

01

Решение задачи Коши при анизотропной диффузии стохастическими и адаптивными методами

© И.Т. Тожибоев

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
E-mail: ibroxim@gmail.com

Поступило в Редакцию 25 декабря 2025 г.
В окончательной редакции 25 марта 2026 г.
Принято к публикации 27 марта 2026 г.

Рассматривается задача Коши для уравнения анизотропной диффузии. Используется стохастическое представление решения на основе винеровских процессов. В рамках единого подхода анализируются классический метод Монте-Карло и адаптивный стохастический алгоритм. Показано, что применение адаптивных процедур позволяет существенно снизить дисперсию оценок и повысить эффективность вычислений. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические выводы и демонстрируют преимущества предложенного метода.

Ключевые слова: анизотропная диффузия, задача Коши, стохастические методы, метод Монте-Карло, адаптивные алгоритмы.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.12.62986.20612

Задачи диффузии с анизотропными коэффициентами часто возникают в математической физике, теории переноса, теплопроводности, а также при моделировании процессов в неоднородных и направленно-структурированных средах. В отличие от изотропных моделей анизотропная диффузия характеризуется направленной зависимостью интенсивности переноса, что приводит к существенным трудностям при аналитическом и численном исследовании соответствующих краевых и начально-краевых задач. Особый интерес представляют параболические уравнения второго порядка с матричными коэффициентами диффузии, для которых классические детерминированные методы часто оказываются вычислительно затратными или неустойчивыми [1].

Стохастические методы, основанные на вероятностных представлениях решений дифференциальных уравнений, в частности методы Монте-Карло, предоставляют альтернативный подход к решению подобных задач [2,3]. Их важным преимуществом являются слабая зависимость вычислительной сложности от размерности задачи и естественная адаптация к сложной геометрии области. Вместе с тем классический метод Монте-Карло характеризуется медленной сходимостью и высокой дисперсией оценок [4–6]. В последние годы активно развиваются адаптивные стохастические алгоритмы, направленные на снижение дисперсии и повышение эффективности вычислений [7,8], что и составляет основную цель настоящей работы.

Рассмотрим задачу Коши для линейного параболического уравнения второго порядка, описывающего процесс анизотропной диффузии в ограниченной области пространства. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $T > 0$ — фиксированный момент времени. Требуется найти функ-

цию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x, t),$$

$$x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Матрица диффузии $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^d$ предполагается симметричной и равномерно положительно определенной, однако ее элементы могут существенно зависеть от пространственной переменной x , что и определяет анизотропный характер диффузионного процесса. Векторная функция $b(x) = (b_1(x), \dots, b_d(x))$ описывает дрейфовый член и отвечает за направленный перенос вещества или энергии в среде. Функция $f(x, t)$ задает плотность внутренних источников или стоков.

Для корректной постановки стохастического представления предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ являются достаточно гладкими и ограниченными, а начальная функция $u_0(x)$ принадлежит классу непрерывных функций в замыкании области $\bar{\Omega}$. Эти условия обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши в классическом или обобщенном смысле.

В случае ограниченной области Ω рассматривается момент первого выхода случайного процесса за пределы области

$$\tau = \inf\{t > 0 : X_t \notin \Omega\},$$

что позволяет естественным образом учитывать граничные условия в вероятностной формулировке задачи. Такой подход особенно удобен при численном моделировании, поскольку не требует явной дискретизации границы области.

Таким образом, поставленная задача сводится к численному вычислению решения уравнений (1), (2) в условиях анизотропной диффузии с использованием стохастических методов, основанных на моделировании траекторий соответствующего случайного процесса.

Для построения стохастического алгоритма решения задачи Коши рассмотрим случайный процесс X_t , связанный с дифференциальным оператором в правой части уравнения (1). Пусть процесс X_t удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = b(X_t)dt + \sqrt{2A(X_t)}dW_t, \quad (3)$$

где W_t — стандартное d -мерное броуновское движение, $b(x)$ — дрейфовый вектор, а матрица $A(x)$ определяет анизотропную интенсивность диффузии.

