

02

Фононный механизм поперечного отклика $p_x + ip_y$ сверхпроводника на электромагнитное излучение терагерцового диапазона

© М.В. Боев, Мехрдад М. Махмудиан

Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН,
Новосибирск, Россия

E-mail: boevm@isp.nsc.ru

Поступила в Редакцию 13 ноября 2025 г.

В окончательной редакции 27 ноября 2025 г.

Принята к публикации 3 декабря 2025 г.

На основе методов неравновесной диаграммной техники построена теория аномального эффекта Холла в сверхпроводнике с $p_x + ip_y$ типом спаривания. Показано, что при частотах электромагнитного излучения, близких к удвоенной частоте акустического фонона с импульсом, равным импульсу Ферми, зависимость холловской проводимости от частоты приобретает резкий и немонотонный характер. При данных частотах величина фононной поправки к холловской проводимости пропорциональна квадрату энергетической щели сверхпроводника, что определяет температурную зависимость эффекта.

Ключевые слова: аномальный эффект Холла, хиральный сверхпроводник, терагерцовое излучение.

DOI: 10.61011/FTT.2025.12.62411.8780-25

1. Введение

В настоящее время большое внимание исследователей привлекают необычные хиральные сверхпроводники, в которых симметрия относительно операции обращения времени оказывается нарушенной. Среди большого числа сверхпроводящих материалов, проявляющих хиральные свойства [1–4], особое место занимает рутенат стронция Sr_2RuO_4 . История исследований сверхпроводящих свойств данного материала началась с работы [5], в которой было объявлено об экспериментальном обнаружении сверхпроводимости в Sr_2RuO_4 , и длится уже более 30 лет. Интерес исследователей к данному сверхпроводнику обусловлен рядом его необычных свойств [6]. В частности, вопрос о хиральности рутената стронция исследуется разнообразными экспериментальными методами. Например, в 2006 году в рутенате стронция в сверхпроводящем состоянии экспериментально наблюдался полярный эффект Керра [7], что подтвердило факт нарушения симметрии системы относительно обращения времени в этом соединении. Однако природа АЭХ и полярного эффекта Керра в Sr_2RuO_4 до сих пор не до конца исследована.

Долгое время считалось, что Sr_2RuO_4 относится к сверхпроводникам с триплетным типом спаривания электронов, при этом $p_x + ip_y$ симметрия у орбитальной компоненты волновой функции куперовской пары полагалась наиболее вероятной. Однако накопленный к настоящему времени массив экспериментальных данных оставляет вопрос о симметрии параметра порядка в Sr_2RuO_4 в ранге дискуссионных [8]. В данной работе мы представляем теорию фононного механизма АЭХ в хиральном сверхпроводнике, построенную на основе простейшей модели, в которой спиновая компонента

волновой функции куперовских пар образует триплет, а параметр порядка является нечетной функцией импульса следующего вида: $\Delta(\mathbf{p}) = \Delta(p_x + ip_y)/p_F = \Delta e^{i\varphi_p}$, где Δ — модуль параметра порядка, p_F — импульс Ферми, $\varphi_p = \arctan(p_y/p_x)$. При этом в численных оценках мы будем ориентироваться на параметры рутената стронция. Несмотря на значительное число теоретических работ в области аномального эффекта Холла в Sr_2RuO_4 , большинство из них опирается на анализ роли анизотропного рассеяния электронов на примесях (skew-рассеяние) [9–12]. В этой связи исследование роли колебательных степеней свободы кристаллической решетки является актуальным и представляющим большой интерес.

Прежде, чем перейти к краткому изложению разработанной теории (детали вычислений помещены нами в Приложение к статье), имеет смысл привести иерархию характерных энергий системы и обсудить условия, при которых проявление фононного механизма поперечного отклика должно быть наиболее сильным. Для построения качественной картины рассмотрим рассеяние двух электронов путем обмена виртуальным фононом. В этой ситуации эффективное взаимодействие принимает вид:

$$V_{Fr} = \frac{g_1^2 \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}}{(\omega + i0)^2 - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}}^2, \quad (1)$$

где g_1 — константа электрон-фононного взаимодействия, $\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}$ — энергия фонона, \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы квазичастиц сверхпроводника после и до взаимодействия с фононной подсистемой, ω — энергетическая переменная, характеризующая изменение энергии квазичастицы при испускании/поглощении фонона (далее для краткости мы называем энергетическую переменную частотой и полагаем $\hbar = k_B = 1$). Энергия элемен-

