

Дифракция монохроматических волн и сверхкоротких импульсов на графеновых решетках в магнитном поле

© А.М. Лерер,¹ Г.С. Макеева,² И.Н. Иванова,¹ В.И. Кравченко¹

¹ Южный федеральный университет,
344090 Ростов-на-Дону, Россия

² Пензенский государственный университет,
440026 Пенза, Россия
e-mail: lerer@sfedu.ru

Поступило в Редакцию 17 декабря 2025 г.

В окончательной редакции 17 декабря 2025 г.

Принято к публикации 17 декабря 2025 г.

Рассмотрена дифракция электромагнитных волн на одномерной квазипериодической дифракционной решетке, образованной графеновыми лентами. Магнитное поле приложено перпендикулярно плоскости подложки. В основе теоретических исследований переход с помощью преобразования Пуассона от спектрального представления полей периодической решетки к пространственному представлению квазипериодической. Исследована перестройка частоты плазмонного резонанса (ПР) магнитным полем, поворот плоскости поляризации отраженной и прошедшей волны, наличие дополнительных ПР.

Ключевые слова: графен, метаповерхность, дифракционная решетка, антенная решетка, интегральные уравнения, преобразование Пуассона.

DOI: 10.61011/JTF.2026.05.62762.336-25

Введение

Свойства графена в магнитном поле достаточно хорошо описываются моделью Друде для плазмы в магнитном поле [1]. Отличные от нуля элементы матрицы проводимости σ имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{2D}{\pi} i \frac{\omega + i/\tau}{\omega_B^2 - (\omega + i/\tau)^2}, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{2D}{\pi} \frac{\omega_B}{\omega_B^2 - (\omega + i/\tau)^2}, \quad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy},\end{aligned}\quad (1)$$

где ω — циклическая частота, $D = 2\sigma_0 E_F / \hbar$, $\sigma_0 = 6.08 \cdot 10^{-5} \text{ S}$, $\hbar$ — приведенная постоянная Планка, E_F — энергия Ферми, $\omega_B = eBv_F^2/E_F$ — циклическая циклотронная частота, B — магнитная индукция, $v_F = 10^6 \text{ m/s}$ — скорость Ферми, τ — время релаксации. Погрешность модели без магнитного поля по сравнению с формулой Кубо [2] не превышает 5% до 25 THz [3].

В терагерцовом и ближнем ИК диапазонах циклотронная частота ω_B может равняться частоте плазмонных резонансов, что значительно увеличивает взаимодействие электромагнитной волны с графеновой метаповерхностью. В связи с этим появилось новое научное направление — магнитоплазмоника.

Существование циклотронного резонанса в графене экспериментально показано в работах [4,5], поэтому в THz и ближнем ИК диапазонах можно магнитным полем регулировать частоту плазмонного резонанса [3,5–10], плоскость поляризации [8,11]. Одна из распространенных конструкций графеновых метаповерхностей — дифракционные решетки (ДФР) [9,12].

Эффективный метод численного моделирования графенового слоя с магнитным смещением в магнитном поле представлен в [13]. Эффект анизотропии поверхностной проводимости моделируется и учитывается в рамках рекурсивной свертки в конечно-разностном алгоритме во временной области (FDTD).

Строгий аналитический метод анализа решетки графеновых лент с магнитным смещением предложен в [14]. Метод основан на интегральных уравнениях, описывающих индуцированные поверхностные токи в решетке копланарных графеновых лент. Полученные результаты предсказывают резонансные спектральные эффекты. Получено аналитическое решение в замкнутой форме для фарадеевского вращения в графеновых лентах с магнитным смещением.

В [15] численный метод на основе Фурье в формулировке линии передачи (TLF) обобщается для анализа многослойных периодических структур на основе магнитно-смещенного графена. Приближенное граничное условие, предложенное для быстрого модального метода Фурье, разработанного для периодических графеновых решеток, модифицируется для анализа таких структур.

В [16] представлен усовершенствованный алгоритм итерационного процесса на основе анизотропной волновой концепции (WCIP) для анализа нового типа перестраиваемого графенового соединителя в THz-диапазоне при различных физических параметрах графена. Благодаря новой методике реализации анизотропных граничных условий в методе WCIP анизотропная матрица поверхностной проводимости интегрирована в этот алгоритм без использования объемной дискретизации.

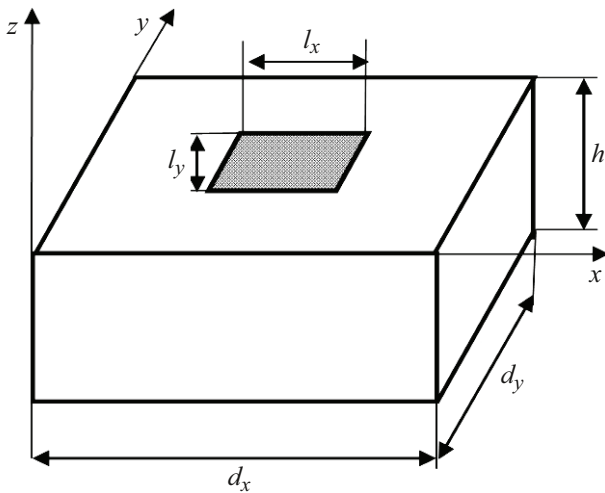


Рис. 1. Элементарная ячейка дифракционной решетки.

Результаты численного моделирования показывают, что характеристики соединителя можно контролировать, изменяя химический потенциал и магнитное поле.

Настоящая работа — продолжение работы [3], в которой теоретически исследована дифракция на периодической графеновой ДФР (рис. 1). К ДФР приложено постоянное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости подложки. В основе исследований [3] численно-аналитическое решение двух типов интегродифференциальных уравнений — парных сумматорных относительно токов на полосках и объемных интегродифференциальных относительно напряженности электрического поля внутри полосок.

