

Квазиклассическое и квантовое излучение в графене под действием ступенчатого поля

© В.В. Дмитриев, Д.В. Чурочкин, В.А. Церюпа, С.А. Смолянский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: dmitrievvv@sgu.ru

Поступило в Редакцию 28 ноября 2025 г.

В окончательной редакции 28 ноября 2025 г.

Принято к публикации 28 ноября 2025 г.

Представлено кинетическое описание квазиклассических и квантовых процессов излучения в графене, индуцированных внешним полем со ступенчатой конфигурацией. В качестве внешнего возмущения использовано постоянное поле конечной длительности (так называемые *t-ступенчатые импульсы*). Этот выбор мотивирован двумя ключевыми соображениями: 1) подобные поля подробно исследовались в других работах, и 2) они могут создавать окна прозрачности, в которых индуцированное излучение превышает фон внешнего поля, что открывает возможность экспериментального детектирования.

Ключевые слова: графен, кинетическое уравнение.

DOI: 10.61011/JTF.2026.05.62743.322-25

Введение

Графен на протяжении десятилетий остается в фокусе активных исследований благодаря своим исключительным свойствам [1,2]. Его гексагональная кристаллическая структура и симметрия приводят к уникальному низкоэнергетическому спектру, в котором электроны вблизи дираковских точек ведут себя как безмассовые фермионы, подчиняясь линейному закону дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = v_F \sqrt{(p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2}, \quad (1)$$

где $v_F = 10^6$ м/с — фермиевская скорость, а $\mathbf{p} = (p^{(1)}, p^{(2)})$ — компоненты двумерного импульса.

Это свойство позволяет экспериментально проверять модель при энергиях, значительно более низких, чем требуемые в квантовой электродинамике. Под действием внешнего электрического поля возникают несколько удивительных квантовых вакуумных эффектов. Например, туннелирование Ландау–Зинера проявляется в нелинейных вольт-амперных характеристиках, давая представление о механизме электронного транспорта. Кроме этого, можно изучать электромагнитный отклик или детектировать излучение, испускаемое однослойным графеном под действием внешнего лазерного поля.

Современное состояние исследований в области нелинейной динамики графена характеризуется активным развитием как экспериментальных, так и теоретических подходов. В работах [3–5] продемонстрирована возможность генерации высоких гармоник и нелинейного отклика в графене под действием сильных лазерных импульсов терагерцового диапазона. Параллельно развиваются усовершенствованные теоретические модели, учитывающие релаксационные процессы [6] и межэлектронное взаимодействие [7] в условиях сильных полей.

Особый интерес представляют недавние исследования квантовых транспортных явлений [8].

В последующем анализе мы используем непerturbативный кинетический формализм для исследования плазменных токов в графене и соответствующего квазиклассического излучения. Кроме того, мы исследуем случай квантового излучения, генерируемого при взаимодействии зарядов с внешним полем, с фокусировкой исключительно на канале аннигиляции в интеграле столкновений.

1. Кинетическое уравнение в графене

Для простоты рассмотрим графен, находящийся во внешнем линейно-поляризованном однородном поле с однокомпонентным вектор-потенциалом $A^\mu = (0, 0, A^{(2)}(t) = A(t), 0)$ в гамильтоновой калибровке $A^{(0)} = 0$. Тогда основное кинетическое уравнение немарковского типа может быть записано в интегро-дифференциальной форме [9–12]:

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') dt' \quad (2)$$

или как эквивалентная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \\ \dot{u}(\mathbf{p}, t) &= \lambda(\mathbf{p}, t) [1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} v(\mathbf{p}, t), \\ \dot{v}(\mathbf{p}, t) &= \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} u(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы вводим функцию распределения носителей $f(\mathbf{p}, t)$, которая подчиняется условию электронейтральности $f(\mathbf{p}, t) = f_e(\mathbf{p}, t) = f_h(-\mathbf{p}, t)$. Дополнительно, для случая графена, мы определяем амплитуду перехода

$$\lambda(\mathbf{p}, t) = \frac{ev_F^2 E(t) p_{\perp}}{\varepsilon^2(\mathbf{p}, t)} \quad (4)$$

и фазу

$$\theta(\mathbf{p}; t, t') = \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t dt'' \varepsilon(\mathbf{p}, t''), \quad (5)$$

