

Модификация многогруппового метода для задачи распространения моноэнергетического пучка электронов

© А.Р. Полетаева,¹ И.П. Цыгвинцев²

¹ Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“,
115409 Москва, Россия

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047 Москва, Россия
e-mail: anro.poletaeva@gmail.com

Поступило в Редакцию 2 июля 2025 г.

В окончательной редакции 23 ноября 2025 г.

Принято к публикации 29 ноября 2025 г.

Представлено численное решение задачи нагрева вещества мишени моноэнергетическим пучком электронов. В одномерном случае подробно рассмотрены и сравнены решения уравнения Больцмана в многогрупповом приближении, решение без разбиения на энергетические группы (точное) и метод, названный гибридным, который можно считать промежуточным между многогрупповым приближением и точным решением для моноэнергетического пучка. Рассмотренные численные методы решения уравнения переноса электронов в веществе встроены в виде отдельного модуля в гидродинамический программный комплекс 3DLINE. На основании проведенных двумерных расчетов проанализированы особенности нагрева мишени моноэнергетическим пучком электронов. Проведено сравнение результатов моделирования многогрупповым методом и гибридным, который в моноэнергетическом случае совпадает с точным решением.

Ключевые слова: нагрев электронным пучком, мишень, уравнение переноса, гидродинамика, численные методы, программный комплекс 3DLINE.

DOI: 10.61011/JTF.2026.04.62650.166-25

Введение

Численное решение задачи теплопереноса в веществе при распространении в нем потока электронов представляет в силу своей сложности отдельный академический интерес. Эта задача также возникает в качестве подзадачи в ряде других физических процессов, связанных с нагревом вещества. Экспериментальные работы показывают, что теплоперенос быстрыми электронами необходимо учитывать в задачах инерциального управляемого термоядерного синтеза, быстрого зажигания [1–3] и разогретого плотного вещества [4,5]. Одной из задач, где требуется учитывать вклад в нагрев вещества за счет переноса электронов, является задача лазерного облучения мишени. При относительно низких интенсивностях лазерного излучения (не выше 10^{14} W/cm²) энергетическое распределение нагреваемых частиц максвелловское, поэтому отдельно учитывать вклад в нагрев от переноса электронов не требуется. При таких параметрах для моделирования динамики плазмы используется гидродинамическое приближение. Процесс генерации быстрых электронов становится существенным, когда выполняется условие для параметров лазерного излучения $I\lambda^2 > 10^{14}$ W · μm²/cm², где I — интенсивность лазерного излучения, а λ — длина волны лазерного излучения [6]. Энергетическое распределение электронов в таком случае сильно отличается от максвелловского. Из-за высокой энергии частиц их перенос будет существенно нелокальным [7]. Как следствие,

гидродинамический подход в чистом виде становится неприменимым.

Методы моделирования динамики плазмы можно условно разбить на три большие группы: кинетические, гидродинамические и смешанные методы [8]. Кинетические методы наиболее сильны с точки зрения количества эффектов, которые они позволяют разрешить в ходе численного моделирования при правильном выборе численных параметров. Однако их использование может быть затруднено из-за больших пространственных и временных диапазонов в задачах, в которых рассматривается взаимодействие лазерного излучения с веществом [9]. Исключительно гидродинамический подход становится неприменим, как было написано выше. Поэтому смешанный подход привлекателен для использования в классе задач, в которых требуется кинетическое описание теплопереноса электронами [10,11]. С целью упрощения вычислений используются модификации метода частиц в ячейках (PIC), например, с упрощенной моделью описания плотной плазмы, основанной на законе Ома [9]. Различными способами решаются уравнения Власова—Фоккера—Планка [12,13]. Широко используются усовершенствованные гидродинамические коды, в которых задача переноса электронов решается кинетическими методами, например, гибридные расчеты с помощью PIC-методов [14,15] со встроенным модулем для решения транспортного уравнения электронов [16,17]. Для описания распространения электронов в веществе может использоваться метод Монте-

Карло [18], итерационные методы [19] а также многогрупповое приближение.

В многогрупповом численном методе осуществляется переход от непрерывного энергетического спектра к дискретному, при котором диапазон энергий делится на определенное количество интервалов (энергетических групп) [20]. Многогрупповой метод широко применяется к задачам переноса нейтронов [21], и существуют различные модификации этого метода [22,23]. Данный метод подходит для решения уравнений задачи переноса частиц, в том числе электронов [24,25], и подобные решения используются в гидродинамических кодах [26,27]. Численной особенностью многогруппового приближения является размытие пика поглощения при недостаточном количестве энергетических групп. Для повышения точности вычисления энерговыделения требуется увеличение количества групп, что увеличивает сложность расчетов.

В настоящей работе рассматривается, как наиболее эффективным образом численно учесть теплоперенос электронами в веществе на примере облучения мишени моноэнергетическим пучком электронов на основе многогруппового метода или его разновидности. Формулируется модификация классического многогруппового подхода, которая позволяет получить решение, используя только одну группу, которая совпадает с точным решением для случая моноэнергетического пучка частиц. В отличие от многогруппового приближения в нем не наблюдается „расплывания“ пика поглощения в задачах с моноэнергетическим пучком. Этот метод не требует отслеживания траекторий отдельных электронов и может быть легко обобщен для учета как граничных условий отражения, так и наличия рассеяния в многомерном случае. В настоящей работе сравниваются классический и усовершенствованный многогрупповые методы, оценивается влияние численных методов на описание физического процесса.

В разд. 1 настоящей работы формулируются параметры задачи и приближение, в котором она решается. В разд. 2 обсуждается решение для моноэнергетического случая без рассеяния. В разд. 3 и 4 обсуждаются многогрупповой метод и анализ его сходимости. Разд. 5 и 6 посвящены рассмотрению гибридного метода. В разд. 7 производится сравнительный анализ гибридного и многогруппового методов в двумерном гидродинамическом расчете для задачи взаимодействия моноэнергетического потока электронов с веществом в приближении без рассеяния.

1. Основные физические приближения

Рассмотрим эволюцию функции распределения числа быстрых электронов $f(t, \mathbf{x}, \Omega, E)$, где t — время, $\mathbf{x}$ — координата, Ω — направление, а E — энергия. Пренебрежем взаимодействием со средним полем [28] и учтем только столкновения с электронами среды плотностью n .

В таком случае уравнение Больцмана принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = -v(E)n\sigma(E)f + \int d\Omega' \int dE' v(E')n\sigma(E')\chi(E', \Omega' \cdot \Omega)g(E', E)f(t, \mathbf{x}, E', \Omega'). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v} = v(E)\Omega$ — скорость электрона, n — концентрация рассеивателей, $\sigma(E)$ — полное сечение рассеяния, $\sigma(E')g(E', E)$ — дифференциальное сечение рассеяния $E' \rightarrow E$, $\chi(E', \Omega' \cdot \Omega)$ — индикатриса рассеяния. Для g и χ выполняются условия нормировки

$$\int g(E', E)dE = 1, \quad \int \chi(E', \Omega' \cdot \Omega)d\Omega = 1.$$

Отношение характерного времени пробега электрона до полной остановки к характерному временному масштабу гидродинамики можно оценить как отношение скорости электрона к скорости звука в веществе. Тогда, если энергия падающих электронов много больше температуры вещества, процесс поглощения энергии электронов можно рассматривать в квазистационарном приближении, пренебрегая членом $\partial/\partial t$.

