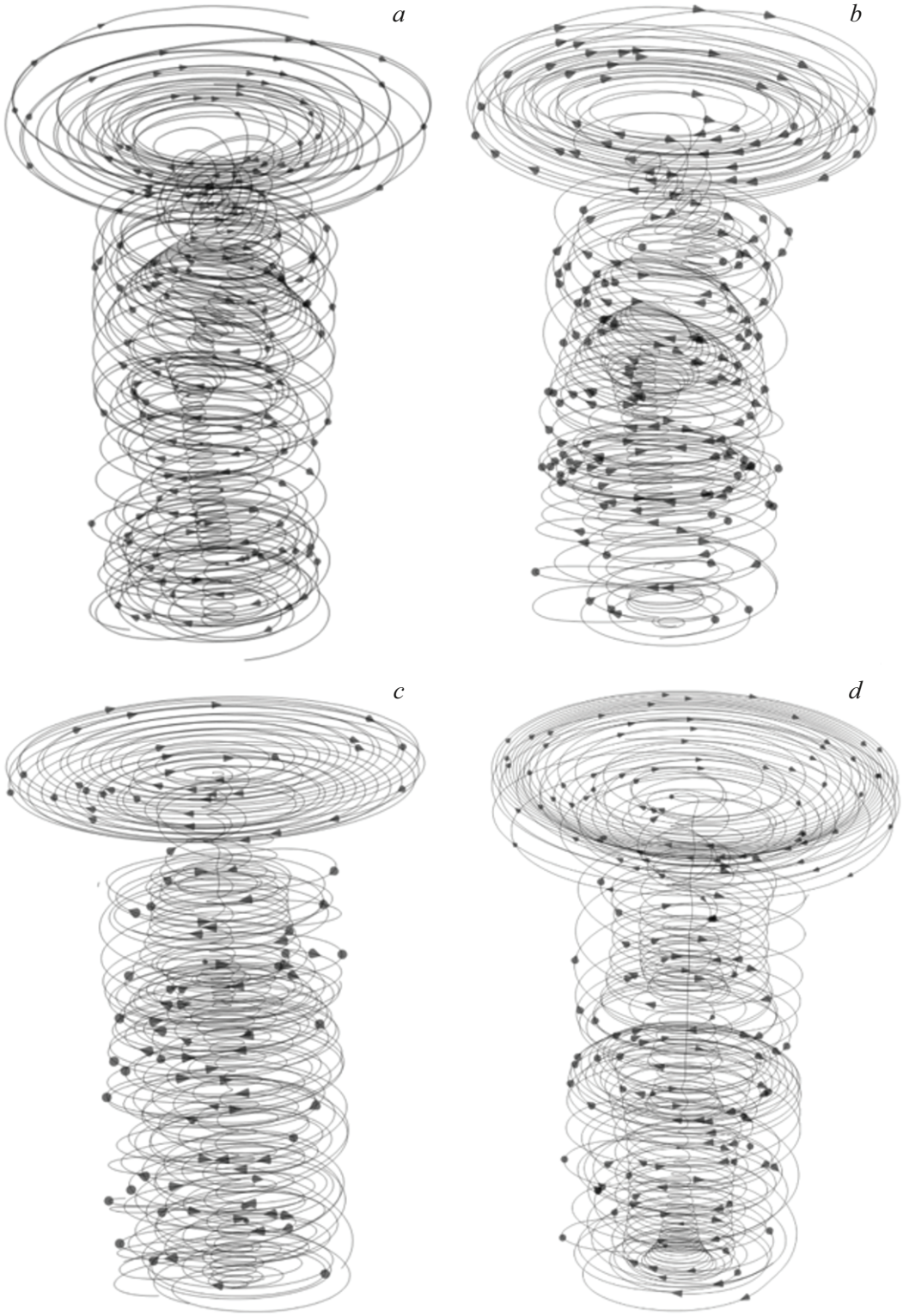


Рис. 11. Линии, касательные к векторам скорости в объеме жидкого металла перемешивателей 1–4: *a* — перемешиватель 1; *b* — перемешиватель 2; *c* — перемешиватель 3; *d* — перемешиватель 4.