тарных возбуждений сверхпроводника имеет порядок $\varepsilon_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2} \sim \max(\Delta, T) \ll \varepsilon_F$, где $\xi_p = p^2/2m - \varepsilon_F$. Таким образом, в условиях низкой температуры с точностью до членов $\sim \xi_p/\varepsilon_F \ll 1$ энергию фонона можно принять равной $\omega_{p-p'} \approx \sqrt{2}c p_F \sqrt{1 - \cos(\varphi_p - \varphi_{p'})}$, что позволяет произвести усреднение взаимодействия (1) по угловой переменной:

$$\frac{\langle V_{Fr} \rangle_{\varphi-\varphi'}}{g_1^2} = -1 + \frac{|\omega| \Theta[\omega^2 - 2\omega_{ph}^2]}{\sqrt{\omega^2 - 2\omega_{ph}^2}} - i \frac{\omega \Theta[2\omega_{ph}^2 - \omega^2]}{\sqrt{2\omega_{ph}^2 - \omega^2}}, \quad (2)$$

где $\omega_{ph} = \sqrt{2}c p_F$, c — скорость звука и Θ — функция Хевисайда. Если система не помещена в осциллирующее электромагнитное поле, частота ω имеет порядок энергии квазичастиц $\omega \sim \max(T, \Delta) \ll \omega_{ph}$, и взаимодействие (2) не обладает дисперсией. При облучении системы электромагнитной волной с частотой Ω квазичастицы получают возможность обмена большей энергией. Это связано с тем, что после поглощения (испускания) фотона одной из квазичастиц ее частота изменяется, $\omega_1 \rightarrow \omega_1 \pm \Omega$, в то время как у второй квазичастицы частота остается порядка $\sim \max(T, \Delta)$. В случае $\Omega \gg \max(T, \Delta)$ квазичастицы при рассеянии обмениваются энергией $\omega \approx \Omega$, из чего следует резкое усиление взаимодействия квазичастиц (2) при частотах излучения, близких к $\Omega \approx \sqrt{2}\omega_{ph}$. На практике это условие соответствует терагерцовому диапазону электромагнитных волн и энергии фотонов порядка нескольких meV .

Последний энергетический параметр задачи, $\delta = 1/(2\tau)$, задает уширение спектральной плотности квазичастиц, то есть определяет конечное время жизни квазичастиц в состояниях с определенной энергией, τ . В разработанной теории мы ограничиваемся рассмотрением ультрачистого предела, $\delta \rightarrow 0$, что обусловлено следующими обстоятельствами. Во-первых, сверхпроводники $p_x + ip_y$ -типа крайне чувствительны к количеству и силе примесных центров в системе, в частности, критическая температура перехода Sr_2RuO_4 в сверхпроводящее состояние, $T_c \approx 1.5 \text{ K}$, зафиксирована только в высококачественных образцах. Это означает квазибаллистический режим транспорта в подобных структурах, $\Delta\tau \gg 1$. Во-вторых, как сказано выше, нас интересует отклик системы на электромагнитное поле, осциллирующее с частотой из терагерцового диапазона. В этом случае $\Omega\tau \gg 1$ и роль примесного уширения спектральной плотности квазичастиц пренебрежимо мала. На языке диаграммной техники это связано с отсутствием сингулярных вкладов, обусловленных квадратом функций Грина $G_p^2(\omega)$, так как в отличие от отклика на стационарное поле в исследуемой задаче полюсы в произведениях функций Грина, $G_p(\omega)G_p(\omega - \Omega)$, разнесены на большую величину $\Omega \gg 1/\tau$. Таким образом, иерархия энергий в изучаемой системе сводится к отношениям: $\varepsilon_F \gg (\omega_{ph}, \Omega) \gg (\Delta, T) \gg \delta \rightarrow 0$.

В настоящей работе мы вычисляем недиагональную компоненту проводимости сверхпроводника с помощью

методов диаграммной техники Келдыша, в которой основным инструментом выступает одночастичная функция Грина:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -i \langle \check{T}_c \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \otimes \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t') \rangle, \quad (3)$$

где символ \check{T}_c означает оператор T -упорядочения на контуре Келдыша [13], а \otimes — прямое произведение полевых операторов электронной подсистемы в представлении Намбу, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) &= (\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}, t))^T, \\ \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) &= (\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}, t)). \end{aligned} \quad (4)$$