Объект исследования — квазипериодическая ДФР, образованная конечным числом полосок. Метод перехода от двумерно-периодической ДФР к квазипериодической описан в [17] — переход от спектрального представления полей периодической решетки к пространственному представлению квазипериодической.

Цель работы — модификация и верификация метода [17] для расчета 1D-квазипериодической ДФР, образованной графеновыми лентами ($l_y \rightarrow \infty$), исследования эффекта Керра — поворота плоскости поляризации при отражении волны от ДФР.

Пусть графеновые ленты лежат в плоскости $z = 0$. Их поверхность в пределах элементарной ячейки обозначим через S . На рис. 1 изображен один прямоугольник, но в разработанной программе их число произвольное. Поэтому S — это поверхность всех полосок. Пусть заданы плотности токов на полосках $\mathbf{J}$. Тогда можно найти электромагнитное поле, создаваемое этими токами. В частности, [3]:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -iZ_0 \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(0, z) \mathbf{j}_{mn} \times \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)], \quad (2)$$

$$\mathbf{j}_{mn} = \int_S \mathbf{J}(x', y') [-i(\alpha_m x' + \beta_n y')] ds', \quad \mathbf{J}(x', y')$$

— плотность поверхностных токов на полосках, $\mathbf{g}_{mn}(z, z')$ — члены двумерного ряда Флоке тензорной функции Грина [3, 18],

$$\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{y}, z, z') = \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(z, z') \times \exp[i(\alpha_m \bar{x} + \beta_n \bar{y})], \quad (3)$$

$\bar{z} = x - x'$, $\bar{y} = y - y'$, $\alpha_m = \frac{2m\pi}{d_x} + k_x$, $\beta_n = \frac{2n\pi}{d_y} + k_y$, k_x, k_y — компоненты волнового вектора $\mathbf{k}$, Z_0 — волновое сопротивление вакуума.

Для перехода к конечной (не периодической) решетке нужно в (1), (2) ряды Флоке заменить на интегралы Фурье, т. е.

$$\frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\alpha_m, \beta_n) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

В результате получим парные интегральные уравнения, которые решаются аналогично решению парных сумматорных уравнений (ПСУ) [3]. При этом возникают две проблемы. Первая, численное интегрирование более сложная задача. Мы использовали простейшую формулу прямоугольников, при этом интегрирование свелось к квадратурным формулам типа рядов Флоке (2), (3), но в которых d_x, d_y не периоды, а параметры квадратуры. При $d_x \gg \lambda, d_y \gg \lambda$ квадратуры быстро сходятся. Вторая проблема более сложная — компьютерное время пропорционально квадрату числа полосок в ДФР. Поэтому для решения этой проблемы использовался способ [17].

Применим к (2), (3) преобразование Пуассона. Обозначим для краткости

$$\mathbf{F}(\alpha_m, \beta_n) = \mathbf{g}_{mn}(0, z) \mathbf{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= -iZ_0 \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\alpha_m, \beta_n) = \\ &= -iZ_0 \frac{1}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[2\pi i(m\mu + nv)] \\ &\quad \times \mathbf{F}(\alpha(m), \beta(n), x, y, z) d\mu d\nu. \end{aligned}$$

После замены переменных получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp[-i(\mu k_x d_x + \nu k_y d_y)] \\ &\quad \times \mathbf{G}(\mu d_x, \nu d_y), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{G}(\mu d_x, \nu d_y, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\mu d_x \alpha + \nu d_y \beta)] \mathbf{F}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (5)$$

С физической точки зрения (2) — представление дифрагированного поля в виде ряда по пространственным гармоникам ДФР, а (4) — сумма полей, дифрагированных на полосках каждой элементарной ячейки ДФР. Положим в (5) $|\mu| \leq M$, $|\nu| \leq N$. В этом случае получим выражение для дифрагированного поля, создаваемого $(2M+1)(2N+1)$ элементарными ячейками в предположении, что токи на полосках такие же, как и у бесконечной ДФР, т.е. для решения дифракционной задачи по-прежнему рассчитывается бесконечная ДФР с числом полосок, размещенных в одной элементарной ячейке.

Основная проблема — вычисление интегралов в (4) в дальней зоне $kr \rightarrow \infty$. Для этого используем асимптотику интеграла [19]:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \exp(-\gamma|z|) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \sim ik \cos \theta f(-k \sin \theta \cos \varphi, -k \sin \theta \sin \varphi) \exp[-ikr] \frac{1}{2\pi r},$$

где r, θ, φ — координаты точки наблюдения в сферической системе координат.

В результате получим для поля в дальней зоне

$$E(r, \varphi, \theta) \sim \frac{\exp(-ikr)}{r} \Phi(\varphi, \theta),$$

где

$$\Phi(\varphi, \theta) = ik \cos \theta \sum_{\mu=-M}^M \sum_{\nu=-N}^N \times \exp[i(\mu d_x(\alpha + k_x) + \nu d_y(\beta + k_y))] \tilde{\mathbf{E}}(\alpha, \beta),$$

$\alpha = -k \sin \theta \cos \varphi$, $\beta = -k \sin \theta \sin \varphi$. Поле в дальней зоне

$$\Phi_\theta = \cos \theta (\Phi_x \cos \varphi + \Phi_y \sin \varphi) - \Phi_z \sin \theta,$$

$$\Phi_\varphi = -\Phi_x \sin \varphi + \Phi_y \cos \varphi.$$

Для 1D ДФР ряд по ν в (4) отсутствует

$$\mathbf{E}(x, z) = \sum_{\mu=-M}^M \exp[-i\mu k_x d_x] \mathbf{H}(\mu d_x, x, z),$$

$$\mathbf{H}(\mu d_x, x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\mu d_x \alpha] \mathbf{F}(\alpha, x, z) d\alpha.$$

Асимптотику интеграла находим методом перевала. Для отраженной волны

$$I(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \frac{\exp(i\alpha x - \gamma z)}{\gamma} d\alpha \sim 2if(\alpha_0) \frac{1}{\sqrt{kr\pi}} \times \exp\left(-ikr + i\frac{\pi}{4}\right),$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha_0 = -k \sin \theta$, $f(\alpha) = \kappa \exp[i\mu d_x \alpha] \tilde{\mathbf{E}}(\alpha)$.