Влияние рассеяния на процесс переноса электронов с энергией ε в веществе с плотностью ρ_{gcc} , средним зарядом иона Z и температурой T_{keV} можно оценить через значение среднего косинуса угла рассеяния, вычисленного по формуле из работы [29]:

$$\begin{aligned} \langle \cos \Psi \rangle &= \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{4Z} \frac{f_{st}}{f_{sc}} \gamma_b\right)}, \\ f_{st} &= 11.2 - 0.5 \ln\left(\frac{Z\rho_{gcc}}{A} \frac{\gamma_b}{(\gamma_b - 1)^2}\right), \\ f_{sc} &= 6.7 - 0.5 \ln\left(\frac{Z\rho_{gcc}}{AT_{keV}} \frac{1}{(\gamma_b - 1)\gamma_b}\right), \\ \gamma_b &= 1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим поглощение электронов энергией 200 keV в холодном алюминии с плотностью 2.678 g/cm³ и средним зарядом ионов $Z = 2.5$. График зависимости среднего косинуса угла рассеяния от температуры, построенный по формулам (2), приведен на рис. 1. Как видно из графика, рассеяние становится существенным только на завершающем этапе торможения, когда энергия электрона становится сравнимой с температурой среды. Таким образом, при температурах вещества ниже 10 eV средний косинус рассеяния при потере пучком энергии с 200 до 1 keV составляет менее 0.02, и распределение 99.5% поглощенной энергии с точностью не хуже 2% описывается в предположении отсутствия рассеяния, т.е. $\chi(\Omega \cdot \Omega') = \delta(\Omega - \Omega')$.

В этом случае различные направления в уравнении (1) становятся независимыми, и задачу можно рассматривать в одномерном квазистационарном приближении для

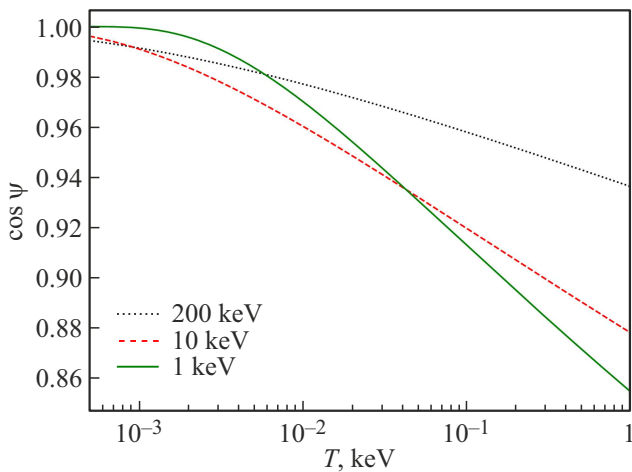


Рис. 1. Зависимость среднего косинуса угла рассеяния до полной остановки от температуры среды для разных значений энергии электронов.

функции $f(x, E)$:

$$v \frac{\partial}{\partial x} f(x, E) = -\sigma(E)nv f(x, E) + \int dE' \sigma(E')nv(E')f(x, E')g(E', E). \quad (3)$$

Рассмотрим изменение плотности потока энергии

$$W(x) = \int v(E)f(x, E)EdE,$$

$$\frac{d}{dx} W(x) = -n \int \sigma(E)v(E)f(x, E)(E - \varepsilon(E))dE.$$

Здесь

$$\varepsilon(E') = \int g(E', E)EdE$$

— средние потери энергии на акт соударения. Тогда в релятивистском случае $\varepsilon(E) \ll E$, и уравнение потока энергии принимает вид

$$\frac{d}{dx} W(x) = -n \int \sigma(E)v(E)f(x, E)EdE. \quad (4)$$

2. Решение для моноэнергетического случая без рассеяния

В частном случае моноэнергетического распределения электроны в каждой точке пространства обладают одной и той же энергией $\tilde{E}(x)$, а их функция распределения соответственно $f(x, E) = N \cdot \delta(E - \tilde{E}(x))$. N здесь определяет нормировку и может быть найдено из отношения потока энергии W и энергии индивидуального электрона. В таком случае поток энергии становится пропорционален локальной энергии электрона $W(x) = N\tilde{E}\tilde{v}$, где $\tilde{v}$ — скорость электрона с энергией $\tilde{E}$.

Уравнение потока принимает форму, аналогичную закону Бугера для поглощения монохроматического света:

$$\frac{d}{dx} W(x) = -n\sigma(\tilde{E})W(x) = -\frac{W(x)}{\lambda_{st}(\tilde{E})}. \quad (5)$$

Нагрев вещества (на единицу объема) при этом вычисляется как $G = dW/dx$. Уравнение локальной энергии пучка имеет похожий вид

$$\frac{d}{dx} \tilde{v}\tilde{E}(x) = -\frac{\tilde{v}\tilde{E}(x)}{\lambda_{st}(\tilde{E})}.$$

Величина λ_{st} характеризует пробег электрона с данной энергией и может быть измерена экспериментально из соотношения потока входящей энергии к ее потерям в веществе („stopping power“). В дальнейшем для данной величины мы будем использовать аппроксимационные формулы из работы [29]:

$$\lambda_{st} \cong 1.67 \frac{A(\gamma_b - 1)^2}{Z\rho_{gcc}\gamma_b f_{st}} [\text{cm}],$$

$$f_{st} = 11.2 - 0.5 \ln \left(\frac{Z\rho_{gcc}}{A} \frac{\gamma_b}{(\gamma_b - 1)^2} \right), \quad (6)$$

где ε_b — энергия быстрых электронов, $\gamma_b = 1 + \varepsilon_b/(m_e c^2)$ — гамма-фактор, $A = m_i/m_p$ — массовое число, m_i — масса иона, m_p — масса протона, ρ_{gcc} — плотность плазмы в $[\text{g/cm}^3]$.

Численное решение уравнения (5) будем называть точным. Оно может быть решено различными методами. Явный конечно-разностный метод приводит к схеме

$$\frac{W_{m+1} - W_m}{x_{m+1} - x_m} = -\frac{W_m}{\lambda_{st}(E_m)},$$

где индекс m — шаг по координатной сетке. Этот метод теряет устойчивость, когда размер шага сетки становится больше длины пробега $x_{m+1} - x_m > \lambda_{st}(E_m)$, и, ввиду этого, неприменим на практике. Полностью неявная схема

$$\frac{W_{m+1} - W_m}{x_{m+1} - x_m} = -\frac{W_{m+1}}{\lambda_{st}(E_{m+1})}$$

требует для решения обращения функции $\lambda_{st}(E)$, и также неприменим на практике [30–32]. Однако, как полужная схема

$$\frac{W_{m+1} - W_m}{x_{m+1} - x_m} = -\frac{W_{m+1}}{\lambda_{st}(E_m)},$$

так и конечно-аналитический метод

$$\frac{d}{dx} W(x) = -\frac{W}{\lambda_{st}(E(x_m))}$$

являются абсолютно устойчивыми и приводят к близким результатам [33].