и 4). В перемешивателе 4 полюса индуктора вращающегося магнитного поля, кроме тангенциальных электромагнитных сил, возникающих в результате вращения магнитного поля, создают вертикальные силы в жидком металле, обусловленные пульсацией магнитного поля и краевыми эффектами полюсов индуктора. Перемешиватель 3 работает подобно перемешивателю 4, однако его индуктор вращающегося поля за счет наклона своих по-

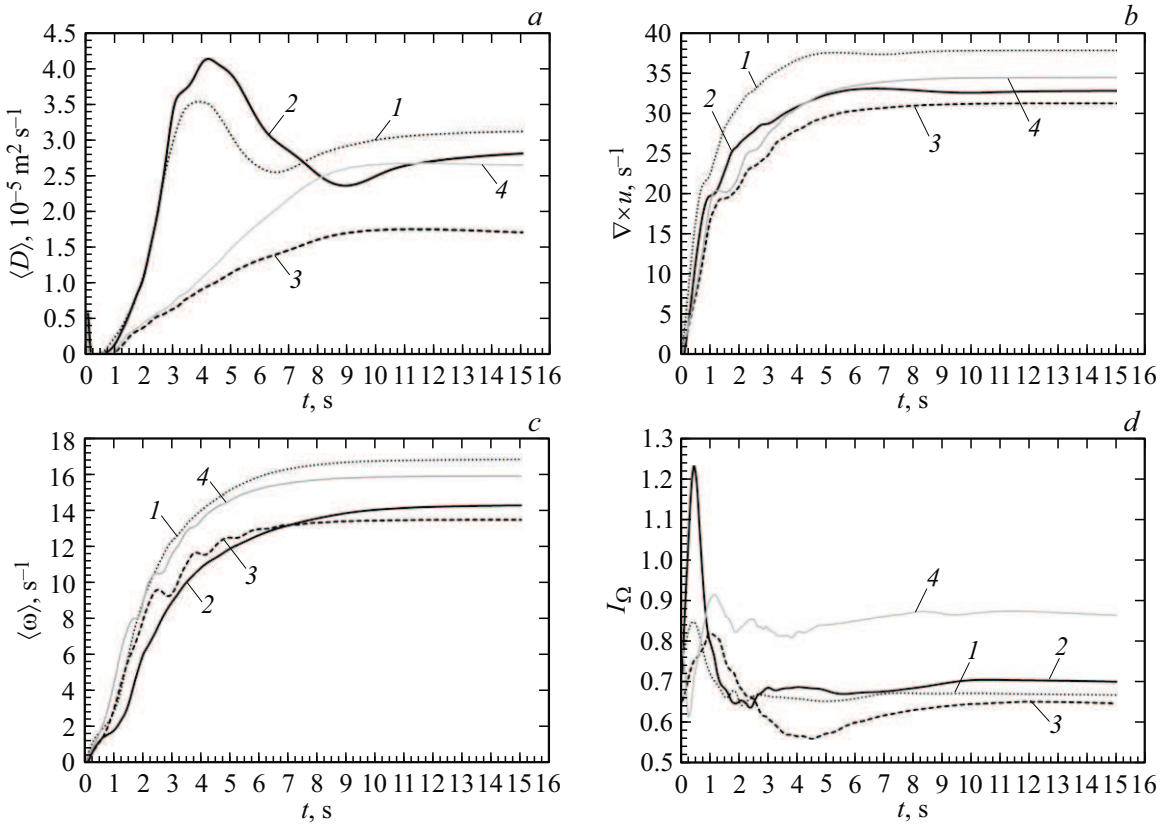


Рис. 12. *a* — зависимость коэффициента турбулентной диффузии в рассматриваемом объеме от времени перемешивания, *b* — зависимость среднего модуля ротора скорости от времени перемешивания, *c* — зависимость угловой скорости вблизи кристаллизатора от времени перемешивания, *d* — зависимость неравномерности распределения среднего модуля ротора.

люсов создает дополнительную вертикальную составляющую электромагнитных сил [12]. В настоящей работе проведена оценка влияния наклона полюсов сердечников на эффективность перемешивания жидкого металла. На рис. 10, *c* можно заметить, что перемешиватель 3 (конструкция которого имеет наклонные сердечники) создает два относительно симметричных полоидальных вихря, расположенных в нижней и в верхней частях теплого верха. Нижний вихрь имеет более вытянутую форму, занимая в высоту большую часть объема, в то время как верхний вихрь значительно менее выражен (в отличие от перемешивателя 4 (рис. 10, *d*)). Наличие одной доминирующей вихревой структуры, более симметричной относительно центральной оси теплого верха, должно положительно влиять на тепломассоперенос в жидком металле от поверхности теплого верха, куда поступает металл, вниз к фронту кристаллизации. Данное течение более активно и должно упорядочивающе воздействовать на форму фронта кристаллизации слитка, что важно для металлургического процесса.