В настоящей работе приведены результаты для отражения волны от одномерно-периодических ДФР, у которых $l_y \rightarrow \infty$. Плоскость падения перпендикулярна графеновым лентам — $\varphi = 0$. Обозначения поляризации падающей волны как в оптике: p -поляризация — вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x, z)$ перпендикулярен графеновым лентам, а вектор $\mathbf{H}(x, z)$ параллелен, s -поляризация — вектор $\mathbf{H}(x, z)$ перпендикулярен графеновым лентам, вектор $\mathbf{e}(x, z)$ параллелен. При отсутствии магнитного поля в 1D ДФР отраженная и прошедшая волны не меняют поляризацию.

Параметры подложки — слой толщиной $100 \mu\text{m}$ с показателем преломления $n = 1.5$, полубесконечный диэлектрик с $n = 1.77$. Ширина графеновых лент $l_x = 40 \mu\text{m}$. Параметры графена (кроме рис. 4) $E_F = 0.25 \text{ eV}$, $\tau = 1 \text{ ps}$.

Для того чтобы сравнить диаграммы рассеяния (ДР) при разном числе полосок N на рисунках представлены значения Φ/N .

На рис. 2 приведено сравнение двух методов расчета отраженных полей в дальней зоне 1d ДФР, p -поляризация. Расстояние между центрами лент — $d_x = 50 \mu\text{m}$, угол падения 30° , $B = 0.5 \text{ T}$, частота $f = 1 \text{ THz}$ выбрана близкой к частоте плазмонного резонанса бесконечной ДФР. Φ_x — компонента ДР в плоскости падения, а Φ_y в ортогональной плоскости. Φ_y нормированы на максимум ДР основной поляризации.

На рис. 2 видно, что даже для ДФР из пяти лент два способа расчета ДН конечной ДФР близки, а для ДФР из 11 лент практически совпадают. Следует отметить, что порядок СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений) в первом способе в N раз больше, чем во втором. Поэтому результаты расчетов, приведенные на рис. 6–8, получены вторым способом.

На рис. 3, 4 приведены результаты для бесконечной ДФР с периодом $d = 50 \mu\text{m}$ при двух значениях энергии Ферми. Рисунки слева — s -поляризация падающей волны, справа — p -поляризация. Сплошные линии — компоненты напряженности электрического поля, направление которых совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля падающей волны, штриховые — кросс-поляризация. Амплитуда падающей волны полагается равна единице. Угол падения 55° . Цифры на кривых — значения $B, [\text{T}]$. Видно, что угол поворота плоскости поляризации отраженной волны

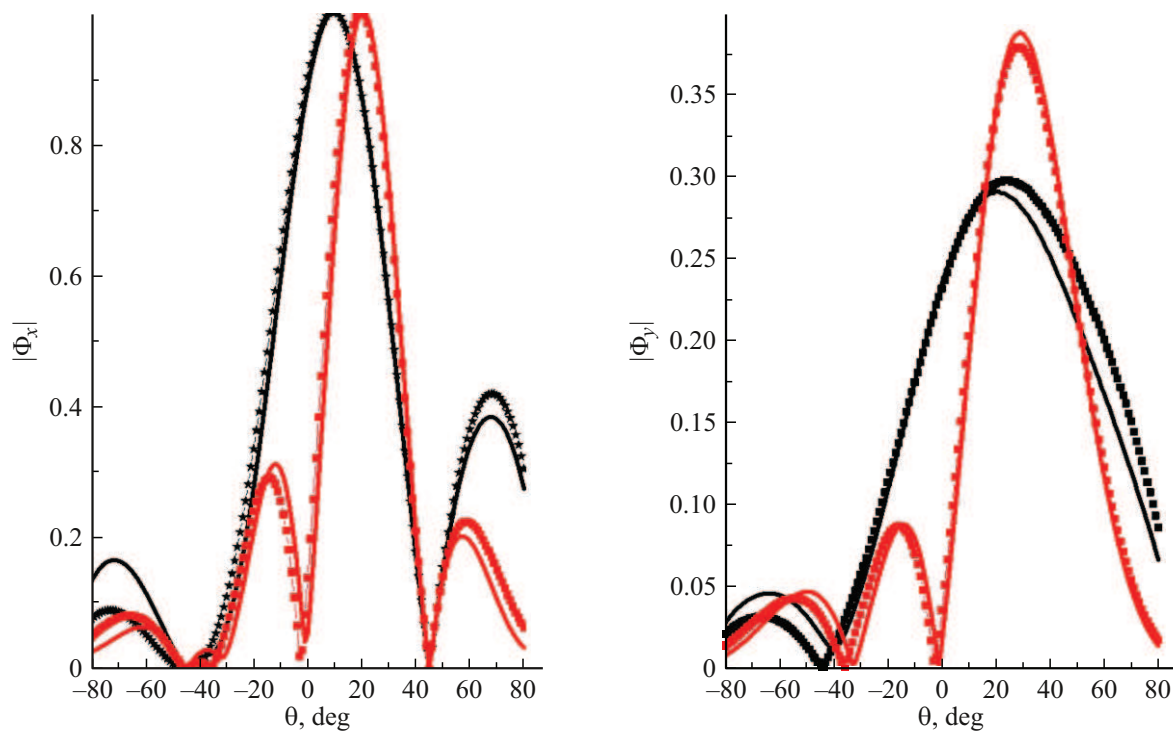


Рис. 2. Сравнение двух методов расчета. Число лент $N = 5$ (черные кривые) и $N = 11$ (красные). Линии без символов — первый способ, с символами — второй.

