

03

Колебания подвешенного в воздушном потоке цилиндра со стабилизатором

© А.Н. Рябинин, М.И. Иванов, А.В. Данилов

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: a.ryabinin@spbu.ru

Поступило в Редакцию 24 июня 2025 г.

В окончательной редакции 9 ноября 2025 г.

Принято к публикации 25 ноября 2025 г.

В экспериментах в аэродинамической трубе изучены колебания кругового цилиндра, снабженного стабилизатором. Цилиндр подвешен в воздушном потоке на тросовой подвеске и может колебаться. Ось цилиндра в равновесном положении направлена под небольшим отрицательным углом атаки к направлению скорости набегающего потока. Стабилизатор удерживает цилиндр в этом положении, обеспечивая малое лобовое сопротивление. Колебания цилиндра в воздушном потоке зарегистрированы акселерометром, который вместе с контроллером находится внутри цилиндра. Прибор позволяет измерять три проекции угловой скорости цилиндра на оси системы координат, связанной с цилиндром. В отдельном эксперименте определены аэродинамические коэффициенты сил и моментов, действующих на цилиндр. Модифицирована математическая модель, ранее предложенная для описания колебаний цилиндра. Модель правильно описывает угловые колебания цилиндра вокруг оси, близкой к вертикальной, поперечные колебания, амплитуда которых увеличивается с ростом скорости воздушного потока, и режим биений, возникающий в определенном диапазоне скоростей воздушного потока.

Ключевые слова: аэродинамическая труба, акселерометр, плохо обтекаемое тело, математическая модель, обыкновенные дифференциальные уравнения, числа подобия.

DOI: 10.61011/JTF.2026.03.62530.162-25

Введение

При переносе плохо обтекаемых тел, подвешенных на тросовой подвеске, могут возникать недопустимые раскачивания тела, которые приводят к аварии. Подобные ситуации, в частности, возникают при транспортировке грузов, переносимых в подвешенном состоянии под летательным аппаратом, например, вертолетом [1].

С.В. Сипаров изучал устойчивость переноса груза на внешней тросовой подвеске под вертолетом [2]. Им было получено характеристическое уравнение, предназначенное для анализа устойчивости движения груза. Предполагается для определения устойчивости использовать критерий Рууса–Гурвица. Устойчивым в настоящей работе принималось движение, при котором груз на внешней подвеске неподвижен относительно точки подвеса. Это избыточное требование с точки зрения безопасности полета. Допустимы колебания, не представляющие опасности для летательного аппарата. В работе [3] рассматривались уравнения движения груза, закрепленного под вертолетом с помощью двухзвенной подвески, причем предполагалось, что вертолет, в общем случае, перемещается по криволинейной траектории с изменяющейся скоростью. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений 24-го порядка. Приводится пример расчета движения вертолета, переносящего контейнер. В настоящей работе не приводятся зависимости аэродинамических сил носимого тела от

углов, описывающих его ориентацию. Универсальный подход к моделированию движения пары вертолет — груз на внешней подвеске изложен в статье [4]. Однако и в этой статье конкретному виду аэродинамических сил не уделяется внимания. Много сведений о переносе грузов на внешней подвеске приводится в монографии [5]. Рассматриваются устройства, используемые для стабилизации движения груза, переносимого на внешней подвеске под вертолетом, построение уравнений движения, применяемые для этого системы координат.

Модель взаимодействия груза на тросовой подвеске и вертолета рассматривается в работе [6] с учетом ускоренного движения точки подвеса троса к вертолету. Конкретный вид аэродинамических сил не рассматривается. Сравнение данных, полученных в эксперименте в аэродинамической трубе и в результате вычислений с использованием математической модели, проводится в работе [7]. Обнаружены режим колебаний с постоянной амплитудой и режим биений.

Статья [8] посвящена анализу движения цилиндрического груза, у которого отношение длины L к диаметру D равно $\lambda = L/D = 2$. Груз переносится с постоянной скоростью на внешней тросовой подвеске под вертолетом. Груз имеет стабилизатор, который в равновесном положении устанавливает цилиндр в направлении, соответствующем минимуму лобового сопротивления. Однако это положение неустойчиво. Цилиндр совершает угловые колебания вокруг вертикальной оси. Угловые

колебания не представляют опасности для полета летательного аппарата, если частота колебаний существенно отличается от частоты колебаний груза на подвеске под действием силы тяжести. Близкие частоты приводят к резонансным явлениям, следствием которых являются интенсивные опасные поперечные колебания груза. В статье [8] предложена математическая модель, в которой аэродинамические коэффициенты боковой силы и момента рыскания представляются линейными функциями угла скольжения, а угловые колебания вокруг вертикальной оси описываются дифференциальным уравнением типа уравнения Ван-дер-Поля.

В настоящей работе проводится экспериментальное изучение колебаний цилиндра со стабилизатором. Математическая модель, предложенная в [8], модифицируется.