В данной работе нас интересует недиагональная компонента тензора проводимости:

$$\sigma_{xy}(\Omega) = \frac{Q_{xy}(\Omega)}{-i\Omega}, \quad (5)$$

где Ω — частота внешнего поля, а Q_{xy} — ядро электромагнитного отклика сверхпроводника на векторный потенциал электромагнитной волны $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 e^{i\Omega t}$. Таким образом, задача сводится к определению Q_{xy} посредством сравнения выражения $j_i(\Omega) = Q_{ij}(\Omega)A_j(\Omega)$ с соответствующим выражением для плотности электрического тока, полученного в рамках диаграммной техники:

$$\mathbf{j}(\Omega) = -i \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{j}}_p \hat{G}_p^<(\omega, \Omega) \right\}. \quad (6)$$

В выражении (6) след берется в пространстве Намбу и включает в себя интегрирование по частоте ω и импульсу \mathbf{p} , а Фурье-образ плотности электрического тока имеет вид:

$$\hat{\mathbf{j}}_p = \frac{e\mathbf{p}}{2\pi\nu} \hat{\tau}_0 \quad (7)$$

где $e = -|e|$ — заряд электрона, ν — плотность состояний на уровне Ферми, $\hat{\tau}_0$ — единичная матрица. Записывая далее корреляционную функцию $\hat{G}^<$ в первом порядке теории возмущений по оператору взаимодействия сверхпроводника с электромагнитным полем,

$$\hat{\mathcal{H}}_A = - \int d\mathbf{r} dt \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{v}}_p e \mathbf{A}(t) \tau_0 \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (8)$$

получаем известную формулу Кубо для холловской компоненты тензора проводимости (рис. 1):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(\Omega) &= -\frac{1}{\Omega} \text{Tr} \left\{ \hat{j}_{p,x} \hat{G}_p^R(\omega) \hat{j}_{p,y} \hat{G}_p^<(\omega - \Omega) \right. \\ &\quad \left. + \hat{j}_{p,x} \hat{G}_p^<(\omega) \hat{j}_{p,y} \hat{G}_p^A(\omega - \Omega) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где \hat{G}^R — запаздывающая функция Грина квазичастиц сверхпроводника,

$$\hat{G}_p^R(\omega) = \frac{\hat{\tau}_0 \omega + \hat{\tau}_z \xi_p + \hat{\Delta}(\mathbf{p})}{(\omega + i\delta)^2 - \xi_p^2}, \quad (10)$$

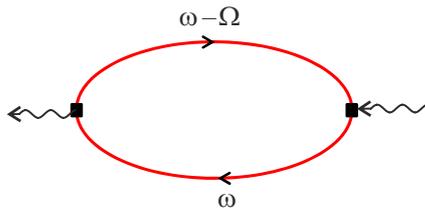


Рис. 1. Диаграммное представление тензора проводимости σ_{xy} (9). Красные сплошные линии обозначают голые функции Грина, а черные квадраты — токовые вершины.

$$\hat{\Delta}(\mathbf{p}) = \Delta \left(\hat{\tau}_x \frac{p_x}{p_F} - \xi \hat{\tau}_y \frac{p_y}{p_F} \right) = \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{\xi i \varphi} \\ e^{-\xi i \varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$\hat{\tau}_{x,y,z}$ — матрицы Паули, $\varphi = \arg(p_x + ip_y)$. Опережающая \hat{G}^A и запаздывающая \hat{G}^R функции Грина связаны операцией эрмитова сопряжения, $\hat{G}^A = \hat{G}^{R\dagger}$, а корреляционная функция $\hat{G}^<$ обеспечивает заполнение состояний в соответствии с распределением Ферми-Дирака $n(\omega) = 1/(e^{\omega/T} + 1)$:

$$\hat{G}_p^<(\omega) = n(\omega)(\hat{G}_p^{R\dagger}(\omega) - \hat{G}_p^R(\omega)). \quad (12)$$

Параметр $\xi = \pm 1$ в (11) определяет хиральность сверхпроводника, причем холловская проводимость является нечетной функцией данного параметра, $\sigma_{xy}(-\xi) = -\sigma_{xy}(\xi)$. Далее мы полагаем $\xi = 1$.

Как было показано ранее [9], в рамках однозонной модели выражение (9) дает нулевой вклад в холловскую проводимость $p_x + ip_y$ сверхпроводника. Это обусловлено тем, что одного лишь нарушения симметрии к обращению времени недостаточно для возникновения поперечного электрического тока. В отличие от классического эффекта Холла, в котором на движущиеся заряды действует реальная сила Лоренца, сама по себе хиральность сверхпроводника не может в однородной изотропной системе создать силу, поперечную вектору напряженности электрического поля. В кристаллах однородность пространства нарушена, что в ряде материалов обеспечивает нетривиальный закон дисперсии квазичастиц и тем самым обуславливает поперечную компоненту тока. В случае сверхпроводника $p_x + ip_y$ -типа определяющую роль играет нарушение точечной трансляционной симметрии кристалла, то есть наличие примесных центров и дефектов решетки. Поэтому в основе подавляющего большинства теоретических работ, посвященных аномальному эффекту Холла в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике, лежит изучение процессов примесного рассеяния квазичастиц сверхпроводника.