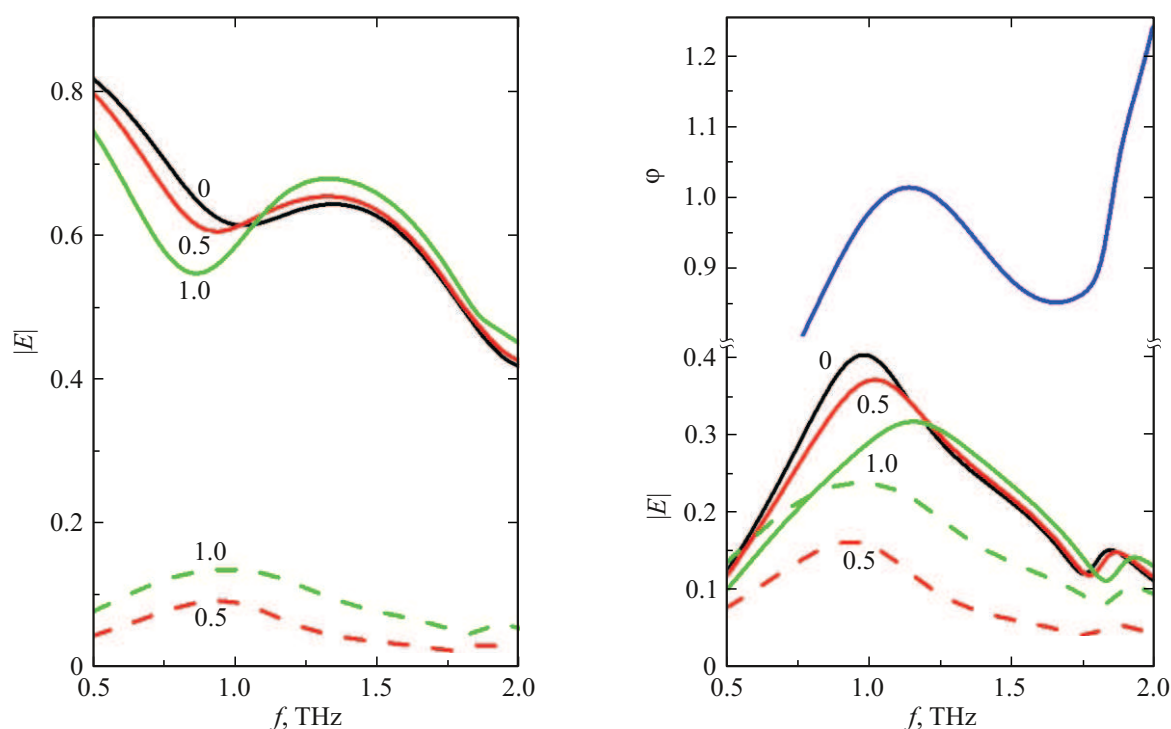


Рис. 3. Амплитуда волны, отраженной от периодической ДФР. $E_F = 0.25$ eV.

больше для p -поляризации, у которой имеется плазменный резонанс поперечного тока. Для s -поляризации у ДФР в магнитном поле тоже появляется поперечный ток, но плазменный резонанс выражен слабо. Параметр

φ — сдвиг фазы между E_x и E_y . Отраженная волна эллиптически поляризована. Изменяя величину E_F , B можно добиться круговой поляризации отраженной волны. При $B = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ и, следовательно, частота плазменного

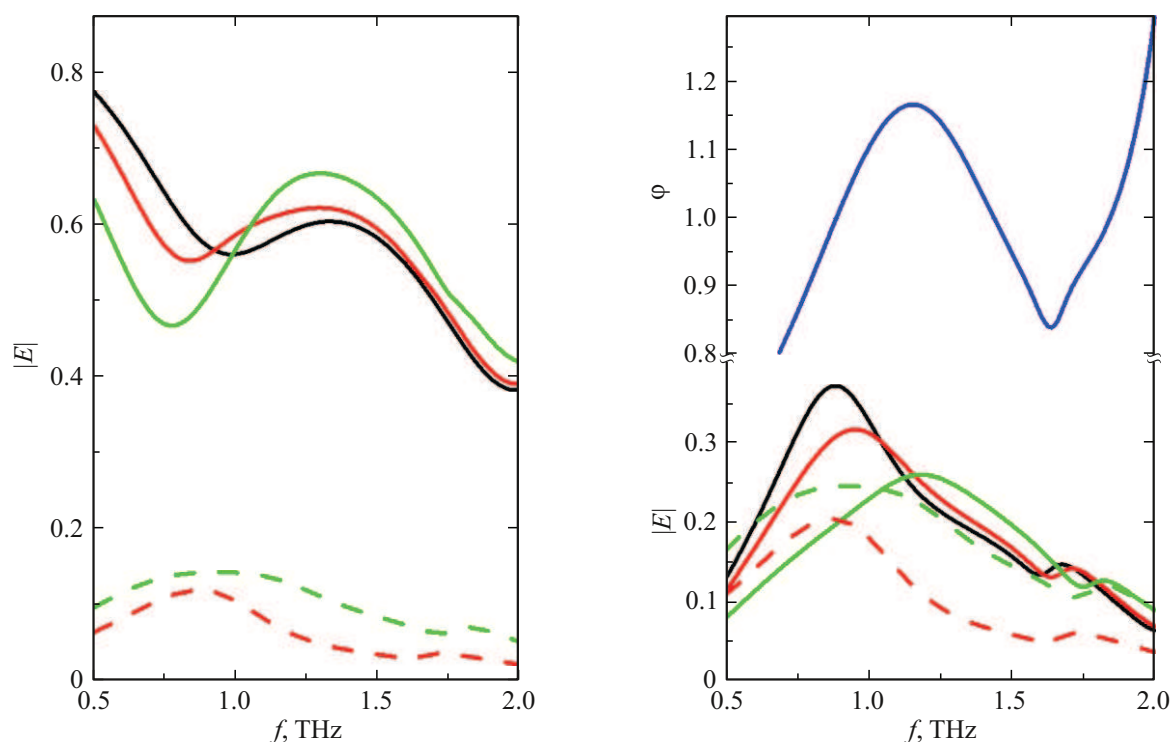


Рис. 4. Амплитуда волны, отраженной от периодической ДФР. $E_F = 0.2$ eV. Обозначения кривых как на рис. 3.