Одним из широко распространенных методов исследования колебаний является дистанционное определение положения движущегося тела триангуляционным лазерным датчиком перемещений. Такие датчики применяются главным образом для изучения колебаний тел вдоль одного направления [9,10]. Другим методом является использование тензодатчиков, входящих в упругую подвеску колеблющегося тела [11,12]. Оба эти метода трудно применить в эксперименте по изучению колебаний тела, подвешенного в потоке. Наиболее подходящим методом является использование акселерометров. Большие возможности имеются у акселерометров, предназначенных для работы совместно с контроллером Arduino. Контроллер Arduino стал популярным в связи с массовым развитием робототехники. Контроллер может работать как связующее звено между десятками измерителей различных физических величин и компьютерами. Рост популярности и объемов изготовления привел к существенному удешевлению приборов. Контроллер, разработанный итальянской фирмой Arduino, изготавливается во многих странах под разными названиями, что разрешено разработчиком. Контроллер Arduino вместе с акселерометрами применяется для нахождения углов, определяющих ориентацию летательных аппаратов различного типа. В частности, контроллер Arduino с акселерометрами применяется в беспилотных летательных аппаратах самолетного типа и квадрокоптерах [13,14].

Этот метод регистрации движения подвешенного в воздушном потоке тела выбран в настоящей работе.

1. Экспериментальное определение проекций угловой скорости на оси связанной системы координат

Эксперименты проводились на аэrodинамической трубе АТ-12 Санкт-Петербургского государственного университета [15]. Аэродинамическая труба имеет открытую рабочую часть, выходная часть сопла представляет собой круг диаметром 1.5 м. Скорости воздушного потока могут плавно изменяться в пределах от 0 до 40 м/с.

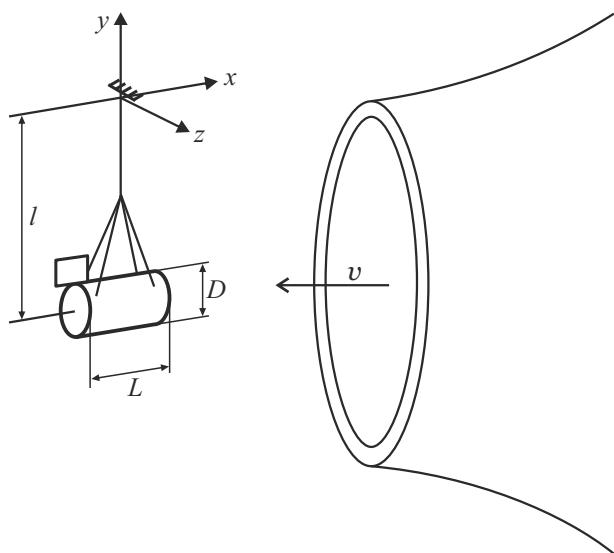


Рис. 1. Схема эксперимента.

На рис. 1 представлена схема расположения цилиндра на подвеске в рабочей части аэродинамической трубы. Расстояние от точки подвеса до оси цилиндра $l = 1.06$ м, длина цилиндра $L = 0.46$ м, диаметр цилиндра $D = 0.25$ м. К кормовой части цилиндра жестко прикреплен стабилизатор, имеющий форму плоской прямоугольной пластины. Длина стабилизатора равна 0.21 м, высота — 0.115 м. Таким образом, площадь стабилизатора в два раза меньше площади поперечного сечения цилиндра. Подвеска выполнена из хлопчатобумажной нити. В отсутствие воздушного потока цилиндр находится в центре рабочей части.

В центре цилиндра в полости находится акселерометр GY-521 на основе микросхемы MPU 6050 и контроллер Piranha UNO, являющийся усовершенствованным аналогом Arduino UNO. Акселерометр расположен в центре цилиндра.

Акселерометр GY-521 измеряет три проекции перегрузки, действующей на тело, на оси неинерциальной системы координат, жестко связанной с микросхемой, и, следовательно, с цилиндром. Если устройство неподвижно, проекция на вертикальную ось равна единице. Кроме того, в состав акселерометра входят три гироскопа, измеряющие три проекции угловой скорости на те же оси. Программирование контроллера и считывание показаний осуществляется с помощью свободно распространяемой программы Arduino IDE. Контроллер соединен с компьютером экранированным кабелем, длина которого составляет 6 м. Программирование осуществляется на варианте языка C. Arduino IDE организует виртуальный последовательный порт, через который происходит загрузка кода из компьютера в контроллер и считывание показаний с контроллера. Для обработки данных измерений была написана небольшая программа на языке Free Pascal, передающая данные из последовательного

порта в текстовый файл. Данные в текстовых файлах в дальнейшем обрабатывались. Каждый файл содержал 1700 строчек, в каждой строчке были данные, считываемые по шести каналам, и время считывания. Данные считывались через интервал $\Delta t = 0.017$ с.

Была проведена калибровка акселерометра, которая позволила определить коэффициенты, связывающие показания прибора с проекциями угловой скорости. Для калибровки использовались результаты измерения ускорения и угловой скорости при колебаниях цилиндра в отсутствие воздушного потока в рабочей части аэродинамической трубы. Определялась цена деления показаний перегрузки в одном из каналов, в котором регистрировалась проекция на вертикальную ось неподвижного цилиндра. Затем цилиндр раскачивался в плоскости, содержащей точку подвеса и ось цилиндра. Колебания медленно затухали. По периодически изменяющимся показаниям того же канала определялись максимальное и минимальное показания перегрузки, период колебаний. По их значениям вычислялась амплитуда угловых колебаний. Небольшая амплитуда позволяла считать колебания гармоническими и вычислить угловую скорость в зависимости от времени. Одновременно канал измерения угловой скорости записывал зависимость угловой скорости от времени. Сравнение показаний двух каналов было основой для нахождения градуировочного коэффициента, связывающего показания канала измерения угловой скорости с истинными значениями угловой скорости. Также оказалось возможным оценить линейность прибора, повторяя измерения многократно при разных амплитудах колебаний. Поворот акселерометра на угол π позволил узнать изменение чувствительности. Оказалось, что показания прибора могут несколько отличаться при смене направления оси. Производитель не указал погрешность определения угловой скорости. Поэтому погрешность пришлось оценивать по результатам градуировки. Она не превышает 3 % от верхнего предела шкалы, равного 4.4 s^{-1} .