Идея настоящей работы заключается в том, что кристаллическая решетка является динамической системой и колебательные степени свободы кристалла является еще одним источником трения наряду с замороженным примесным беспорядком. Оператор взаимодействия

электронной и фононной подсистем имеет вид:

$$\hat{V}_1 = g_1 \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\tau}_z \hat{\phi}(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (13)$$

где g_1 — константа электрон-фононного взаимодействия. Оператор фононного поля, $\hat{\phi}$, выражается через операторы рождения \hat{b}^+ и уничтожения \hat{b} фононов следующим образом:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2}} \left(i\hat{b}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{q}}t} - i\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{q}}t} \right). \quad (14)$$

Аномальный эффект Холла появляется в третьем порядке теории возмущений и, следовательно, учета лишь взаимодействия (13) недостаточно для изучения поперечного отклика (любой порядок теории возмущений должен включать четное число полевых операторов фононов). Выражение (13) описывает взаимодействие электронов с продольными акустическими фононами в рамках модели деформационного потенциала. В основе данного подхода лежит разложение энергии электрона в деформированной кристаллической решетке по степеням тензора деформации. Продолжая это разложение до квадратичных членов, получаем выражение

$$\hat{V}_2 = g_2 \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\tau}_z \hat{\phi}^2(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (15)$$

которое описывает процессы одновременного испускания и/или поглощения двух фононов. Подчеркнем, что, во-первых, тензор деформации является тензором второго ранга и, таким образом, (15) справедливо не только для кристаллов, но и для изотропных сред, а во-вторых, взаимодействие (15) соответствует одной вершине и количество матриц $\hat{\tau}_z$ осталось таким же, как и в (13).

Ненулевые вклады в поперечный отклик в третьем порядке приведены на рис. 2. Соответствующие математические выражения мы перенесли в Приложение, но приводим здесь некоторые пояснения. Каждая диаграмма включает две вершины \hat{V}_1 и одну \hat{V}_2 , что в сумме дает четыре полевых оператора фононной подсистемы, и описывает двухфононный механизм поперечного отклика. Отметим, что на диаграммах 2, (a)–(f) токовая вершина одета как минимум одним фононом, то есть „верх“ и „низ“ соединены фононной линией. Такая топология диктуется требованием нечетности недиагональных компонент тензора проводимости относительно перестановки индексов: $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. Легко проверить, что любая диаграмма с голыми токовыми вершинами (рис. 3), является в этом отношении четной, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ и, таким образом, не дает вклада в холловскую проводимость $\sigma_H = (\sigma_{xy} - \sigma_{yx})/2$. Отметим, что все шесть диаграмм дают соизмеримый вклад в эффект и поэтому ни одной из них нельзя пренебречь.

Результат вычислений сводится к следующему выражению:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{\Omega} \nu g_1^2 g_2^2 \frac{\Delta^2}{\Omega^2} F(T, \Delta, \Omega, \omega_{ph}), \quad (16)$$

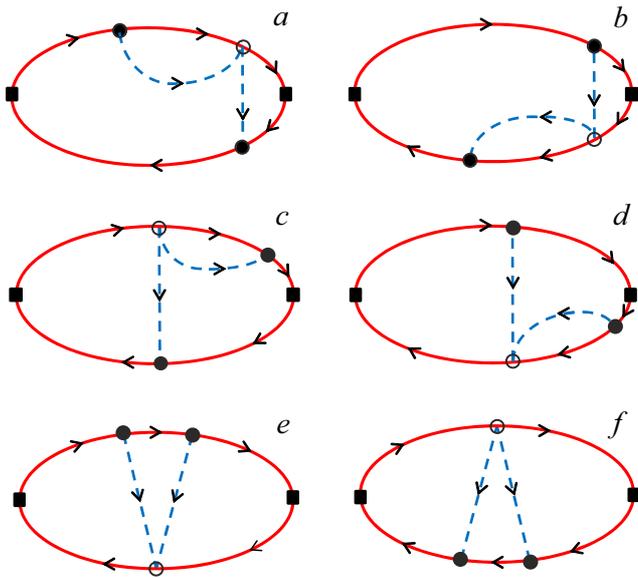


Рис. 2. Диаграммное представление поправки к тензору проводимости σ_{xy} от электрон-фононного взаимодействия. Красные сплошные линии обозначают голые функции Грина квазичастиц сверхпроводника, синие пунктирные — функции Грина фононов, жирные точки — однофононные вершины, черные кольца — двухфононные вершины, а черные квадраты — токовые вершины.