3. Многогрупповой метод

Обсудим практическое применение многогруппового метода в задаче нагрева вещества пучком электронов. Многогрупповой подход подразумевает аппроксимацию функции распределения на некоторой дискретной сетке по энергиям электронов $E_1, E_2, \dots, E_N$ в виде совокупности групп $f_1, f_2, \dots, f_N$ с фиксированной энергией. При этом изменение общей энергии осуществляется за счет перехода электронов из одной энергетической группы в другую. После дискретизации уравнение (3) и величины примут вид:

$$v_i \frac{\partial}{\partial x} f_i = -\sigma_i n v_i f_i + \sigma_{i+1} n v_{i+1} f_{i+1},$$

$$f = n \delta_{i_0}^{i_0}, \quad (7)$$

$$W = \sum_i E_i v_i f_i = n E_{i_0} v_{i_0},$$

$$G = \sum_i (E_i - E_{i-1}) \sigma_i n v_i f_i = (E_{i_0} - E_{i_0-1}) \sigma_{i_0} n v_{i_0} f_{i_0},$$

где индекс i — номер энергетической группы, индекс i_0 соответствует энергии моноэнергетического пучка электронов, σ_{i+1} — эффективное сечение соударения, соответствующее потерям энергии $E_{i+1} - E_i$. Взаимосвязь σ_{i+1} с экспериментально измеряемой величиной λ_{st} может быть найдена из рассмотрения потерь энергии моноэнергетическим пучком. При распространении моноэнергетического потока W с энергией E_0 вещество нагревается с плотностью мощности W/λ_{st} . Приравнявая $G = W/\lambda_{st}$ (и для удобства заменив i_0 на j), получаем

$$\frac{E_j \cdot n v_j}{\lambda_{st}(E_j)} = (E_j - E_{j-1}) \sigma_j n v_j f_j, \quad (8)$$

$$n \sigma_j = \frac{1}{\lambda_{st}(E_j)} \frac{E_j}{(E_j - E_{j-1})} = \frac{1}{\lambda_j}.$$

Таким образом, уравнение мощности потока электронов в пучке будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{dW_i}{dx} = -\frac{W_i}{\lambda_i} + \frac{E_i}{E_{i+1}} \cdot \frac{W_{i+1}}{\lambda_{i+1}}. \quad (9)$$

Дискретизация данной системы уравнений осуществляется аналогично (5). Поскольку электроны переходят только из групп с более высокой энергией в группы с более низкой, уравнения можно интегрировать по пространству последовательно, начиная с верхней энергетической группы. Обозначим $h_i = E_i/E_{i+1} \cdot W_{i+1}/\lambda_{i+1}$ — объемный поток энергии из энергетической группы $(i+1)$ в группу i . Для верхней группы с начальным, а значит с наибольшим значением энергии, данная величина равна нулю, для $i < N$ — известна из решения уравнения в группе $(i+1)$. Ее можно найти из баланса энергии:

$$h_{m,i} = \frac{E_{i-1}}{E_i} \cdot (W_{m-1,i} - W_{m,i} + h_{m,i+1} \cdot \Delta x),$$

где первый индекс обозначает шаг по координате. Полагая этот поток постоянным в ячейке, получаем полувязкую и квазианалитическую дискретные схемы:

$$\frac{W_{m+1,i} - W_{m,i}}{x_{m+1} - x_m} = -\frac{W_{m+1,i}}{\lambda_i} + h_{m,i},$$

$$W_{m+1,i} = \frac{W_{m,i} + (x_{m+1} - x_m) h_{m,i}}{1 + (x_{m+1} - x_m)/\lambda_i},$$

и

$$\frac{dW_i}{dx} = -\frac{W_i}{\lambda_i} + h_{m,i},$$

$$W_{m+1,i} = W_{m,i} e^{-(x_{m+1}-x_m)/\lambda_i} + \lambda_i h_{m,i} \left(1 - e^{-(x_{m+1}-x_m)/\lambda_i}\right).$$

Энергия, которая поглотилась в веществе, — это энергия, которая не перешла в нижнюю группу. Значит, распределение удельной энергии, переданной на единицу объема в i -й энергетической группе мы можем найти как разность между значением мощности потока до перехода в следующую группу и значением после, поэтому поглощение в веществе рассчитывается следующим образом:

$$g_{m,i} = \left(1 - \frac{E_{i-1}}{E_i}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} (W_{m-1,i} - W_{m,i} + h_{m,i+1} \Delta x). \quad (10)$$

Как только все частицы в потоке переходят в нижнюю энергетическую группу с новым значением энергии, расчет снова проводится по всей расчетной области для следующей энергетической группы, пока вся энергия не поглотится в веществе. Поэтому полная энергия, передаваемая единице объема вещества, рассчитывается как сумма вкладов из каждой группы: $G_m = \sum_i g_{mi}$.

4. Сходимость многогруппового метода к точному решению

Проблемой многогруппового метода является его медленная сходимость к точному решению для моноэнергетического пучка. В качестве примера рассмотрим поглощение моноэнергетического пучка с начальной энергией $E_0 = 200$ keV в холодном алюминии с плотностью 2.678 g/cm³ и со средним зарядом ионов $Z = 2.5$. Точное решение уравнения (5) для моноэнергетического пучка без учета рассеяния на равномерной сетке с шагом $1 \mu\text{m}$ приводит к характерному распределению поглощаемой мощности, аналогичному брегговскому пику для ионов. Отметим, что учет рассеяния электронов привел бы к уширению данного пика.

Сравнение этого точного решения с решением многогруппового уравнения (9) на аналогичной сетке с различным числом групп представлено на рис. 2. Как видим, в многогрупповом методе пик размывается, и чем меньше групп используется, тем шире пик. Также на графике видно, что сходимость многогруппового метода происходит при достаточно большом количестве групп (около 1000) для шага по координатной сетке $\Delta x = 1 \mu\text{m}$, при этом найденное численное решение

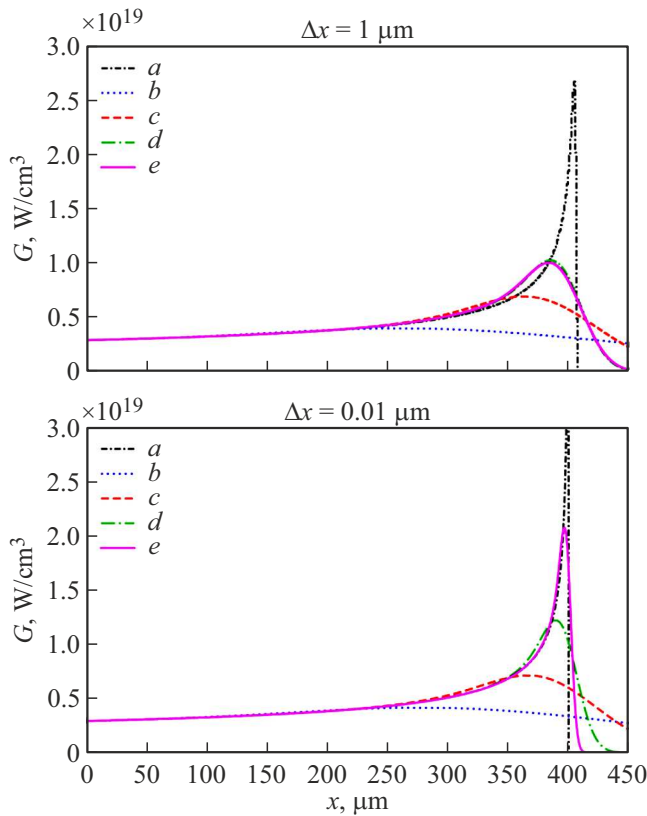


Рис. 2. Распределение поглощенной энергии в точном (квази-аналитическом) решении и для многогруппового приближения в зависимости от шага сетки, кривые соответствуют численным решениям: *a* — точное решение, *b* — многогрупповой метод для 10 групп, *c* — 100 групп, *d* — 1000 групп, *e* — 10000 групп.