На рис. 10, *c*, *d* видно, что в перемешивателе с наклонными сердечниками картина течения отличается от создаваемой перемешивателем 4 и резко отличается от картины течения в перемешивателях 1 и 2 (рис. 10, *a*, *b*). Из рис. 11, *c*, *d* (а также рис. 10, *c*, *d*) видно, что перемешиватель 3 и 4 возбуждают течение, обеспечивающее перенос массы из области воронки в основную область теплого верха. Вблизи свободной поверхности теплого верха через отверстие в перегородке образуется направленная вглубь объема теплого верха „струя металла“, которая может, с одной стороны, увеличить интенсивность переноса тепла, а с другой — привести к увлечению притока инородных примесей из приемной воронки теплого верха к фронту кристаллизации слитка. Анализируя это явление, можно заметить, что в перемешивателе 3 эта струя имеет меньшую интенсивность и не проникает глубоко в рабочий объем теплого верха (рис. 10, *c*).

Анализ рис. 12, *c* показывает, что наибольшей скоростью вращения металла в придонном слое обладает перемешиватель с двумя трехфазными индукторами. Это объясняется тем, что данная конструкции обладает большими, чем перемешиватели 3 и 4, осевыми размерами (рис. 1), что приводит к увеличенному значению электромагнитной силы в жидком алюминии. Максимальная скорость вращения наблюдается в перемешивателе 1 также в связи с его трехфазной схемой включения, что коррелирует с результатами работы [12].

Примечательно, что наименьшим значением угловой скорости в придонном слое обладает перемешиватель 3.

Это может быть объяснено тем, что в отличие от перемешивателя 4 (рис. 10, *c*, *d*) данная конструкция обеспечивает более выраженную вихревую структуру в нижней части рассматриваемого объема, что означает более интенсивный перенос количества движения с периферии в центр цилиндра.

Перемешиватели 3 и 4 создают на поверхности металла в теплом верхе воронку меньших размеров, чем перемешиватели 1 и 2 (рис. 10). Это может быть объяснено тем, что перемешиватели 3 и 4 имеют только один индуктор вращающегося поля, верхний край которого расположен ниже перегородки в теплом верхе, чем края индукторов в перемешивателях 1 и 2 (рис. 1). В результате эти индукторы за счет полей рассеяния оказывают меньшее силовое воздействие на объем металла в приемной воронке, находящейся выше перегородки в теплом верхе кристаллизатора.

Первые два перемешивателя в отличие от третьего создают в верхней и нижней частях объема хоть и интенсивные, но раздельные вихревые структуры, не обладающие осевой симметрией. Такое течение может затруднять быстрый перенос примеси и тепла из одной части объема теплого верха в другую.

Заключение

На основании исследований, проведенных в рамках принятой математической модели с используемыми допущениями и предложенными параметрами, характеризующими процесс перемешивания жидкого металла, можно оценить эффективность работы рассмотренных конструкций МГД-перемешивателей:

1) средняя завихренность перемешивающего течения в объеме металла, создаваемая всеми рассматриваемыми перемешивателями, близка по величине, однако первый перемешиватель генерирует течение с несколько большим ее значением (рис. 9, *a*);

2) максимальное значение вертикальной скорости жидкого металла в теплом верхе кристаллизатора создают перемешиватели 1 и 2 (рис. 9, *b*);

3) перемешиватели 3 и 4 создают относительно осесимметричное полоидальное течение, в то время как течение, создаваемое перемешивателями 1 и 2, такой симметрией не обладают;

4) перемешиватель 3 создает в металле более однородно распределенную завихренность, что может обеспечивать более быстрое достижение однородности распределения примеси, чем другие рассмотренные нами перемешиватели (рис. 12, *d*);

5)перемешиватель 1 создает в жидком металле турбулентное течение с более высоким, чем у других конструкций, значением турбулентной диффузией примеси (рис. 12, *a*).

Все обозначенные выше явления оказывают непосредственное влияние на теплоперенос и распределение примеси в жидком металле;

6) перемешиватели 1 и 4 создают в области фронта кристаллизации более высокую скорость вращения жидкого металла, чем другие перемешиватели, что непосредственно положительно сказывается на измельчении кристаллической структуры слитка.

Таким образом, исходя из полученных результатов, можно полагать, что из рассмотренных при одинаковых условиях работы перемешиватель 1 является наиболее эффективным. Перемешиватели 2 и 3 менее эффективны, но если наиболее значимым фактором при непрерывном литье слитков является уменьшение габаритов перемешивателей, то конструкции 2, 3 и даже 4 могут быть использованы, при этом для повышения их эффективности вероятно потребуется повысить потребляемую ими мощность.

Следует отметить, что сравнение эффективности перемешивателей, исходя из критериев, характеризующих гидродинамику МГД-перемешивания (рис. 12), и из критериев, характеризующих электродинамику процесса [12], конструкций 1 и 2 показывает похожие результаты.