где $E(t) = -\frac{1}{c} \dot{A}(t)$ — напряженность поля, $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{p_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2(t)}$ — квазиэнергия, $P_{\parallel}(t) = p^{(2)} - \frac{e}{c} A(t)$ — квазиимпульс вдоль направления поля, $p_{\perp} = p^{(1)}$ — перпендикулярная компонента, $e < 0$ — заряд электрона. Здесь также вводятся вспомогательные функции, характеризующие поляризационные эффекты в системе

$$u(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') dt', \quad (6)$$

$$v(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \sin \theta(\mathbf{p}; t, t') dt'. \quad (7)$$

При начальном условии $f(\mathbf{p}, t_0) = u(\mathbf{p}, t_0) = v(\mathbf{p}, t_0) = 0$ мы определяем интеграл движения

$$(1 - 2f)^2 + u^2 + v^2 = 1. \quad (8)$$

Функции, обсуждаемые выше и полученные путем аналитического или численного решения системы, не являются непосредственно наблюдаемыми экспериментальными величинами. Чтобы установить связь с наблюдаемыми величинами, мы должны рассмотреть макроскопические наблюдаемые, такие как плотность частиц, токи и энергетические характеристики излучения. В качестве первого шага определим плотность числа пар квазичастиц как

$$n(t) = \frac{N_f}{(2\pi\hbar)^2} \int f(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (9)$$

где $N_f = 4$ соответствует числу типов („ароматов“) квазичастиц в графене.

Следуя стандартным определениям, введем плотность тока [13]:

$$j_k(t) = -\frac{\delta H(t)}{\delta A_k(t)}. \quad (10)$$

Вывод из низкоэнергетического гамильтониана

$$H(t) = v_F \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{P}} \sigma \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (11)$$

дает следующее выражение:

$$j_k(t) = N_f e v_F \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \sigma_k \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (12)$$

где σ_k — матрицы Паули ($k = 1, 2$). Этот ток может быть выражен как сумма тока проводимости

$$j_{\perp}^{cond}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{2f(\mathbf{p}, t) p_{\perp}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p},$$

$$j_{\parallel}^{cond}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{2f(\mathbf{p}, t) P_{\parallel}(t)}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p}, \quad (13)$$

и тока поляризации

$$j_{\perp}^{pol}(t) = -\frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{u(\mathbf{p}, t) P_{\parallel}(t)}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p},$$

$$j_{\parallel}^{pol}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{u(\mathbf{p}, t) p_{\perp}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p}. \quad (14)$$

В контексте физики конденсированного состояния эти вклады традиционно называются внутризонным и межзонным токами соответственно. Выражение, связанное с проводимостью, соответствует переносу заряда носителями внутри отдельных дираковских конусов (зона проводимости или валентная зона), тогда как поляризационное представляет квантовую интерференцию между этими состояниями, проявляющуюся как дрожащее движение (Zitterbewegung). Фактически, корректная форма тока проводимости включает множитель $(1 - 2f(\mathbf{p}, t))$ в числителе, но постоянное слагаемое обращается в нуль при интегрировании по зоне Бриллюэна с учетом полной гексагональной решетки графена [14].

Заметим, что компоненты токов (13), (14), перпендикулярные внешнему электрическому полю, отсутствуют: $j_{\perp}^{cond} = j_{\perp}^{pol} = 0$. Это обусловлено тем, что подынтегральные функции в $j_{\perp}^{cond}$ и $j_{\perp}^{pol}$ являются нечетными функциями поперечного импульса $p_{\perp}$, а интеграл по $p_{\perp}$ мы берем в симметричных пределах. Нечетность подынтегральных функций — в частности, нечетность $u(p_{\perp})$ и $p_{\perp} f(p_{\perp})$, — может быть доказана на основе кинетических уравнений (3) с учетом четности квазиэнергии ε (1) и нечетности амплитуды переходов λ (4) как функций поперечного импульса $p_{\perp}$.

Внешний t -ступенчатый импульс генерирует определенное число квазичастиц с асимметричным распределением в импульсном пространстве (рис. 1). Движение этих заряженных квазичастиц устанавливает сложную картину поверхностных токов. Эти поверхностные токи плазмы, в свою очередь, служат источниками квазиклассического излучения, которое распространяется наружу по обе стороны от плоскости графена.