существенно отличается от аналитического. Уменьшение шага сетки и увеличение числа групп позволяет приблизиться к точному решению.

5. Гибридный метод

В точном решении уравнения (5) все частицы в одной точке пространства обладают одинаковой энергией, а в многогрупповом приближении поток частиц разбивается на группы по энергиям, и частицы могут иметь разные значения энергии в одной точке. Для сходимости многогруппового подхода к точному решению и получения в расчетах брегговского пика, который должен наблюдаться в расчетах поглощения энергии электронов в веществе в приближении без рассеяния, требуется большое количество групп.

Сконструируем многогрупповой подход, в котором в отличие от обычного многогруппового приближения значение средней энергии внутри группы не является фиксированным, а находится из решения уравнения. Для этого зададим уравнения для плотности потока частиц $F_i = v_i f_i$, и для плотности потока энергии $W_i = \langle E_i \rangle v_i f_i$

в каждой энергетической группе на дискретной пространственной сетке. В случае отсутствия перехода частиц из группы в группу динамика W определяется уравнением (5), а F сохраняется. Таким образом, уравнение с переходными членами решения δW и δF имеет вид

$$W_{m+1,i} = W_{m,i} e^{-(x_{m+1}-x_m)/\lambda_{st}} + \delta W_{m+1,i}, \quad (11)$$

$$F_{m+1,i} = F_{m,i} + \delta F_{m+1,i}.$$

Здесь первый индекс обозначает координату, а второй — номер группы; δW и δF определяют переход порции частиц из группы $(i+1)$ в группу i . Пока средняя энергия в группе $\langle E_i \rangle = W_i/F_i$ остается выше нижней границы группы E_i , переходные члены δW и δF равны нулю. В момент перехода из группы в группу δW и δF равняются текущим значениям потока частиц и энергии: все частицы перебрасываются из данной группы в нижнюю. Длина пробега λ_{st} определяется именно $\langle E_i \rangle$, а не является фиксированной, в отличие от многогруппового приближения. Изменение длины пробега позволяет корректно описать наличие пика.

Поглощение энергии на единицу объема можно получить из полученных значений мощности потока для каждой группы в каждой точке пространства:

$$g_{m,i} = \frac{1}{\Delta x} \cdot (W_{m-1,i} - W_{m,i}), \quad (12)$$

$$G_m = \sum_i g_{m,i}.$$

Заметим, что формулы для расчета поглощения энергии здесь аналогичны выражениям для точного решения, так как в обоих методах энергия электронов в пучке меняется непрерывно.

Если в моноэнергетическом случае функция распределения описывается одним пиком нулевой ширины, а в многогрупповом методе — кусочно-постоянной функцией с фиксированными интервалами, то в данном подходе она является суммой некоторого числа дельта-функций:

$$f = \sum_i N_i \cdot \delta(E - \langle E_i \rangle) = \sum_i \frac{F_i}{v_i} \cdot \delta\left(E - \frac{W_i}{F_i}\right).$$

Очевидно, что на одной группе этот метод полностью аналогичен точному решению для моноэнергетического спектра. Наличие многих групп позволяет описать ситуацию, когда в одной точке пространства находятся электроны различных энергий. Такая ситуация может возникнуть, например, при отражении моноэнергетического пучка от границ вещества мишени, когда падающий и двукратно отраженный пучок распространяются в одном направлении, но с разными энергиями. Использование уравнения (5) в этом случае возможно, но вместо координаты x в нем необходимо рассматривать координату вдоль луча, различную для падающего и отраженного пучков в одной точке пространства. В случае двумерной задачи это приводит к необходимости расчета траекторий электронов или трассировки лучей.

Предлагаемый многогрупповой метод с непрерывным изменением энергии внутри группы обобщается на многомерный случай тривиальным способом, а в случае стороннего моноэнергетического источника позволяет найти точное решение на небольшом, по сравнению с классическим многогрупповым подходом, количестве групп.

С вычислительной точки зрения при решении одномерной задачи метод (11) уступает в скорости квазианалитическому решению уравнения (5) и сравним с многогрупповым методом (10) на том же количестве групп. При этом в случае наличия отражения уравнение (5) в явном виде неприменимо, а сходимость метода (10) достигается на тысячах групп. Метод (11) может применяться, если число групп не меньше числа отражений электронного пучка от границ мишени, что при рассматриваемых параметрах для мишени толщиной $\sim 100 \mu\text{m}$ составляет менее десяти. Таким образом, для задач с небольшим числом отражений пучка от границ мишени метод (11) оказывается существенно быстрее метода (10). В случае мишеней с толщиной $\sim 1 \mu\text{m}$ нагрев происходит практически однородно, и использование метода (11) неоправданно.

6. Сравнение многогруппового и гибридного подходов в случае не моноэнергетического распределения

Рассмотрим теперь не моноэнергетический спектр пучка, а случай гауссового энергетического распределения электронов, при котором $W_0 \propto \exp(-(E-E_0)^2/dE^2)$, где $E_0 = 200 \text{ keV}$, а $dE = 10, 20, 40 \text{ keV}$. В численных расчетах начальная функция распределения описывается дискретно и представляет собой сумму дельта-функций. В гибридном подходе в случае моноэнергетического спектра, который задается одной дельта-функцией, поглощение энергии описывается одним брегговским пиком. Соответственно для функции распределения, которая задана в виде суммы дельта-функций, будет наблюдаться последовательность пиков поглощения. Глубина, на которой поглощается основная часть энергии в случае моноэнергетического пучка, зависит от длины пробега электронов с энергией E_i , параметра $\lambda_{st}(E_i)$. Для нескольких моноэнергетических пучков с разными исходными энергиями, которые облучают мишень одновременно, брегговский пик будет наблюдаться на разной глубине в зависимости от $\lambda_{st}(E_i)$, где $i \in [1, N]$, N — количество пучков с разными энергиями. Если λ_{st} для соседних значений в сетке энергий отличаются больше, чем на шаг координатной сетки, то брегговские пики наблюдаются по отдельности, что не соответствует физическому описанию явления в случае непрерывного разброса по энергии в исходном пучке. Отсюда появляется условие сходимости этого метода:

$\Delta x > |\lambda_{st}(E_i) - \lambda_{st}(E_{i+1})|$, где Δx — шаг сетки, а $\lambda_{st}(E_i)$ — длина пробега электрона с энергией E_i . В многогрупповом подходе этот численный дефект не наблюдается из-за размытия пиков поглощения, и сходимость метода не будет нарушаться при невыполнении условия выше. На рис. 3, *d* видно, что при увеличении количества групп и удовлетворении условия сходимости, численный дефект исчезает, и решения, полученные с помощью гибридного и многогруппового методов, сходятся.

При распределении, более близком к моноэнергетическому, и при удовлетворении условия сходимости для шага сетки видно (рис. 3, *c*), что гибридный метод при увеличении количества групп сходится быстрее, чем многогрупповой, т.е. чем ближе распределение к моноэнергетическому, тем лучше сходится гибридный метод. В многогрупповом методе требуется более мелкая сетка и большее количество групп для сходимости. Но при отсутствии выполнения условия для шага сетки и шага между λ_{st} гибридный метод перестает работать корректно, и наблюдается характерная гребенка, где каждый пик поглощения энергии соответствует дельта-функциональному входному пучку с энергией, соответствующей одному из значений из разбитого на группы спектра. Такой численный дефект критичен в расчетах гидродинамики.