Связь между решением уравнения (1) и процессом X_t устанавливается с помощью формулы Фейнмана–Каца. В случае задачи Коши без явных граничных условий решение может быть представлено в виде математического ожидания

$$u(x, t) = E \left[u_0(X_t) + \int_0^t f(X_s, s) ds \right], \quad (4)$$

где математическое ожидание берется по всем реализациям случайного процесса X_t , начинающегося в точке $X_0 = x$.

Формула (4) имеет наглядную интерпретацию: значение решения $u(x, t)$ определяется средним вкладом начального состояния, перенесенного вдоль случайных траекторий, а также накопленным воздействием источников $f(x, t)$ за промежутки времени $[0, t]$. Таким образом, задача решения дифференциального уравнения сводится к вычислению статистических характеристик соответствующего случайного процесса.

Данное стохастическое представление является теоретической основой для применения численных методов Монте-Карло, позволяющих аппроксимировать математическое ожидание (4) с помощью конечного числа случайных траекторий.

Стохастическое представление решения задачи Коши (4) позволяет использовать численный метод Монте-Карло для приближенного вычисления функции $u(x, t)$. Основная идея метода заключается в аппроксимации математического ожидания конечным числом случайных реализаций стохастического процесса.

Пусть $\{X_t^{(k)}\}_{k=1}^N$ — независимые реализации процесса (3), начинающиеся из одной и той же начальной точки $X_0^{(k)} = x$. Тогда приближенное значение решения $u(x, t)$ определяется формулой

$$u_N(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[u_0(X_t^{(k)}) + \int_0^t f(X_s^{(k)}, s) ds \right], \quad (5)$$

где N — число стохастических траекторий.

Для численной реализации формулы (5) временной интервал $[0, t]$ разбивается на равномерную сетку с шагом Δt , а стохастический процесс аппроксимируется схемой Эйлера–Маруямы

$$X_{n+1}^{(k)} = X_n^{(k)} + b(X_n^{(k)})\Delta t + \sqrt{2A(X_n^{(k)})}\Delta W_n^{(k)}, \quad (6)$$

где $\Delta W_n^{(k)}$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δt .

Метод Монте-Карло обладает рядом преимуществ, таких как простота реализации и слабая зависимость вычислительной сложности от размерности задачи. Однако дисперсия статистической оценки (5) убывает пропорционально $N^{-1/2}$, что приводит к медленной сходимости и необходимости использования большого числа траекторий для достижения приемлемой точности.

Особенно ярко этот недостаток проявляется при моделировании анизотропных диффузионных процессов, где неравномерность коэффициентов диффузии приводит к значительному разбросу траекторий. Данное обстоятельство естественным образом приводит к необходимости использования модифицированных стохастических алгоритмов, ориентированных на снижение дисперсии оценок.

Как было отмечено выше, классический метод Монте-Карло характеризуется медленной скоростью сходимости и высокой дисперсией статистической оценки, особенно в случае анизотропных диффузионных процессов. Для повышения эффективности численного моделирования предлагается адаптивный стохастический метод, основанный на динамическом перераспределении вычислительных ресурсов.

Основная идея адаптивного подхода заключается в том, что вклад различных стохастических траекторий в итоговую оценку решения существенно различается. В областях фазового пространства, где наблюдается повышенная чувствительность решения или резкое изменение коэффициентов диффузии, требуется более плотное статистическое усреднение.

Пусть на первом этапе моделируется ограниченное число N_0 стохастических траекторий, на основе которых вычисляется предварительная оценка дисперсии

$$\sigma^2(x, t) = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \left(\Phi^{(k)}(x, t) - \bar{\Phi}(x, t) \right)^2, \quad (7)$$

где

$$\Phi^{(k)}(x, t) = u_0(X_t^{(k)}) + \int_0^t f(X_s^{(k)}, s) ds, \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N_0} \Phi^{(k)}.$$

На основе оценки (7) строится адаптивная стратегия увеличения числа траекторий в тех временных интервалах или пространственных областях, где дисперсия превышает заданный порог ε^2 . Дополнительные траектории

моделируются только в этих областях, что позволяет существенно снизить общие вычислительные затраты.