2. Плазменный ток и квантовый транспорт

Рассматривая графен как бесконечно тонкий слой и, следуя подходу работы [15], мы моделируем электромагнитное поле, генерируемое его поверхностными токами. Тогда для поверхностного тока, зависящего от времени и текущего, например, вдоль оси y , $\mathbf{j}(t) = j(t)\mathbf{e}_y$, мы

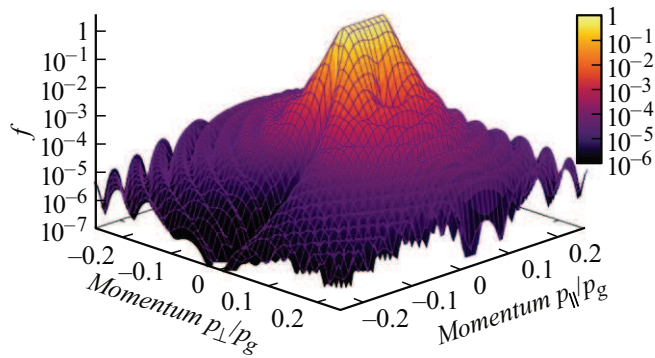


Рис. 1. Функция распределения под действием t -ступенчатого импульса умеренной амплитуды и длительности ($E_0 = 10^{-3}E_g = 109 \text{ kV/cm}$, $T = 100t_g = 24.6 \cdot 10^{-15} \text{ s} \Rightarrow \eta = 10$) в out-состоянии ($t = +T/2$), без учета обратной реакции, $p_g = \hbar/a$ — графеновый импульс, $a = 2.46 \text{ Å}$ — постоянная решетки графена.

получаем следующее выражение для вектор-потенциала на расстоянии z от плоскости:

$$\mathbf{A}_{QCR}(z, t) = \mathbf{e}_y A_{QCR}(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{2\pi}{c} \int_z^\infty j\left(t - \frac{\rho}{c}\right) d\rho, \quad (15)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Напряженности электрического и магнитного полей квазиклассического излучения равны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{QCR}(\tau) &= -\mathbf{e}_y \frac{1}{c} \frac{\partial A_{QCR}}{\partial t} = -\mathbf{e}_y \frac{2\pi}{c} j(\tau), \\ \mathbf{B}_{QCR}(z, t) &= -\mathbf{e}_x \frac{\partial A_{QCR}}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{2\pi}{c} j(\tau) \text{sign}(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau = t - \rho/c$ — запаздывающее время. Вектор Пойнтинга излучения равен

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{QCR}(z, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{QCR}(\tau) \times \mathbf{B}_{QCR}(z, t) \\ &= \mathbf{e}_z \frac{c}{4\pi} E_{QCR}(\tau) B_{QCR}(z, t), \end{aligned} \quad (17)$$

так что энергия квазиклассического излучения в единицу времени, проходящая через единицу площади на высоте z над слоем графена, равна

$$|\mathbf{S}_{QCR}(z, t)| = \frac{\pi}{c} j^2(\tau). \quad (18)$$

Как видно из рис. 2, квазиклассическое электрическое поле остается отличным от нуля даже после выключения внешнего поля ($t \gg T$), что приводит к неограниченному росту излученной энергии ($\int |\mathbf{S}| dt$) и тем самым выявляет фундаментальное ограничение модели. Чтобы устранить этот недостаток, мы должны включить в рассмотрение эффекты обратной реакции.

Тем не менее даже эта численная модель дает ценное представление о взаимосвязи между поверхностными токами и параметрами внешнего поля. Следовательно, она предлагает предварительное понимание квантового транспорта в графеновых структурах, требуя при