Гибридный метод предпочтительней использовать, чем многогрупповой, когда изначальный спектр близок к моноэнергетическому. Он работает лучше многогруппового при $\Delta E < 0.1E$, когда расходимость исходного пучка около 10 %. Важно, что при высоком разрешении пространственной сетки необходимо большее количество энергетических групп, иначе метод расходится, и описание энергетического спектра становится принципиально нефизичным. Подобной проблемы в многогрупповом методе нет, при увеличении пространственной сетки решение перестает сходиться к точному, и пик поглощения оказывается размытым, что приводит к занижению амплитуды ударной волны.

7. Влияние метода расчета на газодинамику мишени

Было проведено численное моделирование динамики облучения твердотельной мишени из алюминия пучком электронов в RZ-геометрии в гибридном приближении и в многогрупповом энергетическом приближении. В программный комплекс с радиационной газодинамикой 3DLINE [34] был встроен и протестирован численный модуль учета теплопереноса пучком электронов на основе многогруппового и гибридного методов. Термодинамические параметры были рассчитаны как функция плотности и температуры по полуэмпирической методике FEOS [35,36], основанной на модели Томаса–Ферми. Коэффициенты переноса теплового излучения были рассчитаны по столкновительно-излучательной модели кодом THERMOS [37]. Моноэнергетический параллельный

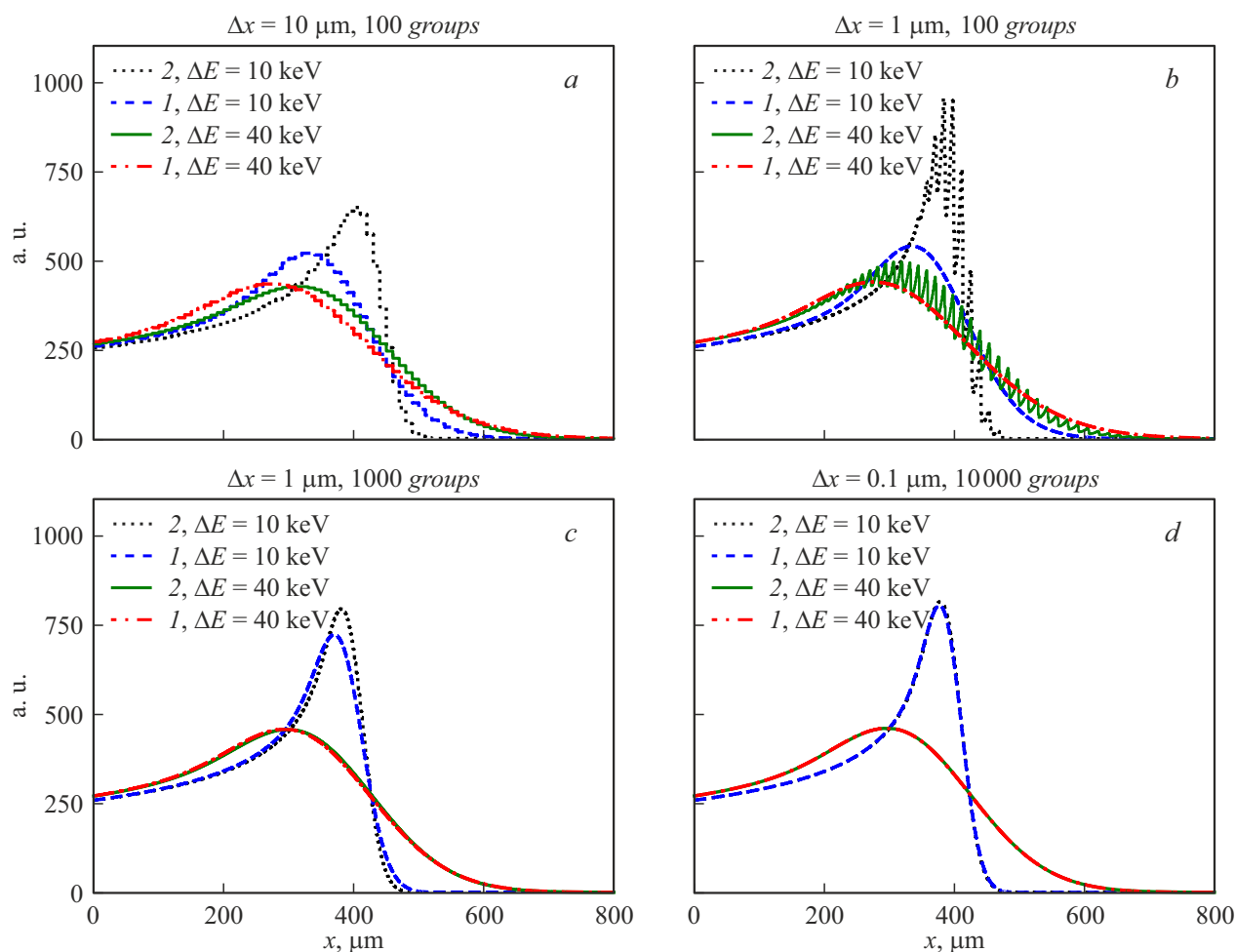


Рис. 3. Распределение поглощаемой мощности для гибридного и многогруппового методов в зависимости от количества групп и шага сетки для двух вариантов начального распределения энергии; кривые с обозначением (1) соответствует многогрупповому методу (количество групп указано на графиках), обозначение кривых (2) соответствует гибриднему методу.

пучок электронов падал на мишень под прямым углом, энергия электронов составляла 200 keV, интенсивность потока $2 \cdot 10^{17}$ W/cm², радиус пучка $R = 100 \mu\text{m}$. Моделирование проводилось для полубесконечной мишени из алюминия с комнатной температурой и плотностью 2.678 g/cm³. Облучение пучком электронов в моделировании проводилось в течение всего расчетного времени.

Распределения поглощаемой мощности на начальный момент времени, полученные в этих двух приближениях, приведены на рис. 4 (в объеме электронный пучок падает на мишень сверху, пунктир отмечает поверхность мишени) и рис. 5 (как функция расстояния от поверхности мишени). Здесь и далее нулю оси z соответствует положение поверхности мишени в начальный момент времени, положительным значениям оси z — глубина.

Различие между методами проявляется в двух аспектах: уже обсуждавшееся уширение и размытие пика поглощения в многогрупповом методе (рис. 5 и 2) и новый, существенно двумерный эффект: численная диффузия в перпендикулярном распространению пучка направлении для многогруппового метода. Данный эффект приводит

к уширению пучка и снижению средней интенсивности в нем, вследствие чего даже до достижения пика поглощения на рис. 6 наблюдаются различия в поглощаемой мощности.

Влияние этих двух численных эффектов на динамику вещества мишени можно показать, сравнив двумерные распределения плотности в разные моменты времени, изображенные на рис. 6. Динамика разлета вещества в вакуум в обоих приближениях описывается одинаково. Это является ожидаемым эффектом, так как существенные различия между методами наблюдаются вблизи пика поглощения, и за рассматриваемое время их влияние не успевает сказаться на динамике вещества вблизи поверхности. Это верно и для ударной волны, распространяющейся в перпендикулярном пучку направлении: если рассматривать срез вдали от пика поглощения, то значения амплитуды ударной волны, полученные в этих двух расчетах, окажутся близкими.