Итоговая адаптивная оценка решения принимает вид

$$u_{ad}(x, t) = \sum_{i=1}^M w_i \left[\frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \Phi_i^{(k)}(x, t) \right], \quad (8)$$

где M — число адаптивных поддоменов, N_i — количество траекторий в i -м поддомене, а коэффициенты w_i выбираются таким образом, чтобы сохранялось несмещенное статистическое усреднение.

Предложенный метод сохраняет стохастическую интерпретацию решения и не требует изменения базовой схемы интегрирования стохастического дифференциального уравнения. При этом достигается существенное уменьшение дисперсии по сравнению с классическим методом Монте-Карло при сопоставимых вычислительных затратах. Здесь приводятся результаты численных экспериментов, направленных на сравнение эффективности классического метода Монте-Карло и предложенного адаптивного стохастического метода при решении задачи Коши для уравнения анизотропной диффузии.

Рассматривается задача в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с однородными граничными условиями и заданной начальной функцией $u_0(x)$. Коэффициенты диффузии выбираются таким образом, чтобы обеспечивать выраженную анизотропию процесса, что существенно усложняет численное моделирование.

Стохастические траектории моделируются с использованием схемы Эйлера–Маруямы с фиксированным шагом по времени Δt . Во всех экспериментах используются одинаковые параметры дискретизации, что обеспечивает корректность сравнения методов.

Для оценки точности численного решения используется относительная среднеквадратичная ошибка

$$\text{Err}(t) = \left(E |u_{num}(x, t) - u_{ref}(x, t)|^2 \right)^{1/2}, \quad (9)$$

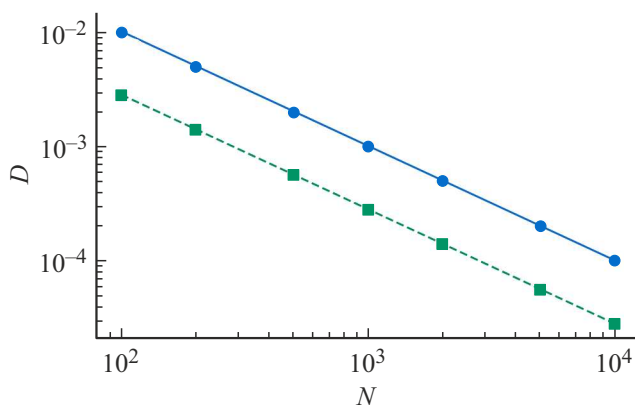


Рис. 1. Зависимость дисперсии оценки D от числа траекторий N (в двойном логарифмическом масштабе). Сплошная линия — классический метод Монте-Карло, штриховая — адаптивный стохастический метод.

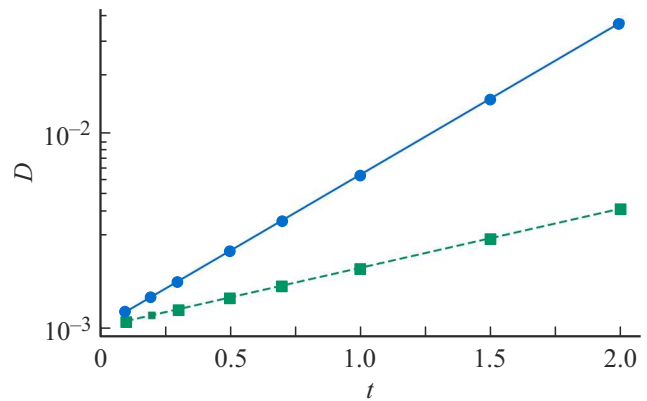


Рис. 2. Зависимость дисперсии от времени t при $N = 1000$ (в полулогарифмическом масштабе). Сплошная линия — классический метод Монте-Карло, штриховая — адаптивный стохастический метод. На больших временах, где анизотропия наиболее выражена, преимущество адаптивного метода проявляется значительно.