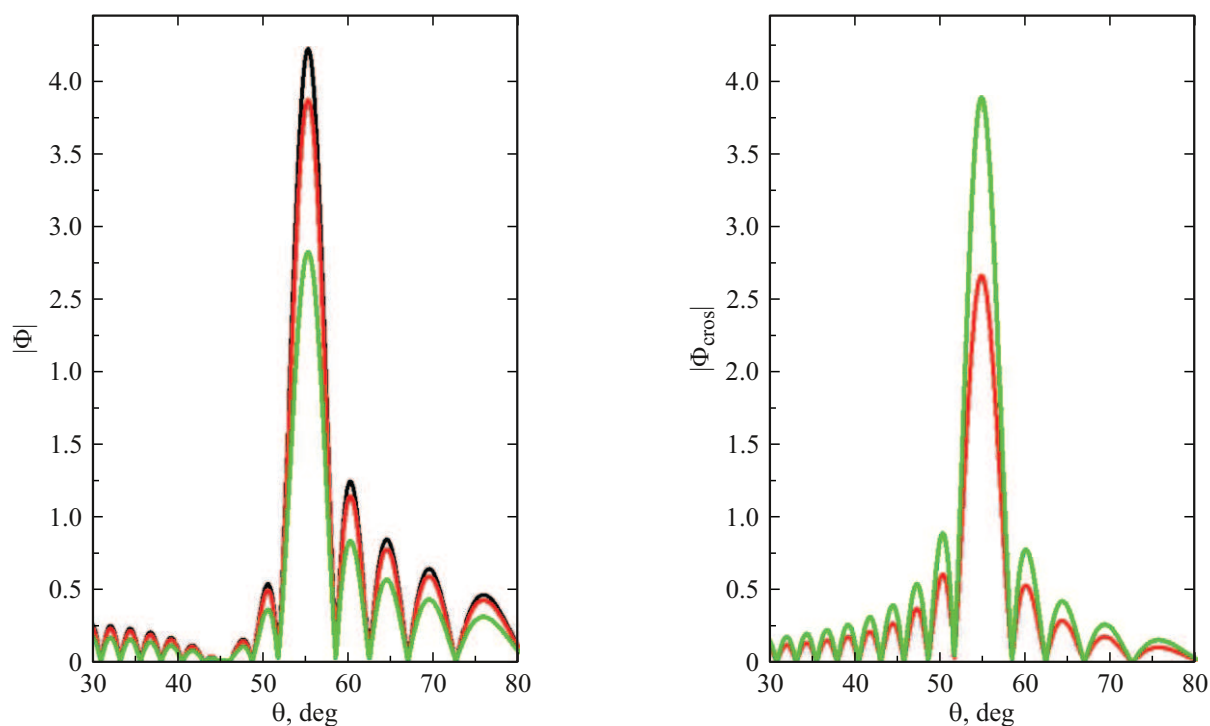


Рис. 5. Диаграмма рассеяния ДФР из 101-й полосы при различных B, T : 0 — черные, 0.5 — красные, 1 — зеленые кривые. $f = 1.1$ THz.

резонанса уменьшается с уменьшением E_F (1). При $B \neq 0$ появляется конкурирующий процесс — увеличение циклотронной частоты ω_B .

На рис. 5–7 представлены результаты для дифракции только p -поляризованной волны. Угол падения 55° (кроме рис. 8) близок углу Брюстера, равному 56° . На