Основные различия наблюдаются вблизи пика поглощения (рис. 7). Из-за практически полного отсутствия „хвоста“ после пика градиент температуры (и, как след-

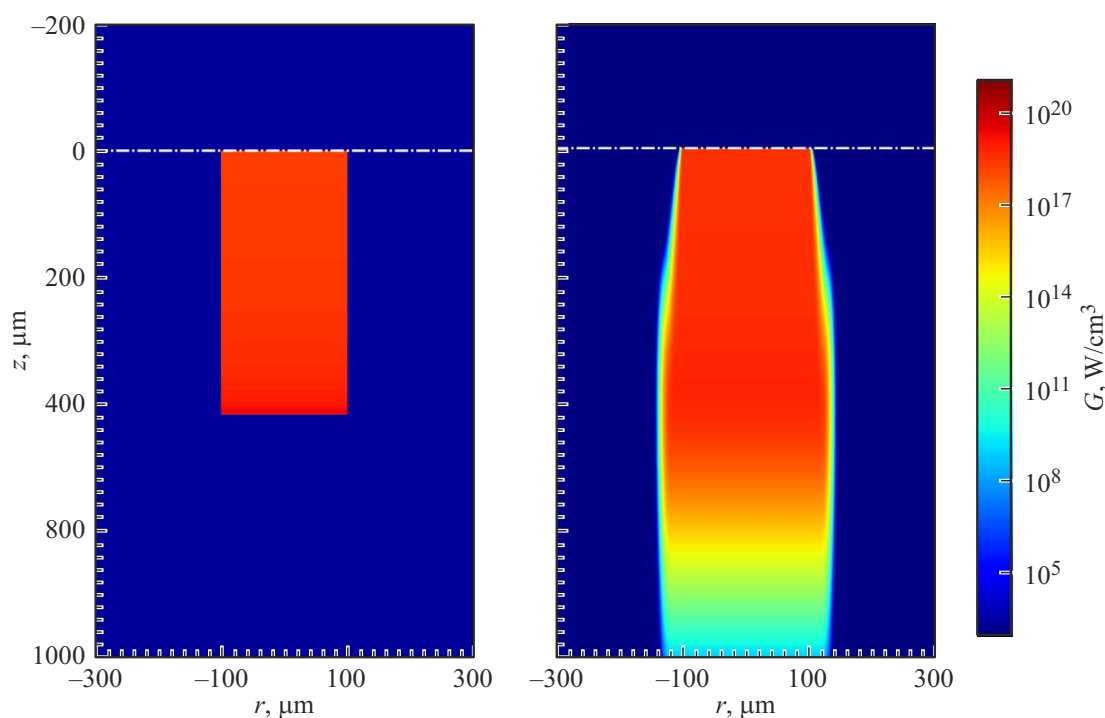


Рис. 4. Поглощаемая мощность, рассчитанная гибридным методом (слева) и в многогрупповом приближении (справа) в начальный момент времени в логарифмическом масштабе.

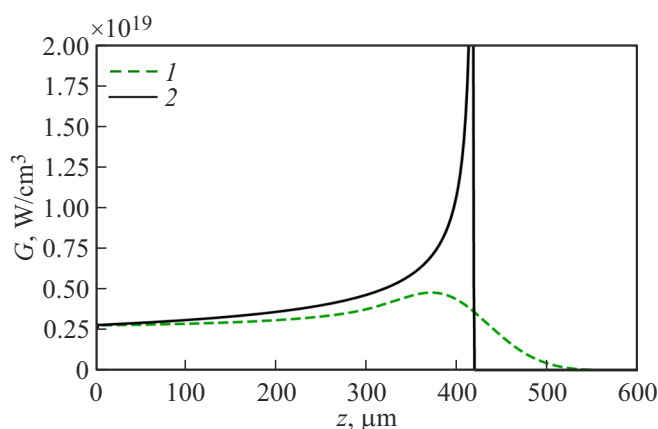


Рис. 5. Поглощаемая мощность в начальный момент времени в зависимости от расстояния до поверхности мишени; 1 — решение многогрупповым методом (100 групп), 2 — решение гибридным методом (точное решение).

ствие, давления) в гибридном методе полностью обусловлен процессами теплопроводности (как электронной, так и лучистой), в то время как для многогруппового метода есть характерный масштаб, обусловленный профилем поглощения. Это приводит к многократно отличающимся амплитудам ударной волны, распространяющейся от пика поглощения. Если в гибридном методе с узким пиком энергопоглощения степень сжатия вещества достигает 10, то в многогрупповом методе из-за уширения области энерговложения она составляет

менее 5%. При этом общая вложенная энергия в обоих случаях одна и та же.

Влияние этого „взрыва“ в толще мишени сказывается и на ударной волне в направлении, перпендикулярном распространению пучка электронов. Соответствующие распределения плотности на глубине $100\text{ }\mu\text{m}$ (вблизи положения пика поглощения для горячего вещества) в различные моменты времени приведены на рис. 8. Различие между методами в этом отношении слабее, так как в перпендикулярном направлении резкий градиент присутствует и в многогрупповом методе, пусть и смазанный численной диффузией. Тем не менее при использовании многогруппового метода степень сжатия вещества снижается с 4.5 до 2.6.

Заключение

В работе рассматривалось решение задачи о нагреве плотной мишени моноэнергетическим пучком электронов в многогрупповом и усовершенствованном (гибридном) энергетических приближениях. При применении классического многогруппового метода требуется не только большое количество групп для сходимости к точному решению, а также подробная пространственная сетка — заметные расхождения начинаются в области, где пробег электрона становится сравним с шагом сетки. Таким образом, неизбежным эффектом является уширение и размытие пика поглощения, что приводит к заметным отличиям в расчетах динамики мишени:

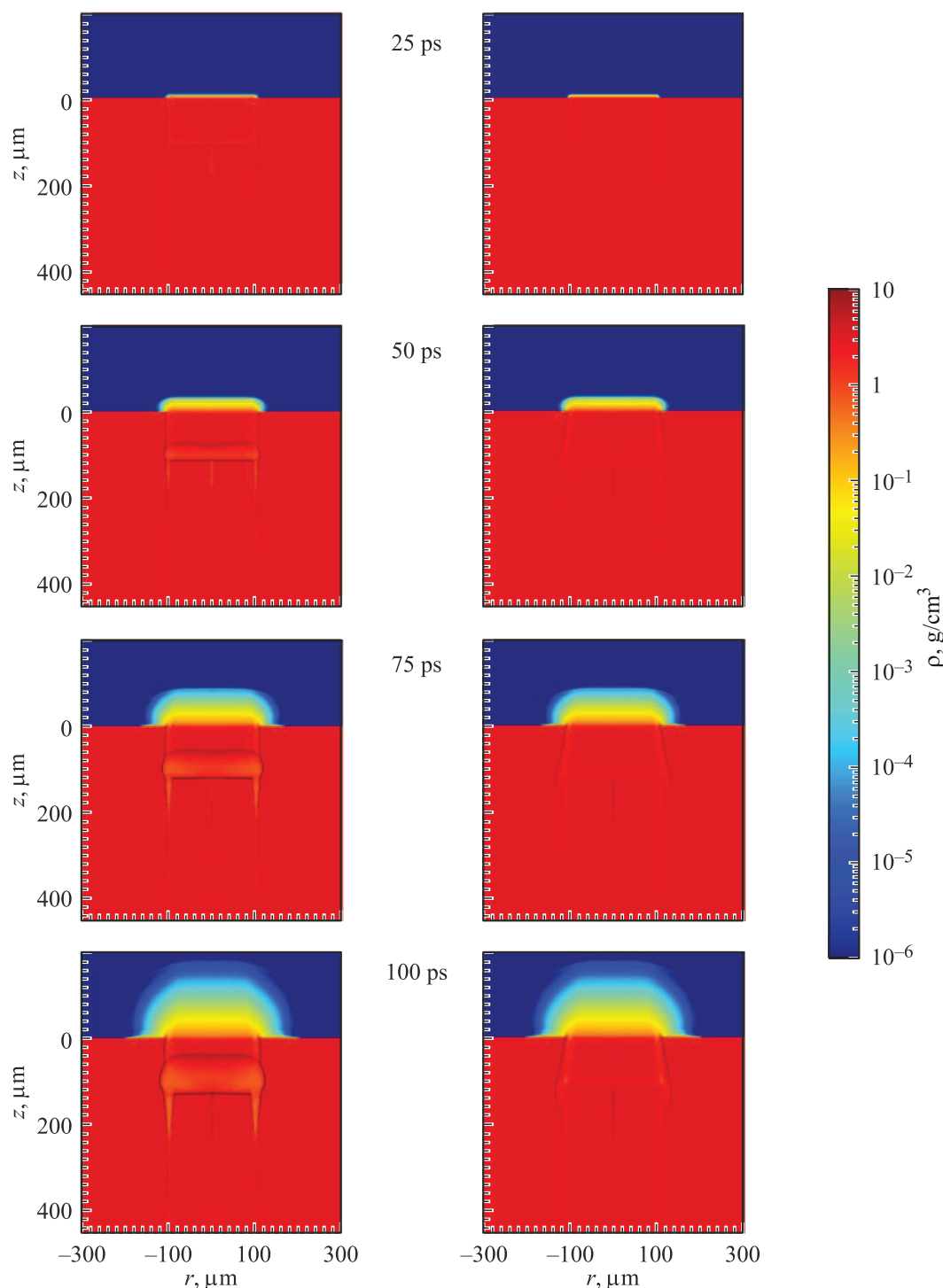


Рис. 6. Профили плотности, рассчитанные гибридным методом (слева) и в многогрупповом приближении (справа) в разные моменты времени (25, 50, 75, 100 ps) в логарифмическом масштабе.

градиент температуры в направлении распространения пучка, определяющий интенсивность ударной волны, зависит от численных параметров расчета (числа групп и шага сетки).

Модификация многогруппового метода („гибридный метод“), основанная на одновременном отслеживании как числа частиц, так и потока энергии в каждой

группе, приводит к сходимости к точному решению на малом числе групп. Данный метод позволяет провести расчет поглощения энергии пучка в задаче с граничными условиями отражения без трассировки отдельных электронов. Недостатком метода является ограничение на минимальное число учитываемых групп: оно должно быть не меньше, чем максимальное число отраже-

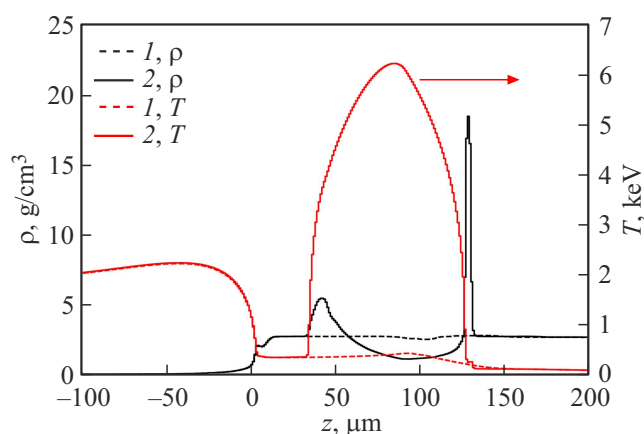


Рис. 7. Температура и плотность вдоль оси z , рассчитанные гибридным методом (сплошные линии) и в многогрупповом приближении (пунктир) через 100 ps после начала облучения.

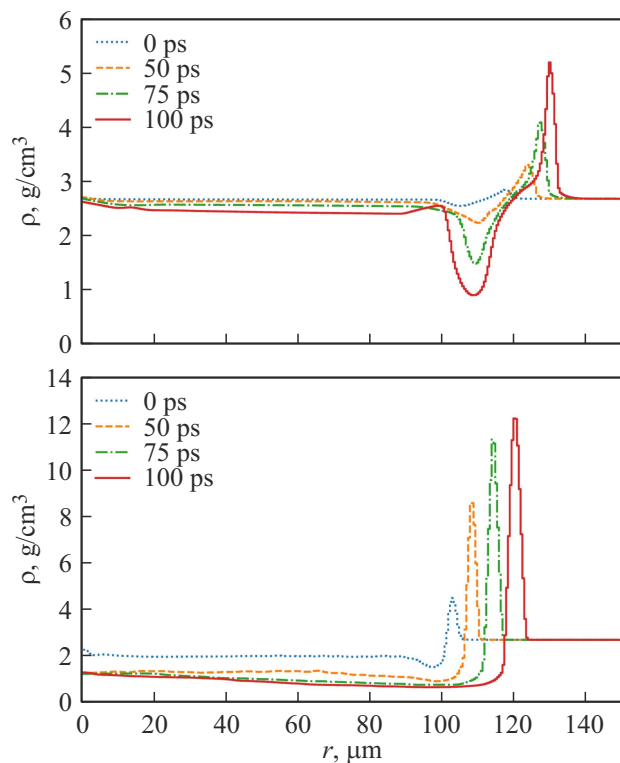


Рис. 8. Распределения плотности в срезе на глубине $100 \mu\text{m}$, полученные гибридным методом (сверху) и в многогрупповом приближении (снизу) в различные моменты времени.

ний электронов от границ мишени. Достоинством — простота обобщения на случай многомерной задачи и возможность учета рассеяния без использования метода Монте-Карло.

На основе разработанного метода была проведена модификация РГД-кода 3DLINE и выполнен расчет динамики алюминиевой мишени бесконечной толщины под воздействием электронного пучка с энергией 200 keV

с интенсивностью $2 \cdot 10^{17} \text{ W/cm}^2$. Расчет сравнивался с результатами, полученными в многогрупповом приближении на 100 энергетических группах. Разница в поглощении энергии в двух методах приводит к существенным отличиям в нагреве и динамике распространения ударных волн в веществе. Наблюдается многократное различие в амплитудах для ударной волны, распространяющейся вдоль пучка, в то время как для волны в перпендикулярном направлении различия не столь существенны.

Таким образом, в задачах, в которых требуется рассмотрение облучения вещества моноэнергетическим или близким к моноэнергетическому пучком электронов, более эффективным оказывается гибридный метод. Предложенный подход позволяет достичь высокой точности расчетов при существенно меньших вычислительных затратах, что важно для моделирования сложных физических процессов. Наблюдаемые значительные различия в динамике ударных волн, особенно в направлении распространения пучка, показывают принципиальное влияние точности описания поглощения энергии на конечный результат моделирования.