2. Математическая модель колебаний цилиндра со стабилизатором в воздушном потоке

Принимается, что тяги подвески нерастяжимы и не передают крутильный момент. Аэродинамическими силами, действующими на тяги подвески, пренебрегается. Подвеска с цилиндром представляет собой двухзвеный маятник, способный колебаться с пятью степенями свободы. Однако в эксперименте наблюдалось движение цилиндра только с тремя степенями свободы, поэтому математическая модель рассматривает только такое движение. Предположим, что точка подвеса движется с постоянной скоростью, и пусть эта точка является началом связанной системы координат. Оси ортогональной системы координат x , y и z параллельны главным осям инерции цилиндра со стабилизатором. Оси нанесены на

рис. 1. Продольная ось x направлена параллельно оси цилиндра от кормовой части к носовой. Нормальная ось y расположена в плоскости симметрии цилиндра со стабилизатором, направлена вдоль оси подвески вверх. Поперечная ось z составляет правую тройку вместе с осями x и y . Положение цилиндра описывается тремя углами γ , ϑ и ψ . Обозначения углов совпадают с обозначениями использующихся в динамике полета углов крена, тангажа и рыскания [16]. Последовательные повороты на эти углы переводят оси нормальной системы координат x_g , y_g и z_g в оси связанной системы координат. Начало нормальной подвижной системы координат также находится в точке подвеса. Ось x_g направлена горизонтально вдоль вектора скорости движения точки подвеса относительно среды, ось y_g направлена вверх, и z_g составляет с первыми двумя осями правую ортогональную систему координат. Первый поворот на угол γ вокруг оси x_g переводит оси y_g и z_g в оси y'_g и z'_g . Второй поворот на угол ϑ производится вокруг оси z'_g . Он переводит ось y'_g в ось y . Третий поворот вокруг оси y на угол ψ завершает перевод нормальной системы координат в связанную. Малые углы γ , ϑ и ψ совпадают с углами крена, тангажа и рыскания, определенными в [16].

Аэродинамические силы будем задавать в скоростной системе координат x_a , y_a , z_a , которая переводится в связанную двумя последовательными поворотами на углы α и β . Обозначения углов совпадают с обозначениями углов атаки и скольжения, установленными стандартом [16], однако порядок поворотов изменён. При малых углах указанные углы совпадают с углами атаки и скольжения. В скоростной системе координат ось x_a направлена вдоль вектора скорости центра цилиндра относительно среды, ось y_a лежит в плоскости симметрии цилиндра со стабилизатором и направлена в сторону верхней части цилиндра, ось z_a составляет с первыми двумя правую тройку осей.

Первый поворот на угол α осуществляется вокруг оси z_a . Он переводит ось y_a в ось y . Второй поворот вокруг оси y на угол β завершает переход от скоростной к связанной системе координат.

Уравнения движения цилиндра в проекциях на оси связанной вращающейся системы координат имеют вид [17]:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z &= L_x, \\ J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x &= L_y, \\ J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y &= L_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где ω_x , ω_y , ω_z — проекции угловой скорости на оси x , y , z ; J_x , J_y , J_z — элементы тензора инерции, имеющего диагональный вид; L_x , L_y , L_z — проекции момента сил, действующего на цилиндр относительно точки подвеса. Следующее упрощающее положение состоит в пренебрежении моментом инерции цилиндра относительно собственного центра масс по сравнению с моментом инерции относительно точки подвеса: $J_x \approx J_z \gg J_y$.

Проекции угловой скорости выражаются через углы крена, тангажа и рыскания:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\gamma} \cos \psi \cos \vartheta, \\ \omega_y &= \dot{\psi} - \dot{\gamma} \sin \vartheta, \\ \omega_z &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\gamma} \sin \psi \cos \vartheta.\end{aligned}\quad (2)$$

После подстановки проекций угловой скорости и их производных в систему уравнений (1) система будет иметь вид

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} &= -\dot{\gamma}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + (\cos \psi L_z - \sin \psi L_x)/J_z, \\ \ddot{\gamma} &= 2\dot{\gamma}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + (\sin \psi L_z + \cos \psi L_x)/J_z, \\ \ddot{\psi} &= \dot{\gamma} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + L_y/J_x.\end{aligned}\quad (3)$$

Проекции момента сил L_x , L_y , L_z на оси связанный системы координат выражаются формулами

$$L_x = -F_z l, \quad L_y = L'_y, \quad L_z = -F_x l,$$

где F_x — проекция действующей на цилиндр силы на продольную ось, взятая с обратным знаком; F_z — проекция силы на поперечную ось связанный системы координат. F_x и F_z являются суммами проекций силы тяжести и аэродинамической силы. L'_y — проекция момента сил относительно центра масс цилиндра на ось y .