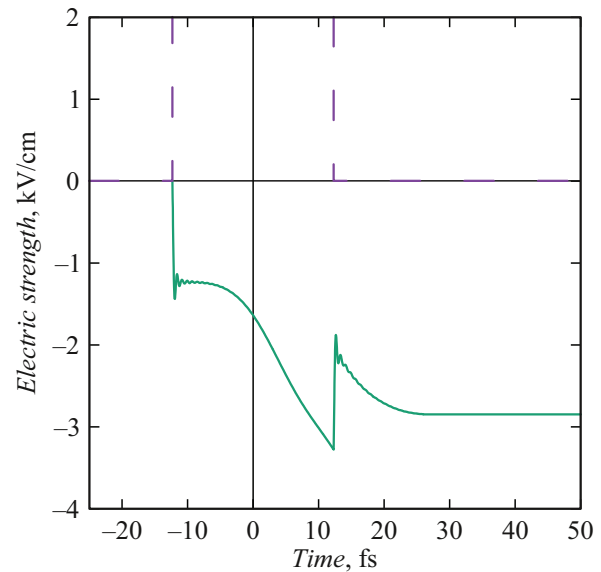


Рис. 2. Эволюция напряженности электрических полей под действием t -ступенчатого импульса с амплитудой $E_0 = 10^{-3}E_g = 109 \text{ kV/cm}$ и длительностью $T = 100t_g = 24.6 \cdot 10^{-15} \text{ s}$, без учета обратной реакции. Сплошная линия — квазиклассическое излучение E_{QCR} в плоскости графена ($z = 0$); штриховая линия — внешнее поле (t -ступенчатый импульс).

этом знания лишь самого фундаментального свойства его низкоэнергетической модели — линейного закона дисперсии. Следуя работе [16], мы вводим безразмерный параметр η , характеризующий „интенсивность“ поля и определяющий режим переноса зарядов.

$$\frac{\eta}{2\pi} = \frac{E_0}{E_g} \left(\frac{T}{t_g}\right)^2, \quad (19)$$

где введены графеновые единицы: напряженность $E_g = \hbar v_F / (|e|a^2) = 1.089 \cdot 10^8 \text{ V/cm}$, время $t_g = a/v_F = 2.46 \cdot 10^{-16} \text{ s}$, и $a = 2.46 \text{ Å}$ обозначает постоянную решетки графена.

Численные результаты на рис. 3 выявляют два характерных режима транспорта. В пределе слабого поля $\eta \ll 1$ система описывается линейной теорией отклика Кубо [2] и демонстрирует выполнение закона Ома, причем доминирует поляризационный ток. В противоположность этому, режим сильного поля $\eta \gg 1$ показывает нелинейную зависимость $E^{3/2}$. Она является результатом интенсивного рождения квазичастиц посредством механизма Швингера, что приводит к доминированию тока проводимости над поляризационным током и обеспечивает нелинейный механизм транспорта. Временная динамика системы управляется переходами Ландау–Зинера, в которых процессы межзонного туннелирования подавляются в пользу внутризонной проводимости по мере увеличения напряженности электрического поля. В предыдущих исследованиях, изучавших аналогичные эффекты полей в графене [14,16,17] и механизм

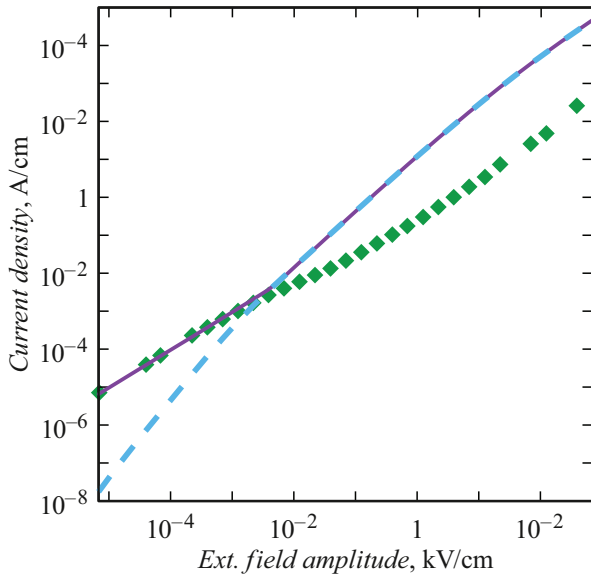


Рис. 3. „Вольт-амперная характеристика“ — амплитуда плотности тока, как функция амплитуды t -ступенчатого импульса при $T = 4 \cdot 10^3 t_g = 10^{-12} \text{ s}$, с учетом обратной реакции. Штрих — ток проводимости $\max |j_{\text{cond}}(t)|$; пунктир — поляризационный ток $\max |j_{\text{pol}}(t)|$; сплошная линия — полный ток $\max |j_{\text{cond}}(t) + j_{\text{pol}}(t)|$.