Благодарность

Авторы выражают благодарность за предоставленные ресурсы Центру высокопроизводительных расчетов НИЯУ МИФИ.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWU-2026-0009).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J. Trela, W. Theobald, K.S. Anderson, D. Batani, R. Betti, A. Casner, J.A. Delettrez, J.A. Frenje, V.Y. Glebov, X. Ribeyre, A.A. Solodov, M. Stoeckl, C. Stoeckl. *Phys. Plasmas*, **25** (5), 052707 (2018). DOI: 10.1063/1.5020981
- [2] R.R. Freeman, D. Batani, S. Baton, M. Key, R. Stephens. *Fusion Sci. Technol.*, **49** (3), 297 (2006). DOI: 10.13182/FST06-A1150
- [3] D. Batani. *Laser Part. Beams*, **20** (2), 321 (2002). DOI: 10.1017/S0263034602202244
- [4] K. Falk. *High Power Laser Sci.*, **6**, e59 (2018). DOI: 10.1017/hpl.2018.53
- [5] J.E. Coleman, J. Colgan. *Phys. Rev. E*, **96** (1), 013208 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.96.013208
- [6] Ю.В. Афанасьев, Н.Н. Демченко, О.Н. Крохин, В.Б. Розанов. *ЖЭТФ*, **72** (1), 170 (1977).

- [7] A.B. Брантов, В.Ю. Быченков. Физика плазмы, **39** (9), 786 (2013). DOI: 10.7868/s0367292113090011 [A.V. Brantov, V.Y. Bychenkov. Plasma Phys. Rep., **39** (9), 698 (2013). DOI: 10.1134/S1063780X13090018]
- [8] C.K. Birdsall, A.B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation* (McGraw-Hill, NY., 1985)
- [9] B. Cohen, A. Kemp, L. Divol. J. Comput. Phys., **229** (12), 4591 (2010). DOI: 10.1016/j.jcp.2010.03.001
- [10] A. Robinson, D. Strozzi, J. Davies, L. Gremillet, J. Honrubia, T. Johzaki, R. Kingham, M. Sherlock, A. Solodov. Nucl. Fusion, **54** (5), 054003 (2014). DOI: 10.1088/0029-5515/54/5/054003
- [11] V. Tikhonchuk. Nucl. Fusion, **59** (3), 032001 (2019). DOI: 10.1088/1741-4326/aab21a
- [12] M. Touati, J.-L. Feugeas, P. Nicolai, J.J. Santos, L. Gremillet, V.T. Tikhonchuk. New J. Phys., **16** (7), 073014 (2014). DOI: 10.1088/1367-2630/16/7/073014
- [13] A.G.R. Thomas, M. Tzoufras, A.P.L. Robinson, R.J. Kingham, C.P. Ridgers, M. Sherlock, A.R. Bell. J. Comput. Phys., **231** (3), 1051 (2012). DOI: 10.1016/j.jcp.2011.09.028
- [14] J.J. Honrubia, J. Meyer-ter Vehn. Plasma Phys. Control. Fusion, **51** (1), 014008 (2009). DOI: 10.1088/0741-3335/51/1/014008
- [15] A.A. Solodov, K.S. Anderson, R. Betti, V. Gotcheva, J. Myatt, J.A. Delettrez, S. Skupsky, W. Theobald. Phys. Plasmas, **21**, 056308 (2014).
- [16] S.Y. Gus'kov, P.A. Kuchugov, G.A. Vergunova. Matter Radiation Extremes, **6** (2), 020301 (2021). DOI: 10.1063/5.0026002
- [17] S. Atzeni, A. Schiavi, J.R. Davies. Plasma Phys. Control. Fusion, **51** (1), 015016 (2009). DOI: 10.1088/0741-3335/51/1/015016
- [18] A. Tentori, A. Colaitis, D. Batani. Matter Radiation Extremes, **7** (6), 065902 (2022). DOI: 10.1063/5.0103631
- [19] M.L. Adams, E.W. Larsen. Prog. Nucl. Energy, **40** (1), 3 (2002). DOI: 10.1016/S0149-1970(01)00023-3
- [20] G.I. Bell, S. Glasstone. *Nuclear Reactor Theory* (US Atomic Energy Commission, Washington, DC, 1970)
- [21] E.E. Lewis, W.F. Miller. *Computational Methods of Neutron Transport* (Wiley, NY., 1984)
- [22] R.E. Alcouffe, E.W. Larsen, W.F. Miller, B.R. Wienke. Nucl. Sci. Eng., **71** (2), 111 (1979). DOI: 10.13182/NSE71-111
- [23] J.E. Morel, L.J. Lorence, R.P. Kensek, J.A. Halbleib, D.P. Sloan. Nucl. Sci. Eng., **124** (3), 369 (1996). DOI: 10.13182/NSE124-369
- [24] B.R. Wienke. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf., **28** (4), 311 (1982). DOI: 10.1016/0022-4073(82)90032-2
- [25] R.P. Datta, A.K. Ray, B.R. Wienke. J. Phys. D-Appl. Phys., **26** (7), 1077 (1993). DOI: 10.1088/0022-3727/26/7/011
- [26] A. Colaitis, G. Duchateau, X. Ribeyre, Y. Maheut, G. Boutoux, L. Antonelli, P. Nicolai, D. Batani, V. Tikhonchuk. Phys. Rev. E, **92** (4), 041101 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevE.92.041101
- [27] G.P. Schurtz, P.D. Nicolai, M. Busquet. Phys. Plasmas, **7** (10), 4238 (2000). DOI: 10.1063/1.1289512
- [28] М.И. Бакирова, В.В. Зверев, В.Я. Карпов, Т.В. Мищенко. Труды ФИАН, **170**, 73 (1986).
- [29] X. Ribeyre, S. Gus'kov, J.-L. Feugeas, P. Nicolai, V.T. Tikhonchuk. Phys. Plasmas, **20** (6), 062705 (2013). DOI: 10.1063/1.4811473
- [30] Д. Поттер. *Вычислительные методы в физике* (Мир, М., 1975) [D. Potter. *Computational Physics* (Wiley, NY., 1973)]
- [31] А.А. Самарский. *Теория разностных схем* (Наука, М., 1977)
- [32] Д. Андерсен, Дж. Танненхилл, Р. Плетчер. *Вычислительная гидродинамика и теплообмен* (Мир, М., 1990), т. 1. [пер. с англ.: D.A. Anderson, J.C. Tannehill, R.H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Hemisphere Publishing Corp., NY., 1984)]
- [33] А.А. Самарский, А.В. Гулин. Устойчивость разностных схем (Наука, М., 1973)
- [34] А.Ю. Круковский, В.Г. Новиков, И.П. Цыгвинцев. Матем. моделирование, **28** (7), 81 (2016). [A.Y. Krukovskiy, V.G. Novikov, I.P. Tsygvintsev. Math. Models Comput. Simul., **9** (1), 48 (2017). DOI: 10.1134/S2070048217010082]
- [35] S. Faik, A. Tauschwitz, I. Iosilevskiy. Comput. Phys. Commun., **227**, 117 (2018). DOI: 10.1016/j.cpc.2018.01.008
- [36] A.J. Kemp, J. Meyer-ter Vehn. Nuclear Inst. Methods Phys. Research, A, **415** (3), 674 (1998). DOI: 10.1016/S0168-9002(98)00446-X
- [37] I.Yu. Vichev, A.D. Solomyannaya, A.S. Grushin, D.A. Kim. High Energy Density Phys., **33**, 100713 (2019). DOI: 10.1016/j.hedp.2019.100713