где u_{num} — численное решение, полученное стохастическим методом, а u_{ref} — эталонное решение, вычисленное с использованием большого числа траекторий.

Результаты вычислений показывают, что при одинаковом общем числе моделируемых траекторий адаптивный стохастический метод обеспечивает существенно меньшую дисперсию по сравнению с классическим методом Монте-Карло, особенно на больших временах, где влияние анизотропии наиболее выражено (рис. 1, 2). Анализ вычислительной эффективности, основанный на измерении суммарного процессорного времени, показывает, что адаптивный подход позволяет достигать заданного уровня точности при меньших вычислительных затратах (см. таблицу).

Выигрыш по времени достигается за счет перераспределения числа стохастических траекторий в областях с повышенной дисперсией, в то время как в классическом методе Монте-Карло вычислительные ресурсы распределяются равномерно. Проведенные численные эксперименты подтверждают теоретические выводы и показывают, что адаптивный стохастический метод сохраняет несмещенность оценки решения и одновременно снижает дисперсию без увеличения вычислительной сложности алгоритма.

В работе в рамках единого стохастического подхода рассмотрено решение задачи Коши для уравнения анизотропной диффузии на основе вероятностного представления решения. Показано, что классический метод Монте-Карло и предложенный адаптивный стохастический алгоритм являются последовательными этапами единой вычислительной схемы, при этом адаптивный метод позволяет существенно снизить дисперсию оценок и повысить вычислительную эффективность без нарушения корректности стохастического представления. Результаты численных экспериментов подтверждают преимущество адаптивного подхода, особенно в условиях

Вычислительные затраты для достижения заданной точности ε (параметры: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ — двумерная область (единичный квадрат), матрица диффузии $D_{11} = 2.0$, $D_{22} = 0.5$, схема Эйлера–Маруямы, $\Delta t = 0.01$)

ε	Число траекторий N		Время, s		Экономия, %
	Классический метод Монте-Карло	Адаптивный стохастический метод	Классический метод Монте-Карло	Адаптивный стохастический метод	
10^{-1}	500	180	0.8	0.3	63
$5 \cdot 10^{-2}$	2000	620	3.2	1.1	66
10^{-2}	50 000	12 500	80	21	74
$5 \cdot 10^{-3}$	200 000	43 000	320	72	77

выраженной анизотропии, что делает предложенный метод перспективным для практического моделирования процессов переноса в анизотропных средах.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] С.М. Ермаков, В.В. Некруткин, А.А. Сипин, *Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики* (Наука, М., 1980).
- [2] В.С. Владимиров, *Успехи математических наук*, **15** (4), 129 (1960).
- [3] И.М. Соболев, *Численные методы Монте-Карло* (Наука, М., 1973).
- [4] Г.А. Михайлов, *Докл. АН*, **343** (3), 306 (1995).
- [5] С.М. Абдурахмонов, О.Х. Кулдашов, И.Т. Тожибоев, Б.Х. Тургунов, *Письма в ЖТФ*, **45** (4), 11 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.04.47328.17590 [S.M. Abdurakhmonov, O.Kh. Kuldashov, I.T. Tozhiboev, B.Kh. Turgunov, *Tech. Phys. Lett.*, **45**, 132 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019020214].
- [6] С.Л. Шишигин, В.Е. Мещеряков, *Письма в ЖТФ*, **41** (6), 34 (2015). [S.L. Shishigin, V.E. Meshcheryakov, *Tech. Phys. Lett.*, **41**, 273 (2015). DOI: 10.1134/S106378501503027X].
- [7] Г.С. Макеева, в сб. *Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: Материалы XVII Всероссийской с международным участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов*, под ред. И.В. Бойкова (Изд-во ПГУ, Пенза, 2023), с. 3–13.
- [8] А.А. Липовский, А.В. Омельченко, М.И. Петров, *Письма в ЖТФ*, **36** (22), 9 (2010). [A.A. Lipovskii, A.V. Omelchenko, M.I. Petrov, *Tech. Phys. Lett.*, **36**, 1028 (2010). DOI: 10.1134/S1063785010110167].