Чтобы получить уравнения движения в проекциях на оси связанный системы координат, необходимо преобразовать проекции аэродинамической силы из проекций на оси скоростной системы координат. Проекции силы тяжести из нормальной системы координат нужно перевести в проекции связанный системы координат. Проекции аэродинамической силы на оси скоростной системы координат X_a , Y_a и Z_a выражаются через аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления c_{xa} , подъемной силы c_{ya} и боковой силы c_{za} :

$$X_a = c_{xa}qs, \quad Y_a = c_{ya}qs, \quad Z_a = c_{za}qs,$$

где s — площадь поперечного сечения цилиндра; $q = \rho u^2/2$ — скоростной напор; ρ — плотность воздуха; u — скорость центра цилиндра относительно среды. Проекция на скоростную ось, называемая лобовым сопротивлением, также берется с обратным знаком [16].

Вектор проекций аэродинамической силы в связанный системе координат X , Y и Z находится перемножением матрицы преобразования на вектор, элементы которого являются проекциями аэродинамической силы в скоростной системе координат:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{pmatrix}.$$

Вектор проекций силы в связанный системе координат равен сумме вектора аэродинамических сил и вектора проекций силы тяжести: $F_x = X + P_x$, $F_y = Y + P_y$,

$F_z = Z + P_z$. Вектор проекций силы тяжести имеет в нормальной системе координат только одну проекцию, не равную нулю:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \\ & + \sin \psi \sin \gamma & \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma - \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & \cos \vartheta \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma - & \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \\ & - \cos \psi \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где m — масса цилиндра; g — ускорение силы тяжести. Перед P_x имеется минус, потому что проекция силы тяжести на продольную ось берется с обратным знаком.

Вводится обозначение, которое сократит размер формул: $\varepsilon = \psi - \beta$. Уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{\vartheta} &= -\dot{\gamma}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + qsl \left(\cos \varepsilon (c_{xa} \cos \alpha + c_{ya} \sin \alpha) \right. \\ &\quad \left. + c_{za} \sin \varepsilon \right) / J_z mg l \sin \vartheta \cos \gamma / J_z, \\ \ddot{\gamma} \cos \vartheta &= 2\dot{\gamma}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + qsl \left(\sin \varepsilon (c_{xa} \cos \alpha + c_{ya} \sin \alpha) \right. \\ &\quad \left. - c_{za} \cos \varepsilon \right) / J_z mg l \sin \gamma / J_z, \\ \ddot{\psi} &= \dot{\gamma} \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + qsL \left(m_y + L\dot{\beta}m_y^\beta/v \right),\end{aligned}\quad (4)$$

где m_y и m_y^β — коэффициент момента рыскания и вращательная производная момента рыскания. Для вращательной производной для цилиндра ранее было предложено выражение [1]:

$$m_y^\beta = \mu(1 - \delta\beta^2).$$

Выражение (5) содержит два параметра, которые определяют амплитуду вращательных колебаний по углу рыскания и скорость ее изменения. Такое представление вращательной производной позволяет объяснить автоколебания цилиндра, упруго закрепленного в потоке газа. Более простое представление $\mu = \text{const}$ описывает затухание колебаний, если $\mu < 0$, либо неограниченное возрастание амплитуды колебаний, если $\mu > 0$. Наличие члена второго порядка в формуле (5) ведет к установлению колебаний с постоянной амплитудой, определяемой параметром δ . Величину параметра δ можно оценить по амплитуде колебаний по углу рыскания в режиме, в котором отсутствуют другие виды колебаний. Эксперименты по исследованию режима колебаний по

углу рыскания проводились в работе [18]. Проволочная подвеска в этих экспериментах позволяла цилиндру с удлинением $L/D = 2$ колебаться только с одной степенью свободы. Стабилизатор у цилиндра отсутствовал. Сила, возвращающая цилиндр в положение равновесия, создавалась стальными пружинами. Получено, что в случае прохождения оси вращения через центр цилиндра параметр $\delta = 68$. Наличие стабилизатора изменяет этот параметр. Кроме того, частота колебаний цилиндра на пружинной подвеске намного превышала частоту колебаний подвешенного цилиндра.

В статье [8] получены выражения, связывающие углы $\varepsilon, \alpha, \vartheta, \gamma$:

$$\tan \varepsilon = \frac{\dot{\vartheta}l \cos \vartheta}{\dot{\vartheta}l + \cos \vartheta v}, \quad \tan \alpha = \frac{\cos \varepsilon \sin \vartheta v}{\dot{\vartheta}l + v \cos \vartheta}. \quad (6)$$

В статье [8] получена связь между скоростью точки подвеса v и относительной скоростью центра масс цилиндра и среды u при условии малости величин $l\dot{\vartheta}/v \ll 1$ и $l\dot{\gamma}/v \ll 1$:

$$u^2 \approx v^2 (1 + 2 \cos \vartheta l \dot{\vartheta}/v). \quad (7)$$

На следующем этапе уравнения движения преобразуются в предположении малости углов ϑ, ψ, γ и их производных. Выражения (6) упрощаются:

$$\varepsilon = \frac{\dot{\vartheta}l}{v}, \quad \alpha = \dot{\vartheta}. \quad (8)$$

В уравнениях движения останутся только углы в первой степени. Останется также член с $\delta\beta^2$, имеющий порядок единицы. Угол ψ из уравнений исключается.