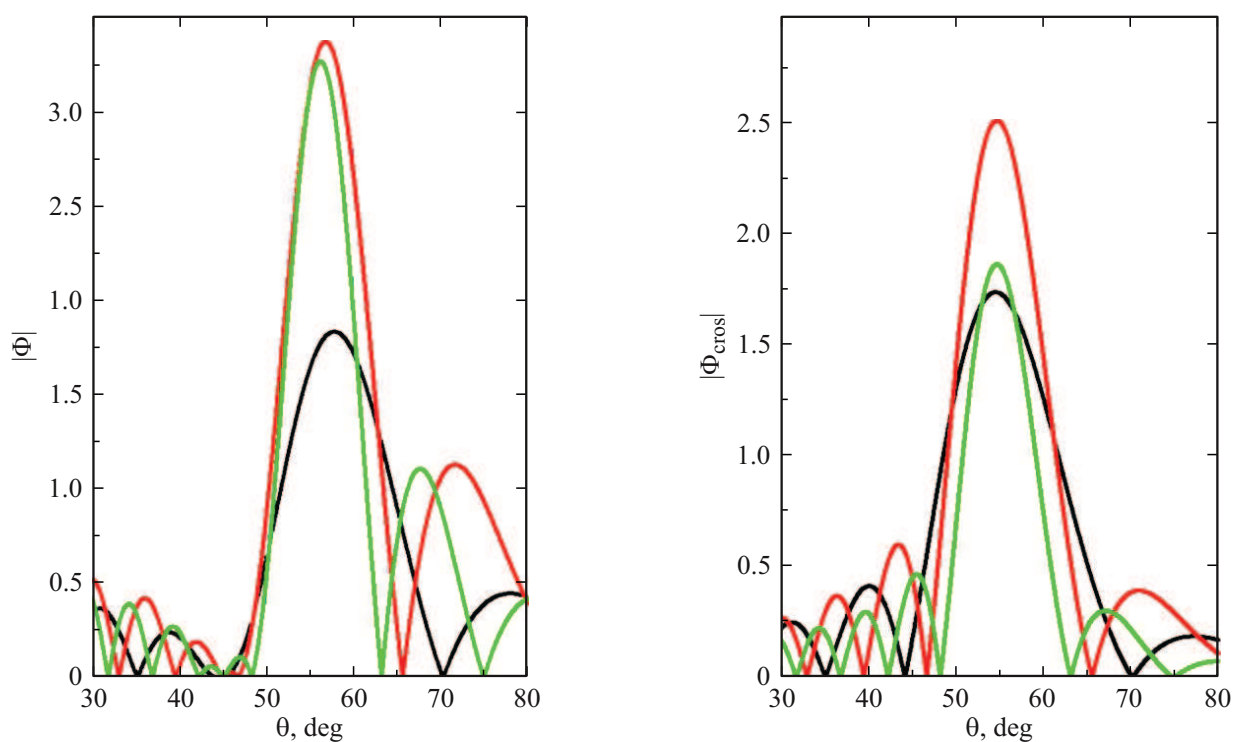


Рис. 6. Диаграмма рассеяния ДФР из 41-й полоски при разных частотах. $B = 0.5$ Т. f , THz: 0.75 — черные, 1.0 — красные, 1.25 — зеленые кривые. $d_x = 80 \mu\text{m}$.

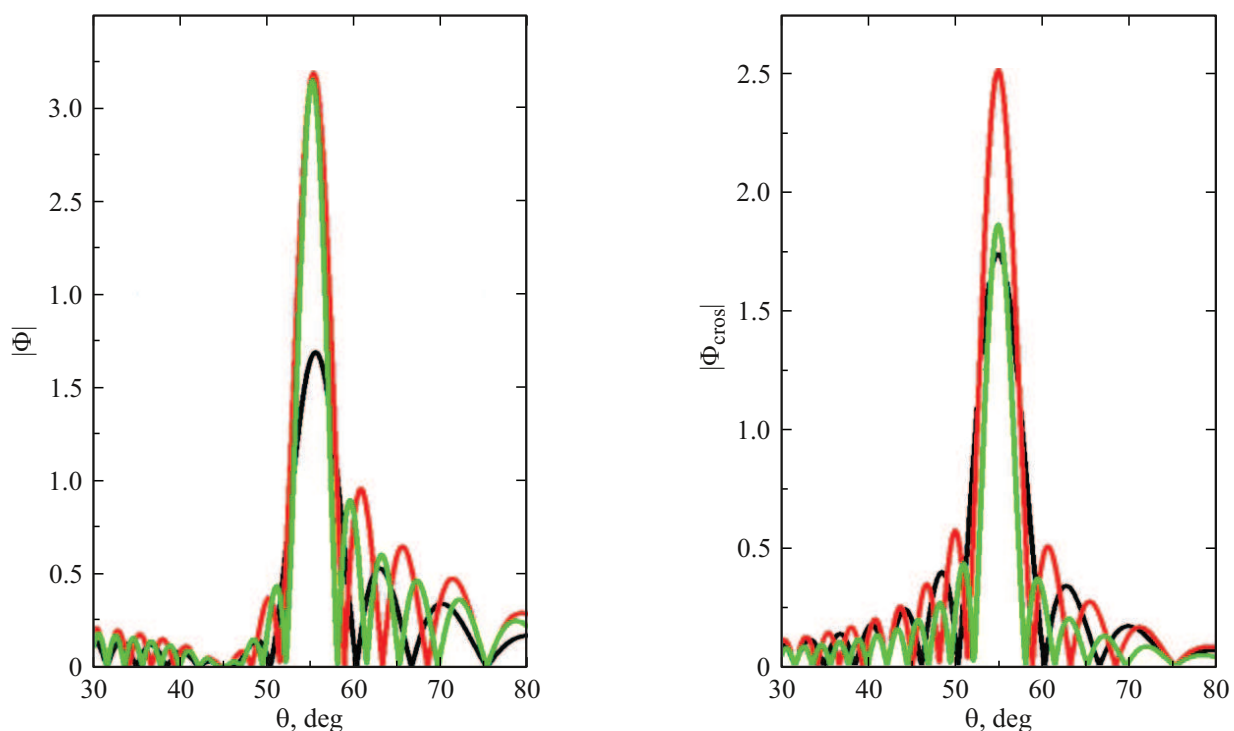


Рис. 7. Диаграмма рассеяния ДР из 101-й полоски при разных частотах. $B = 0.5$ Т. f , THz: 0.75 — черные, 1.0 — красные, 1.25 — зеленые кривые. $d_x = 80 \mu\text{m}$.

всех рисунках ДР отраженной волны рисунок слева — Φ_x в плоскости падения, справа — Φ_y в перпендику-

лярной плоскости. Расстояние между центрами полосок $d_x = 80 \mu\text{m}$.