Проведенное в работе исследование гидродинамических и электродинамических процессов в жидком металле теплого верха кристаллизатора обусловленных работой МГД-перемешивателей, конечно, не могут в полной мере отразить эффективность работы данных конструкций. Тем не менее авторы надеются, что полученные результаты и предложенные параметры для оценки эффективности перемешивания помогут в разработке эффективно работающих конструкций этих устройств.

Финансирование работы

Работа выполнена в соответствии с госбюджетным планом ИМСС УрО РАН „Крупномасштабные течения и теплообмен в проводящей и непроводящей жидкости в условиях мелкомасштабной турбулентности“ № 124012300246-9.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] С.Г. Бочвар. Технология легких сплавов, **1**, 12 (2011).
[2] V.G. Borisov. Light Alloy Technol., **2**, 48 (2016).
[3] S. Denisov, V. Dolgikh, S. Khripchenko, I. Kolesnichenko, L. Nikulin. Magnetohydrodynamics, **50** (4), 407 (2014).
[4] X. Zhang, Y. Wang, D. Liu, Z. Ji, H. Xu, M. Hu, P. Cui. J. Crystal Growth, **543**, 125704 (2020).
[5] С.Ю. Хрипченко. Инженерно-физический журнал, **95** (5), 1147 (2022).
[6] С.Ю. Хрипченко, В.М. Долгих. Вестник Пермского федерального исследовательского центра, **3**, 7 (2022). DOI: 10/7242/2658-705X/2022/3/1
[7] J. Priede, Yu.M. Gelfgat. Magnetohydrodynamics, **32** (3), 272 (1996).

[8] Е.Л. Швыдкий, Б.А. Сокунов, А.С. Бычков, И.В. Соколов. Вопросы электротехнологии, **1**, 20 (2018).
[9] Д.А. Мусаева, В.К. Ильин, В. Гежа, Э. Бааке. Физико-математические науки, **3** (248), 39 (2016). DOI: 10.5862/JPM.248.5
[10] Д.А. Мусаева, В.К. Ильин. *Способ получения непрерывнолитого слитка из сталей и сплавов с пониженной технологической пластичностью С1* (Пат. на изобретение 2656904, Патентное ведомство, Россия, 2018)
[11] М.Ю. Кучинский, М.В. Первухин, Э.Р. Винтер, С.П. Тимофеев. Вопросы электротехнологии, 4, 13 (2021).
[12] С.Ю. Хрипченко, Е.Ю. Тонков. ЖТФ, **95** (8), 1489 (2025).
[13] А.Э. Морев, А.И. Алиферов, В.А. Кузнецов. Электротехника, **6**, 8 (2021).
[14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред* (Наука, Гл. ред. Физматлит, М., 1982), 2-е изд., испр.
[15] H. Branover, E. Golbraikh, A. Kapusta, B. Mikhailovich, I. Dardik, R. Thompson, S. Lesin, M. Khavkin. Magnetohydrodynamics, **42** (2–3), 291 (2006).
[16] E. Golbraikh, A. Kapusta, B. Tilman. Magnetohydrodynamics, **46** (1), 79 (2010).
[17] С.Ю. Хрипченко, Р.И. Халилов, В.Г. Борисов. *Устройство для перемешивания электропроводных жидких сред* (Пат. № 2827190 Заявка № 2024120434 Приоритет изобретения 19 июля 2024 г. Опубликовано: 23.09.2024 Бюл. № 27)
[18] С.Ю. Хрипченко, В.Г. Борисов. *Устройство для перемешивания электропроводных жидких сред* (Пат. № 2830293 Заявка № 2024118853 Приоритет 0438зобретения 04 июля 2024 г. Дата государственной регистрации в Государственном реестре изобретений Российской Федерации 18 ноября 2024 г.)
[19] С.Ю. Хрипченко, В.Г. Борисов, Е.Ю. Тонков. *Устройство для перемешивания электропроводных жидких сред* (Пат. РФ №2843372, в Госреестре изобретений с 14.07.2025)
[20] S.Yu. Khripchenko. J. Engineer. Phys. Thermophys., **95** (5), 1126 (2022). DOI: 10.1007/s10891-022-02577-w
[21] COMSOL Multiphysics® Version 6.2: User's Guide. Stockholm: COMSOL AB, 2023.
[22] S.Yu. Khripchenko, E.Yu. Tonkov. Bull. Russ. Academy Sci.: Phys., **89** (1), (2025, in press). DOI: 10.1134/S1062873825713820