Следующие рассуждения позволяют оценить влияние движения стабилизатора, жестко закрепленного в кормовой части цилиндра и включить в уравнения члены, содержащие производную по времени угла рыскания ψ . Вращение стабилизатора в предположении малости угла ψ ведет к тому, что угол скольжения стабилизатора изменяется на малую добавочную величину. Его скорость в поперечном направлении отличается от скорости центра цилиндра на величину $\dot{\psi}(L/2)$. Отношение дополнительной поперечной скорости к скорости потока равно разнице углов скольжения в центре стабилизатора и в центре цилиндра. Эту разницу в углах можно выразить через производные углов β и γ , если использовать первую формулу (8):

$$\Delta\psi = \dot{\psi}(L/2)/v = \dot{\beta}(L/2)/v + \dot{\gamma}lL/(2v^2). \quad (9)$$

В последнем выражении вместо $\dot{\gamma}$ подставляется формула, полученная из второго уравнения (4), в которой пренебрегается аэродинамической силой, малой по сравнению с силой тяжести, и слагаемым в правой части, содержащим произведение двух малых производных углов крена и тангажа. Предположение о малости аэродинамической силы по сравнению с силой тяжести подтверждается тем, колебания по углу крена близки к

гармоническим. Синус малого угла крена заменяется углом, а косинус угла тангажа заменяется единицей. Предполагается, что коэффициенты боковой силы c_s и момента рыскания стабилизатора m_s линейно зависят от $\Delta\psi$:

$$c_s = -c_{zs}\Delta\psi, \quad Z_s = c_s q s, \quad m_s = -m_{ys}\Delta\psi, \quad M_{ys} = m_s q s L,$$

где Z_s и M_{ys} — боковая сила и момент рыскания, действующие на стабилизатор.

Таким образом, уравнения движения (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= rv^2 \left(-c_{xa} + c_{za}\dot{\gamma}\frac{l}{v} - 2c_{xa}\dot{\vartheta}\frac{l}{v} \right) - \omega^2\vartheta, \\ \ddot{\gamma} &= rv^2 \left(-c_{xa}\dot{\gamma}\frac{l}{v} - c_{za} - c_{zs} \left(\dot{\beta}\frac{L}{2v} - \gamma\frac{lL\omega^2}{2v^2} \right) \right) - \omega^2\gamma, \\ \ddot{\beta} &= r_1 v^2 \left(m_y - \left(\dot{\beta}\frac{L}{2v} - \gamma\frac{lL\omega^2}{2v^2} \right) + \mu\frac{L}{v}(1 - \delta\beta^2)\dot{\beta} \right) \\ &\quad + \gamma\frac{l}{v}\omega^2, \end{aligned}$$

где $r = \rho s/(2ml)$; $r_1 = \rho s L/(2J_y)$; $\omega^2 = g/l$.

Следующая система уравнений (10) представляет собой безразмерные уравнения движения. В них дифференцирование происходит по безразмерному времени $\tau = t\omega$, где t — реальное время.

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + \vartheta &= Rv \left(-\nu c_{xa} + \dot{\gamma}c_{za} - 2c_{xa}\dot{\vartheta} \right), \\ \ddot{\gamma} + \gamma &= Rv \left(-\nu c_{za} - c_{xa}\dot{\gamma} - c_{zs} \left(\dot{\beta} - \frac{\gamma}{v} \right) \frac{L}{2l} \right), \quad (10) \\ \ddot{\beta} - R_1 v^2 m_y &= R_1 v \left(-m_{ys} \left(\dot{\beta} - \frac{\gamma}{v} \right) \frac{L}{2l} + \mu \frac{L}{l} \dot{\beta} (1 - \delta\beta^2) \right) \\ &\quad + \frac{\dot{\gamma}}{v}. \end{aligned}$$

В безразмерных уравнениях движения (10) использованы обозначения: $R = \rho s l / (2m)$; $R_1 = \rho s L l^2 / (2J_y)$; $\nu = v / (l\omega) = v / \sqrt{gl}$. Уравнения движения в безразмерном виде позволяют выписать числа подобия явления: ν — безразмерная скорость воздушного потока; $\rho s l / m$ — величина, пропорциональная отношению плотности воздуха к средней плотности цилиндра; l/L — относительная длина подвески; $J_y / (ml^2)$ — число подобия, характеризующее распределение плотности цилиндра по его объему. Вместо безразмерной скорости потока можно использовать число Струхalia $Sh = \omega l / (2\pi\nu)$, которое обратно пропорционально безразмерной скорости ν , либо трактовать безразмерную скорость ν как число Фруда $Fr = v / \sqrt{gl}$. Список чисел подобия следует дополнить числом Рейнольдса, от которого могут зависеть аэродинамические коэффициенты, входящие в уравнения движения. Знание чисел подобия позволяет переносить результаты физического и математического