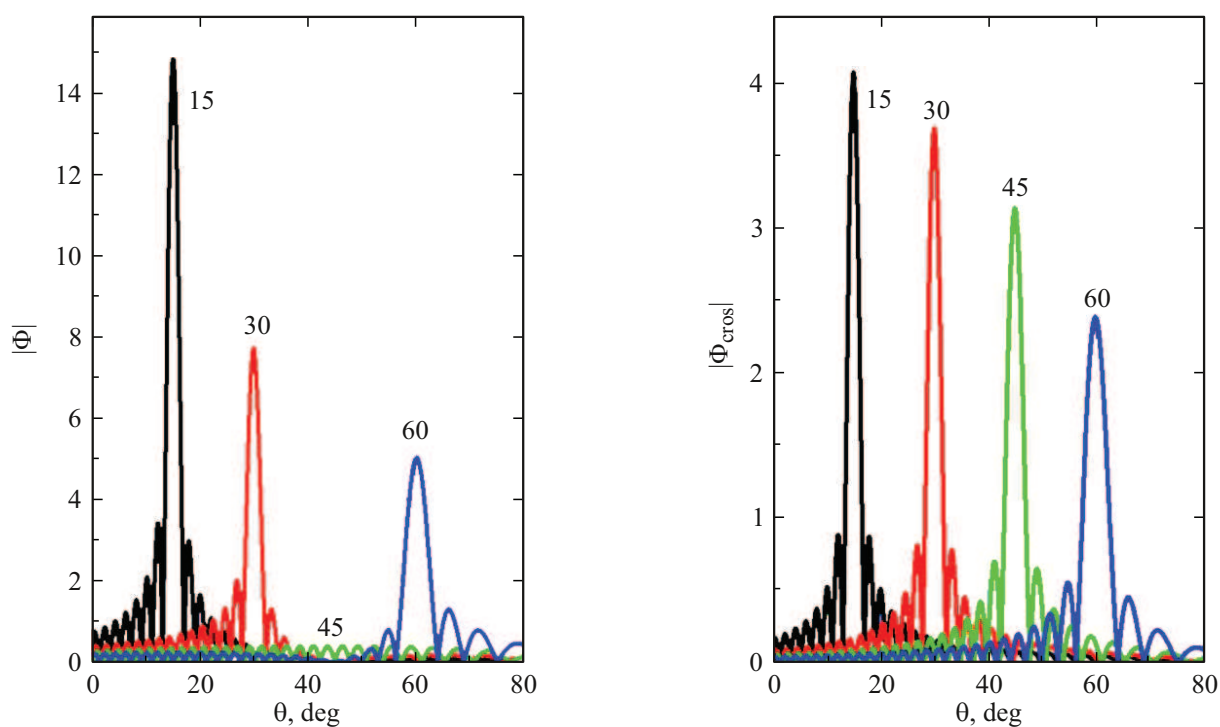


Рис. 8. Диаграмма рассеяния ДФР из 101-й полоски при различных углах падения. $f = 1.1$ THz. $B = 0.5$ T. $d_x = 80$ μ m. Цифры на кривых — значения угла падения в градусах.

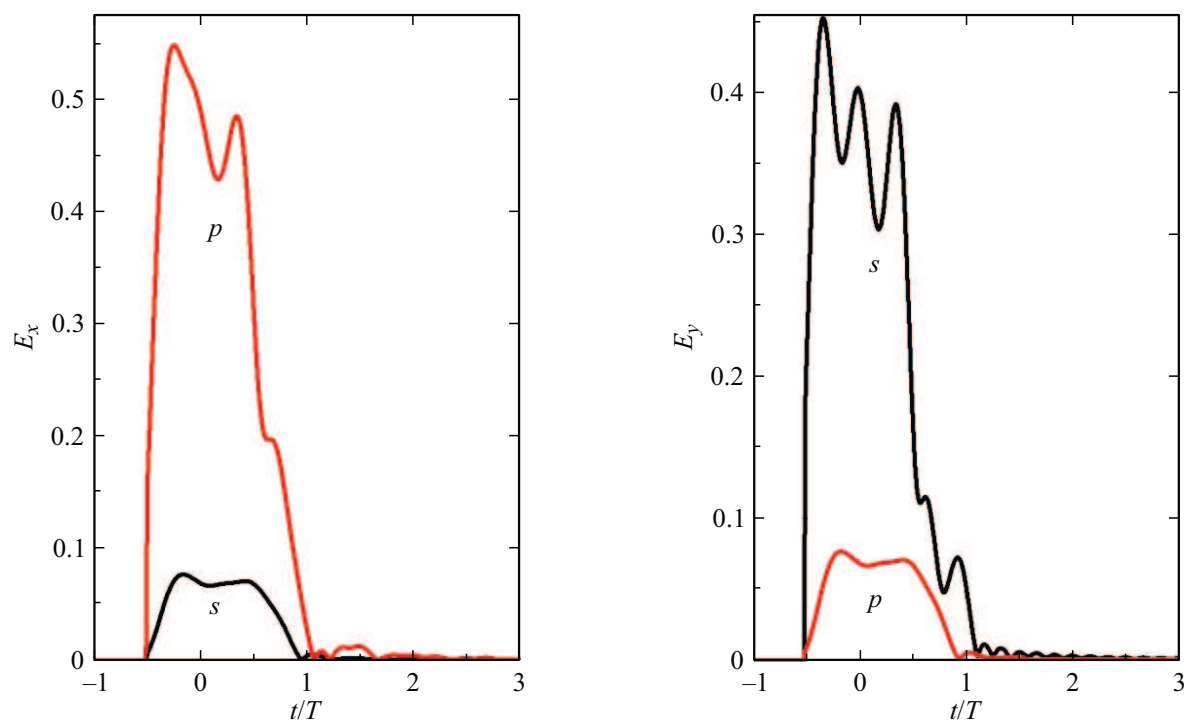


Рис. 9. Отражение прямоугольного ЭМИ от бесконечной ДФР с периодом $d_x = 50$ μ m. Несущая частота $f_0 = 1.6$ THz, $T = 2$ ps. $B = 0.5$ T.

Рис. 5 иллюстрирует поворот плоскости поляризации отраженной волны при наложении магнитного поля. Выбранная частота близка к частоте плазмонного резонан-

са $f_p = 1.12$ THz при $B = 0.5$ T. Увеличение магнитной индукции, естественно, уменьшает компоненту поля в плоскости падения и увеличивает в перпендикулярной.