Киббла–Цурека [18,19], был получен аналогичный тип зависимости $\sim tE^{3/2}$.

3. Квазиклассическое излучение

Для последующего анализа мы принимаем два ключевых упрощающих приближения [20]. Во-первых, мы используем приближение низкой плотности, которое соответствует условию $f(\mathbf{p}, t) \ll 1$ в правой части кинетического уравнения (2). Это соответствует случаю низкой продукции квазичастиц. В результате получаем функцию распределения в виде

$$f^{(LD)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} |\hat{\lambda}(\mathbf{p}, t)|^2, \quad (20)$$

где

$$\hat{\lambda}(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \lambda(\mathbf{p}, t') \exp \left[-i \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t dt'' \varepsilon(\mathbf{p}, t'') \right]. \quad (21)$$

Формулы (20), (21) справедливы для квазиэнергии $\varepsilon(\mathbf{p}, t)$ и амплитуды переходов $\lambda(\mathbf{p}, t)$ любого вида (например, линейной или нелинейной по импульсу). Главное — чтобы выполнялось $f^{(LD)} \ll 1$.

Второе упрощение — это приближение слабого поля:

$$\left| \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right| \ll |\mathbf{p}|, \quad \forall t. \quad (22)$$

Оно упрощает квазиэнергию и амплитуду переходов:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, t) \rightarrow \varepsilon^{(0)}(p) = v_F |\mathbf{p}|, \quad (23)$$

$$\lambda(\mathbf{p}, t) \rightarrow \lambda^{(0)}(\mathbf{p}, t) = \frac{ev_F^2 p_{\perp}}{[\varepsilon^{(0)}(p)]^2} E(t) = \frac{e \sin \varphi}{p} E(t), \quad (24)$$

где φ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$ (оба вектора — в плоскости графена).

Комбинируя два приближения, получаем

$$f^{(LD,0)}(\mathbf{p}, t) = \left| \frac{ev_F^2 p_{\perp}}{2\varepsilon^{(0)}(p)} \tilde{E}(v, t) \right|_{v=\varepsilon^{(0)}/\pi\hbar}^2, \quad (25)$$

где

$$\tilde{E}(v, t) = \int_{t_0}^t dt' E(t') \exp(-2\pi i v t') \quad (26)$$

является оконным преобразованием Фурье (WFT) или кратковременным преобразованием Фурье (STFT).

Энергетическая плотность электрон-дырочной плазмы равна

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{2N_f}{(2\pi\hbar)^2} \int \varepsilon^{(0)}(p) f^{(LD,0)}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (27)$$

Подставим сюда функцию распределения (24), перейдем в полярную систему „координат“ $(|\mathbf{p}|, \varphi)$, проинтегрируем по азимуту φ . В результате

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{e^2}{2\hbar} \int_0^{\infty} dv |\tilde{E}(v, t)|^2. \quad (28)$$

Используя поток энергии электромагнитной волны, можно переписать энергетическую плотность с помощью вектора Пойнтинга (17) как

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{\pi e^2}{\hbar c} \int_{-\infty}^t |\mathbf{S}(t')| dt'. \quad (29)$$

Эта аналитическая оценка показывает, что только $\pi/137 \sim 2.2\%$ падающей электромагнитной энергии поглощается графеном. Это находится в превосходном соответствии с экспериментальными данными по оптической прозрачности монослоя графена [21]. Численные результаты компьютерного моделирования квазиклассического излучения под действием t -ступенчатого импульса показаны на рис. 4.

4. Квантовое излучение

Взаимодействие электрон-дырочной плазмы (ЭДП) с полем фотонов генерирует квантовое излучение. Соответствующие кинетические уравнения для ЭДП и фотонной подсистемы в графене были получены в работе [11] с использованием динамического подхода, аналогичного кинетической теории электрон-позитрон-фотонных плазмы в сильных внешних полях [22]. Ниже мы ограничим наш анализ аннигиляционным каналом в фотонном интеграле столкновений, пренебрегая обратной реакцией рождения электрон-дырочных пар посредством поглощения фотонов.