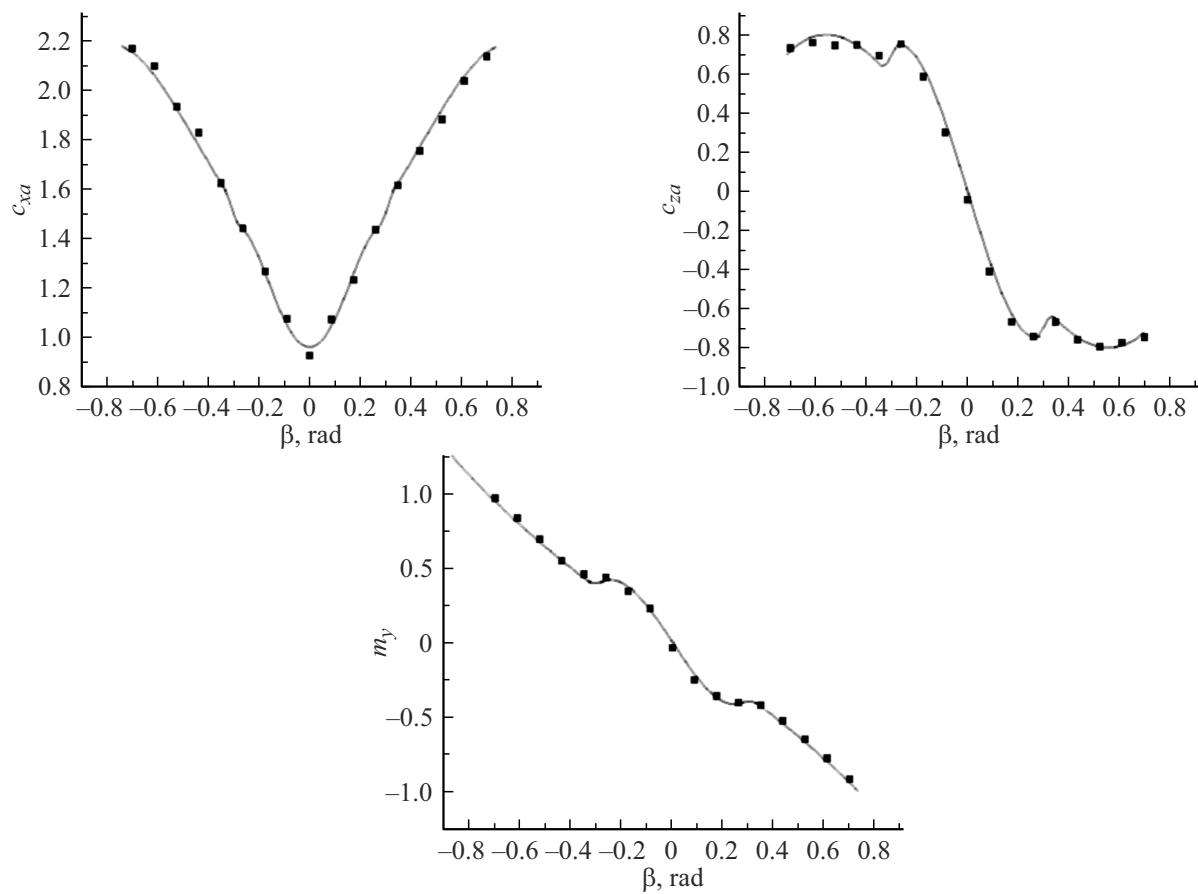


Рис. 2. Аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления, боковой силы и момента рыскания в зависимости от угла скольжения β .

моделирования на множество объектов, характеризующихся одинаковыми числами подобия.

Как следует из системы уравнений (10), колебания по углу тангажа в рамках модели не влияют на колебания по углу скольжения и по углу крена.

Уравнения движения цилиндра (10) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

3. Определение аэродинамических коэффициентов

Уравнения движения содержат аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления c_{xa} , боковой силы c_{za} , момента рыскания цилиндра со стабилизатором m_y и коэффициенты c_{zs} и m_{ys} . Эти коэффициенты зависят в общем случае от углов атаки α и скольжения β .

В модели колебаний, изложенной в статье [8], предполагалось, что коэффициент боковой силы и коэффициент момента рыскания линейно зависят от угла скольжения, а коэффициент лобового сопротивления в диапазоне углов, в котором происходят колебания, постоянен или связан с углом скольжения квадратичной зависимостью.

В настоящей работе учитывается, что зависимости c_{za} и m_y от угла β отличаются от линейных, а зависимость c_{xa} от β не квадратичная. В математической модели эти зависимости от угла скольжения, определенные экспериментально, аппроксимировались полиномами, разными в различных диапазонах углов скольжения. Диапазон углов атаки невелик, поэтому в настоящей работе зависимостью от угла атаки пренебрегается.

Аэродинамические коэффициенты поперечной силы и момента рыскания стабилизатора принимались линейно зависящими от угла рыскания. Экспериментально определение этих коэффициентов в присутствии цилиндра представляет собой трудную задачу. Поэтому значения c_{zs} и m_{ys} выбраны на основе данных, опубликованных в работе [19] для прямоугольной пластины с соотношением сторон, равным двум. На графиках, приведенных в [19], видно, что коэффициент подъемной силы пластины линейно зависит от угла атаки в диапазоне от -0.17 до 0.17 rad, тангенс угла наклона линейной зависимости равен 4. Мы принимали, что характерная площадь равна не площади стабилизатора, а площади поперечного сечения цилиндра, которая в два раза больше, поэтому $c_{zs} = 2$. Момент сил равен подъемной силе, умноженной на плечо $L/2$. С учетом того, что в