На частоте магнитоплазмонного резонанса максимальный угол поворота плоскости поляризации (рис. 6, 7). Интересно, сдвиг вправо по частоте от f_p уменьшает кросс-поляризацию. Увеличение числа лент слабо влияет на нормированную величину Φ_x и Φ_y , но, естественно, сужает ДР и приближает угол отражения (т. е. максимумы Φ_x и Φ_y) к углу падения.

Угол поворота плоскости поляризации отраженной волны Φ_y/Φ_x сильно зависит от угла падения (рис. 8). Если Φ_y плавно увеличивается при увеличении угла, то Φ_x вначале уменьшается за счет поворота плоскости поляризации, при угле падения 45° $\Phi_x \approx 0$, затем Φ_x увеличивается.

Кроме дифракции монохроматической волны исследовали также дифракцию электромагнитных импульсов, длительность которых составляет несколько периодов колебаний несущей частоты. Задача решалась в частотной области. Из-за сильной зависимости коэффициента отражения наблюдается, естественно, сильное искажение импульса (рис. 9).

Выводы

1. Получено решение краевой задачи дифракции плоской электромагнитной волны на периодической дифракционной решетке на основе графеновых лент в магнитном поле двумя методами:

- в первом — решены ПСУ, в которых неизвестная функция — плотность тока в графеновых лентах;
- во втором — решены интегро-дифференциальное уравнение относительно напряженности электрического поля внутри графеновых полосок.

2. Для ДФР с конечным числом лент в полученных формулах ряды Флоке нужно заменить на интегралы Фурье.

3. При расчете ДФР с большим числом лент осуществлен переход с помощью преобразования Пуассона от спектрального представления полей периодической решетки к пространственному представлению квазипериодической. Получена асимптотика полей в дальней зоне.

4. Метод, представленный в работе, может быть расширен для анализа и проектирования других перестраиваемых терагерцовых невзаимных устройств, таких как изоляторы, циркуляторы, фазовращатели и переключатели [20]. Результаты работы могут иметь потенциальное применение при проектировании датчиков магнитного поля и перестраиваемых устройств на основе эффекта Керра [21].

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Государственное задание в сфере научной деятельности. Проект № FENW-2023-0010/Г30110/23-11-ИФ).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] W.H. Wang S.P. Apel, J.M. Kinaret. Phys. Rev. B, **86**, 125450 (2012).
- [2] G.W.J. Hanson. Appl. Phys., **103** (6), 064302 (2008).
- [3] А.М. Лерер. Радиотехника и электроника, **69** (11), 17 (2024).
- [4] M. Tamagnone, T.M. Slipchenko, C. Moldovan, P.Q. Liu, A. Centeno, H. Hasani, A. Zurutuza, A.M. Ionescu, L. Martin-Moreno, J. Faist, J.R. Mosig, A.B. Kuzmenko, J.-M. Pumirol. Phys. Rev. B, **97**, 241410 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.241410>
- [5] M.L. Chin, S. Matschy, F. Stawitzki, J. Poojali, H.A. Hafez, D. Turchinovich, S. Winnerl, G. Kumar, R.L. Myers-Ward, M.T. Dejarld. J. Phys.: Photon., **3**, 01LT01 (2021). DOI: 10.1088/2515-7647/abd7d0
- [6] D.A. Kuzmin, I.V. Bychkov, V.G. Shavrov, V.V. Temnov. Nanophotonics, **7** (3), 597 (2018). DOI: 10.1515/nanoph-2017-0095
- [7] W. Ningning, D. Linhui, W. Weihua. Phys. Rev. B, **108** (8), 085406 (2023).
- [8] Zh. Zesen, G. Zhilong, C. Lei. J. Phys. D: Appl. Phys., **56**, 365104 (2023). DOI: 10.1088/1361-6463/acda45
- [9] J.-Q. Liu, Yu.-X. Zhou, L. Li, P. Wang, A.V. Zayats. Optics Express, **23** (10), 12525 (2015). DOI: 10.1364/OE.23.012524
- [10] Y. Lu, Ch. Wang, Sh. Zhao, Y. Wen. Frontiers Phys., **8**, 622839 (2021). DOI: 10.3389/fphy.2020.622839
- [11] P. Padmanabhan, S. Boubanga-Tombet, H. Fukidome, T. Otsuji, R.P. Prasankumar. Appl. Phys. Lett., **116**, 221107 (2020). DOI: 10.1063/5.0006448
- [12] T. Guo, C.J. Argyropoulos. Appl. Phys., **134**, 050901 (2023). DOI: 10.1063/5.0152664
- [13] S.A. Amanatiadis, N.V. Kantartzis, T. Ohtani, Y. Kanai. IEEE Transactions on Magnetics, **54** (3), 1, 7201504 (2018). DOI: 10.1109/TMAG.2017.2749558
- [14] M. Rahmanzadeh, B. Rejaei, M. Memarian. arXiv:1908.04571v1 [physics.optics] <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.04571>
- [15] P.K. Khoozani, M. Maddahali, M. Shahabadi, A. Bakhtafrouz. J. Optical Society of America B, **33** (12), 2566 (2016). <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.002566>
- [16] A. Hlali, Z. Houaneb, H. Zairi. IEEE Transactions on Magnetics, **56** (8), 1–8, 2800308 (2020). DOI: 10.1109/TMAG.2020.3000669
- [17] А.М. Лерер, И.Н. Иванова, В.В. Махно. Антенны, **3**, 76 (2021).
- [18] А.М. Лерер, Г.С. Макеева, В.В. Черепанов. Радиотехника и электроника, **66** (6), 543 (2021).
- [19] А.М. Лерер, Г.П. Синяевский. Вестник МГУ. Серия 3, **6**, 48 (2010).
- [20] I. Mazraeh-Fard, A. Alighanbari. Appl. Optics, **62** (30), 8042 (2023). <https://doi.org/10.1364/AO.497603>
- [21] B. Roumi, R. Abdi-Ghaleh. Phys. E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, **144**, article id. 115445 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.physe.2022.115445>