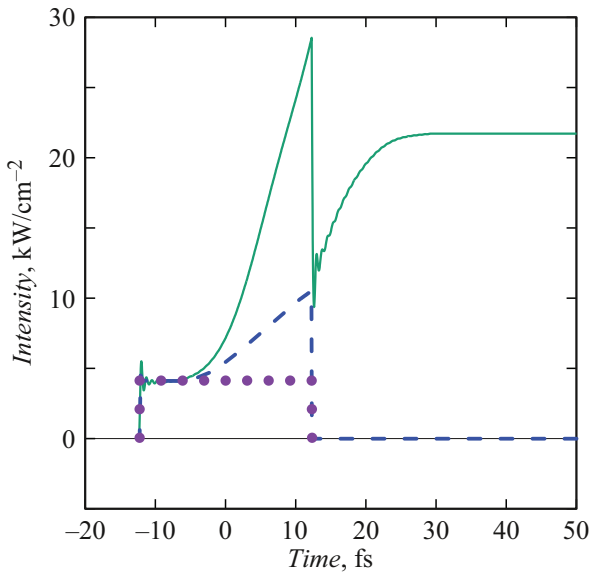


Рис. 4. Эволюция интенсивностей под действием t -ступенчатого импульса (с параметрами, как на рис. 1, 2) без учета обратной реакции. Сплошная линия — интенсивность квазиклассического излучения $|S_{QCR}|$; штрих — поверхностная плотность мощности квазичастиц $\dot{\epsilon}_{eh}$, домноженная (для сопоставления) на $\pi\alpha/4 \approx 5.7 \cdot 10^{-3}$; пунктир — интенсивность внешнего поля $|S_{ext}|$, домноженная на $(\pi\alpha/2)^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$. Почти всюду на графике (кроме $t \geq T/2 = 12.3 \cdot 10^{-15}$ s, где внешнее поле уже выключено) оказывается выполнено: $|S_{QCR}| \ll \dot{\epsilon}_{eh} \ll |S_{ext}|$.

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{K}, t) &= \Lambda(K) \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{U}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= [f(\mathbf{p}, t) + f(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - 1] F(\mathbf{K}, t) \\ &\quad + f(\mathbf{p}, t)f(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, t) + \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - cK] V(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{V}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, t) + \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - cK] U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\mathbf{K} = (\mathbf{k}, k^{(3)})$ обозначает трехмерный импульс фотона (где $\mathbf{k}$ представляет компоненты в плоскости, а $k^{(3)}$ — компоненту, нормальную к плоскости графена), $K = |\mathbf{K}|$, и амплитуда

$$\Lambda(K) = \frac{(ev_F)^2}{cKd}, \quad (31)$$

где $d = a = 2.46$ Å — толщина слоя графена.

Согласно определению функции распределения фотонов $F(\mathbf{K}, t)$, объемная плотность числа всех фотонов $n_{ph}(t)$ есть интеграл функции $F(\mathbf{K}, t)$ по пространству фотонных импульсов $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$):

$$n_{ph}(t) = \int d^3 K n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t), \quad (32)$$