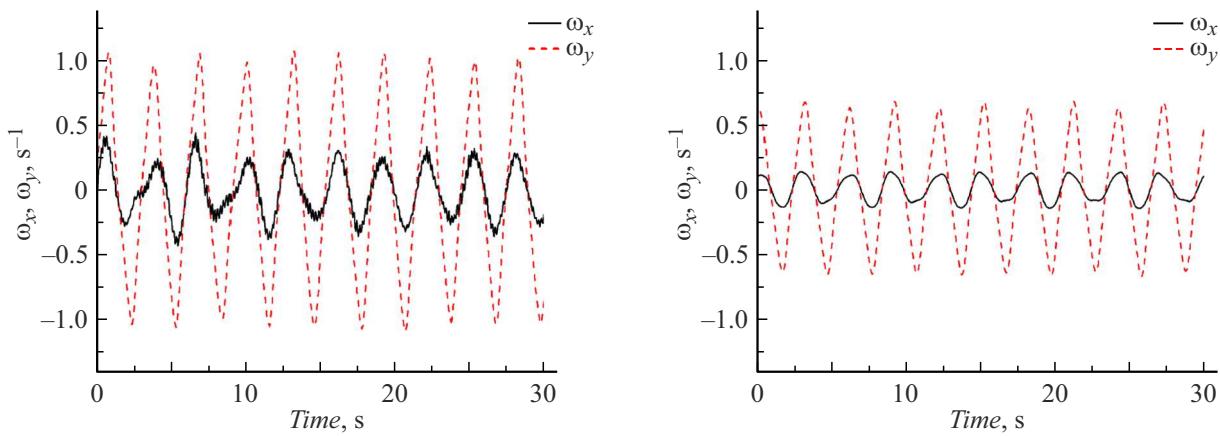


Рис. 3. Компоненты вращательной скорости в зависимости от времени. Режим приблизительно постоянной амплитуды колебаний ($v = 7.1 \text{ m/s}$, $\nu = 2.28$). Слева — эксперимент, справа — расчет.

качестве характерной длины берется длина цилиндра L , коэффициент $m_{ys} = 1.0$.

Аэродинамические коэффициенты c_{xa} , c_{za} и m_y измерялись трехкомпонентными весами с проволочной подвеской.

На рис. 2 представлены зависимости аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления, боковой силы и момента рыскания от угла скольжения. Точки на графиках представляют собой экспериментально полученные данные. Аэродинамические весы позволяют измерять аэродинамические коэффициенты с погрешностью, не превышающей 5 %. Сплошными линиями обозначены аппроксимационные зависимости. Весь диапазон углов скольжения разбит на 5 поддиапазонов, в каждом из которых методом наименьших квадратов проводилась аппроксимация полиномом невысокого порядка. На границах поддиапазонов совпадали значения коэффициентов и их производные по углу скольжения.

Если $|\beta| > 0.34$, зависимости аэродинамических коэффициентов от угла скольжения выражаются формулами:

$$c_{xa} = 1.303 + 2.93\beta^2 - 2.4\beta^4,$$

$$c_{za} = -2.148\beta + 2.3\beta^3,$$

$$m_y = -1.189\beta - 0.33\beta^3.$$

В диапазоне $|\beta| < 0.27$:

$$c_{xa} = 0.962 + 12.1\beta^2 - 75\beta^4,$$

$$c_{za} = -4.187\beta + 19.5\beta^3,$$

$$m_y = -2.553\beta + 14.2\beta^3.$$

В диапазоне $0.27 < \beta < 0.34$:

$$c_{xa} = 15.861 - 145\beta + 478\beta^2 - 514\beta^3,$$

$$c_{za} = 22.47 - 236\beta + 792\beta^2 - 877\beta^3,$$

$$m_y = 1.396 - 21.73\beta + 84.6\beta^2 - 107\beta^3.$$

В диапазоне $-0.34 < \beta < -0.27$:

$$c_{xa} = 15.861 - 145\beta - 478\beta^2 + 514\beta^3,$$

$$c_{za} = -22.47 - 236\beta - 792\beta^2 - 877\beta^3,$$

$$m_y = -1.396 - 21.73\beta - 84.6\beta^2 - 107\beta^3.$$

Не удалось поставить эксперимент для определения коэффициента μ . От величины этого коэффициента зависит время, требуемое для установления колебаний с постоянной амплитудой. Было принято, что $\mu = 2$. Параметр δ в уравнениях движения выбирался из условия, чтобы скорость потока, при котором происходит переход от колебаний с постоянной амплитудой к режиму биений соответствовала экспериментальному значению. Было получено, что $\delta = 88$. Набор параметров уравнений движения не является единственным возможным. При другом значении параметра μ параметр δ примет другое значение.

4. Результаты экспериментов и сравнение их с предсказаниями математической модели

В результате эксперимента выяснилось, что при малых скоростях воздушного потока возникают угловые колебания цилиндра по углу рыскания, частота которых определяется возвращающим в положение равновесия моментом рыскания и моментом инерции цилиндра. Частота вращательных колебаний растет с возрастанием скорости набегающего потока. При приближении частоты к частоте колебаний цилиндра на подвеске как физического маятника возникают колебания по углу крена. Амплитуда колебаний по углу крена при конкретной скорости набегающего потока быстро устанавливается постоянной. Зависимость двух компонент угловой скорости от времени представлена на рис. 3.

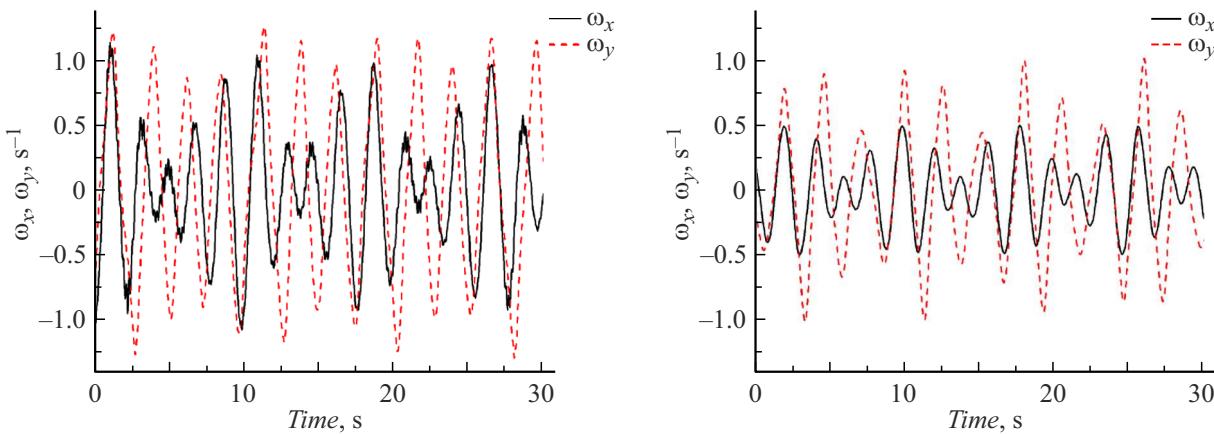


Рис. 4. Компоненты угловой скорости в зависимости от времени. Режим биений ($v = 8.1 \text{ m/s}$, $\nu = 2.6$). Слева — эксперимент, справа — расчет.

При дальнейшем увеличении безразмерной скорости набегающего потока до 2.3 наблюдаются биения. Рис. 4 показывает зависимость двух компонент угловой скорости от времени в этом режиме колебаний.

Эксперименты с дальнейшим увеличением скорости потока пришлось прекратить, поскольку цилиндр при движении начал выходить за пределы однородного ядра потока в рабочей части. Математическая модель при повышении скорости предсказывала продолжение режима биений. Но при этом предположения, выдвигавшиеся при выводе уравнений движения, о том, что движение описывается колебаниями с малыми углами отклонения от положения равновесия, не верны.

Сценарий развития колебаний, полученный при физическом и математическом моделировании одинаков. Но количественное различие результатов эксперимента и расчета присутствует. Его можно объяснить неполнотой математической модели, многочисленными предположениями о величине углов, описывающих отклонения от положения равновесия. Но основные черты явления математическая модель при своей простоте предсказывает.

Заключение

В работе применен экспериментальный метод исследования колебаний цилиндра со стабилизатором, подвешенного в воздушном потоке, который основан на измерении ускорений и угловой скорости акселерометром. Акселерометр работает вместе с контроллером Arduino. При увеличении скорости потока возникают угловые колебания вокруг вертикальной оси. Увеличение скорости ведет к появлению интенсивных поперечных колебаний с постоянной амплитудой. Дальнейший рост скорости приводит к колебаниям с биениями. Модифицированная предложенная ранее простая математическая модель. Модифицированная модель правильно описывает изменение режимов колебаний при изменении скорости

воздушного потока. Математическая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде. Найдены числа подобия явления.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 128783603).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.Н. Рябинин, Б.Ф. Тюрин. Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1, **1**, 87 (1993).
- [2] С.В. Сипаров. Изв. вузов. Авиационная техника, **1**, 84 (1991).
- [3] А.Н. Володко, А.Я. Серов, Изв. АН СССР. МТТ, **1**, 12 (1988). [A.N. Volodko, A.Ya. Serov, Mechanics Solids, **1** 10 (1988).]
- [4] А.Н. Свириденко. Научный вестник МГУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность, **111**, 129 (2007).
- [5] В.Б. Козловский, С.А. Паршенцев, В.В. Ефимов. *Вертолет с грузом на внешней подвеске* (Машиностроение, Машиностроение-Полет, М., 2008)
- [6] В.В. Ефимов. Научный вестник МГУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность, **111**, 121 (2007).
- [7] В.В. Ефимов, К.О. Чернигин, Ю.А. Быков. Научный вестник МГУ ГА, **172**, 67 (2011).
- [8] А.Н. Рябинин. Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1, **2**, 71 (1997).
- [9] O. Ivanov, V. Vedeneev. J. Fluids and Structures, **107**, 103393 (2021). DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2021.103393
- [10] O. Ivanov, V. Vedeneev. Proceed. ASME. 2021 Pressure Vessels and Piping Conference, PVP 2021 V003T04A020. (2021). DOI: 10.1115/PVP2021-62812

- [11] M. Demenkov. AIP Conference Proceedings, **1959**, 050008 (2018) DOI: /10.1063/1.5034636
- [12] М.Н. Деменков. В сб.: XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСЛУ-2019, под ред. Д.А. Новикова (ИПУ РАН, М., 2019), с. 176.
DOI: 10.25728/vspu.2019.0176
- [13] D. Škrlec, V. Šimović, A. Pender. 2022 *45th Jubilee International Convention on Information, Communication and Electronic Technology (MIPRO)* (Opatija, Croatia, 2022), p. 1522. DOI: 10.23919/MIPRO55190.2022.9803322
- [14] J.E. Rico, K. Turkoglu. AIAA, **2016-0946** (2016).
DOI: 10.2514/6.2016-0946
- [15] М.А. Ковалев. Уч. записки Ленингр. ун-та, **7**, 61 (1939).
- [16] ГОСТ 20058-80 *Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения* (Госкомитет СССР по стандартам, М., 1981)
- [17] Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков *Теоретическая механика: учебник для академического бакалавриата* (Изд-во Юрайт, М., 2016). 3-е изд.
- [18] А.Н. Рябинин, Н.А. Киселев. Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия, **3** (61), 315 (2016).
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.216
- [19] G.K. Ananda, P.P. Sukumar, M.S. Selig. Aerospace Sc. Technol., **42**, 392 (2015).
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2014.11.016>