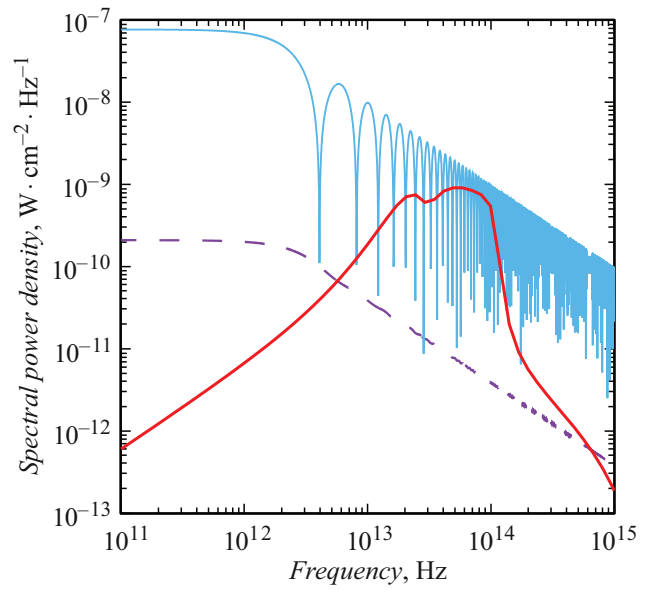


Рис. 5. Спектральная плотность мощности под действием сильного T — const поля ($E_0 = 10^{-4} E_g \approx 10$ kV/cm, $T = 10^3 t_g = 2.46 \cdot 10^{-13}$ s) в момент $t = T$, с учетом back-reaction ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{int}$). Сплошная осциллирующая линия — внешнее поле (T -const); штрих — квазиклассическое излучение $|\tilde{S}_{QCR}(\nu)|$ при $z = 0$; сплошная плавная линия — квантовое излучение (КИ), $\dot{\epsilon}_{ph,\nu}(\nu) \cdot d$. КИ вычислено из системы уравнений (30) в приближении низкой плотности числа фотонов ($F \ll 1$).

где

$$n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = \frac{N_f}{(2\pi\hbar)^3} F(\mathbf{K}, t) \quad (33)$$

— спектральная (дифференциальная по вектору импульса фотона) объемная плотность числа фотонов, $[n_{ph,\mathbf{K}}] = [\text{длина}^{-3} \cdot \text{импульс}^{-3}]$.

Объемная плотность энергии всех фотонов [энергия · длина⁻³] по определению равна

$$\varepsilon_{ph}(t) = \int d^3 K \varepsilon_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t), \quad (34)$$

где

$$\varepsilon_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = cK n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = \frac{N_f c K}{(2\pi\hbar)^3} F(\mathbf{K}, t) \quad (35)$$

— спектральная (дифференциальная по вектору импульса фотона) объемная плотность энергии фотонов, $[\varepsilon_{ph,\mathbf{K}}] = [\text{энергия} \cdot \text{длина}^{-3} \cdot \text{импульс}^{-3}]$.

В целях сравнения спектров квазиклассического и квантового излучения оказывается удобно ввести объемную плотность энергии фотонов, дифференциальную по их частоте ν ($\nu = cK/\hbar$), $\varepsilon_{ph,\nu}(\nu, t)$, подчинив ее условию:

$$\int_0^\infty d\nu \varepsilon_{ph,\nu}(\nu, t) = \varepsilon_{ph}(t). \quad (36)$$

Сравнивая это определение (тождество) с плотностью энергии всех фотонов $\mathcal{E}_{ph}$ (34), находим связь дифференциальной плотности энергии фотонов $\mathcal{E}_{ph,v}$ с их функцией распределения F :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ph,v}(\nu, t) &= \frac{2\pi\hbar}{c} K^2 \int d\Omega \mathcal{E}_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) \Big|_{K=2\pi\hbar\nu/c} \\ &= N_f \frac{K^3}{(2\pi\hbar)^2} \int d\Omega F(\mathbf{K}, t) \Big|_{K=2\pi\hbar\nu/c},\end{aligned}\quad (37)$$

где интеграл берется по телесному углу Ω всей сферы.

Величину $\mathcal{E}_{ph,v}(\nu, t)$ мы называем спектром мощности квантового излучения. Она имеет размерность [мощность · длина⁻³ · частота⁻¹].

Спектром интенсивности квазиклассического излучения мы называем абсолютное значение оконного преобразования Фурье над абсолютным значением вектора Пойнтинга (17):

$$|\tilde{\mathbf{S}}_{QCR}(\nu, t)| = \left| \int_{-\infty}^t dt' |\mathbf{S}_{QCR}(t')| \exp(-2\pi i \nu t') \right|. \quad (38)$$

Его размерность — [мощность · длина⁻² · частота⁻¹].

Для сравнения спектров квантового и квазиклассического излучений, для согласования их размерностей мы домножаем спектр квантового излучения $\mathcal{E}_{ph,v}(\nu, t)$ на толщину слоя графена d .

На рис. 5 мы ожидаем увидеть „окна прозрачности“ для t -ступенчатого импульса, которые могут быть наблюдаемы в эксперименте, т.е. частотные диапазоны, в которых индуцированное излучение превышает интенсивность внешнего поля.

Заключение

В работе разработана последовательная кинетическая теория, описывающая процессы излучения в графене под действием импульсов ступенчатой формы. Основной научный результат заключается в создании самосогласованной модели, объединяющей непerturbативное описание рождения электрон-дырочных пар, генерацию квазиклассического излучения плазменными токами и квантовое излучение в аннигиляционном канале. В рамках предложенного подхода установлены количественные закономерности перехода между режимами доминирования поляризационного тока и тока проводимости.

Достигнутый уровень динамического описания излучения в графене не только демонстрирует качественное согласие с экспериментальными результатами [23], но и формирует методологическую основу для описания нестационарных явлений в графене и открывает перспективы для дальнейшего исследования нелинейных радиационных процессов в условиях сильных полей сложной временной конфигурации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, A.A. Firsov. *Nature*, **438** (7065), 197 (2005).
- [2] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. *Rev. Mod. Phys.*, **81** (1), 109 (2009).
- [3] S. Rakhmanov, K. Matchonov, H. Yusupov, K. Nasriddinov, D. Matrasulov. *Eur. Phys. J. B*, **98** (2), 35 (2025).
- [4] G. Soavi, G. Wang, H. Rostami, D.G. Purdie, D.De Fazio, T. Ma, B. Luo, J. Wang, A.K. Ott, D. Yoon, S.A. Bourelle, J.E. Muench, I. Goykhman, S.D. Conte, M. Celebrano, A. Tomadin, M. Polini, G. Cerullo, A.C. Ferrari. *Nature Nanotechnol.*, **13** (7), 583 (2018).
- [5] H.A. Hafez, S. Kovalev, J.C. Deinert, Z. Mics, B. Green, N. Awari, M. Chen, S. Germanskiy, U. Lehnert, J. Teichert, Z. Wang, K.J. Tielrooij, Z. Liu, Z. Chen, A. Narita, K. Müllen, M. Bonn, M. Gensch, D. Turchinovich. *Nature*, **561** (7724), 507 (2018).
- [6] J.A. Canas, D.A. Bonilla, A. Martín-Ruiz. *Phys. Rev. B*, **112** (10) 104206 (2025).
- [7] P. Kumar, T.M. Herath, V. Apalko. *J. Phys.: Condens. Matter*, **33** (33), 335305 (2021).
- [8] G. Trambly de Laissardière, et al. *Physica E-Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 175, 116362 (2026).
- [9] S.A. Smolyansky, A. Panferov, D. Blaschke, N. Gevorgyan. *Particles*, **2** (2), 208 (2019).
- [10] S.A. Smolyansky, A.D. Panferov, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. *Particles*, **3** (2), 456 (2020).
- [11] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, V.V. Dmitriev, A.D. Panferov, S.A. Smolyansky. *Universe*, **6** (11), 205 (2020).
- [12] A.D. Panferov, D.V. Churochkin, A.M. Fedotov, S.A. Smolyansky, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. In *Proceedings of the Ginzburg Centennial Conference on Physics*, (May 29–June 3, 2017, Moscow). <http://gc2.lpi.ru/proceedings/panferov.pdf> Last accessed 16 March 2020
- [13] P. Martin, J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **115** (6), 1342 (1959).
- [14] B. Dora, R. Moessner. *Phys. Rev. B*, **81** (16), 165431 (2010).
- [15] T.A. Abbott, D.J. Griffiths. *Am. J. Phys.*, **53** (12), 1203 (1985).
- [16] G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. *Phys. Rev. D*, **87** (12), 125011 (2013).
- [17] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, N. Yokomizo. *Phys. Rev. D*, **86** (12), 125022 (2012).
- [18] T.W.B. Kibble. *J. Phys. A*, **9** (8), 1387 (1976).
- [19] W.H. Zurek. *Nature*, **317** (6037), 505 (1985).
- [20] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, N.T. Gevorgyan, B. Mahato, A.D. Panferov. *Springer Proc. Phys.*, **281** 187 (2022).
- [21] R.R. Nair, P. Blake, A.N. Grigorenko, K.S. Novoselov, T.J. Booth, T. Stauber, N.M.R. Peres, A.K. Geim. *Science*, **320** (5881), 1308 (2008).
- [22] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, G. Roepke, S.A. Smolyansky. *Phys. Rev. D*, **84** (8), 085028 (2011).
- [23] I.V. Oladyshkin, S.B. Bodrov, A.V. Korzhimanov, A.A. Murzanov, Yu.A. Sergeev, A.I. Korytin, M.D. Tokman, A.N. Stepanov. *Phys. Rev. B*, **106** (20), 205407 (2022).