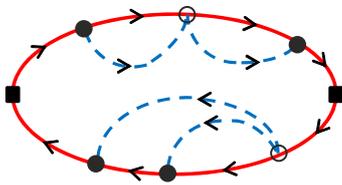


Рис. 3. Пример диаграммы, не дающей вклада в холловскую проводимость.

где v_F — скорость Ферми и $\sigma_\Omega = ve^2v_F^2/\Omega$ является друдевской проводимостью электронного газа в высокочастотном пределе. Безразмерная функция F определяется всем многообразием квантовых переходов, описываемых диаграммами рис. 2, и едва ли доступна для детальной физической интерпретации, однако, общие свойства данной функции в целом легко объяснимы на уровне качественных рассуждений, приведенных ниже.

Для построения частотной зависимости вещественной σ' и мнимой σ'' частей холловской проводимости, мы использовали следующие параметры. Характерная фононная частота полагалась равной $w_{ph} = 10$ meV, что, во-первых, удовлетворяет условию $w_{ph} \ll \varepsilon_F = 140$ meV [6], и, во-вторых, данное значение лежит на линейном участке ветви акустических колебаний [14]. При $p_F = 7.5$ nm⁻¹ получаем скорость звука $c \approx 3 \cdot 10^3$ m/s, что согласуется с данными ультразвуковых исследований Sr₂RuO₄ [15]. Далее, для проведения

численных расчетов необходимо задать явный вид зависимости параметра порядка от температуры. В данной работе мы использовали эмпирическую формулу,

$$\Delta(T) = \Delta_0 \sqrt{\cos\left(\frac{\pi T^2}{2T_c^2}\right)}, \quad (17)$$

которая имеет хорошее согласие с зависимостью $\Delta(T)$ из теории БКШ. В ультратонком сверхпроводнике Sr₂RuO₄ полуширина щели и критическая температура имеют значения $\Delta_0 = 0.23$ meV и $T_c = 0.13$ meV, соответственно.

Результаты расчета представлены на рис. 4 и подтверждают качественные рассуждения, приведенные в начале статьи. При частоте излучения, близкой к $\sqrt{2}\omega_{ph} \approx 14-15$ meV, эффективное электрон-фононное взаимодействие максимально усилено и в спектрах наблюдается резкий пик в вещественной части проводимости (рис. 4 (a)) и скачкообразное изменение мнимой части (рис. 4, (b)). Интересно отметить, что при вдвое большей частоте, $\Omega \approx 2\sqrt{2}\omega_{ph}$, на графиках также проявляется усиление электрон-фононного взаимодействия, которое, однако, выглядит как замедление убывания проводимости с ростом частоты (пики оказываются размыты множителем $1/\Omega^3$). Качественно это объясняется тем, что у квазичастицы, поглотившей фотон, имеется возможность испустить два фонона с частотами, близкими к резонансной ω_{ph} . Как нетрудно видеть, основной вклад при данных частотах определяется диаграммами рис. 2, (e)–(f).

В силу относительной малости щели $\Delta \ll \Omega$ и существенно неупругого характера рассеяния квазичастиц информация о щели в спектре в этом диапазоне частот явно не прослеживается. Более того, функция F крайне слабо зависит от температуры, и кривая на рис. 4, (c) фактически повторяет выражение (17), возведенное в квадрат. Это означает, что при столь существенном различии температуры и частоты излучения равновесное распределение по состояниям квазичастиц сверхпроводника и фононов практически не имеет значения.

Сравним исследованный фононный механизм возникновения аномального эффекта Холла с примесным. В пределе больших частот оба вклада ведут себя подобным образом: мнимая часть проводимости убывает как $\sigma'' \sim 1/\Omega^3$, а вещественная $\sigma' \sim (1 + C \ln|\Omega|)/\Omega^4$, где $C \approx 2$. Однако, данные асимптотики для примесного механизма начинаются с энергий ~ 1 meV, в то время как для фононного с гораздо больших значений ~ 50 meV. Качественные различия оказываются еще более существенными. Во-первых, примесный механизм аномального эффекта Холла чувствителен к знаку примесного потенциала и при наличии в системе притягивающих и отталкивающих примесных центров эффект должен быть частично или полностью скомпенсирован. Фононный механизм в свою очередь пропорционален константам электрон-фононного взаимодействия, которые в идеале не меняются от образца к образцу и определяются

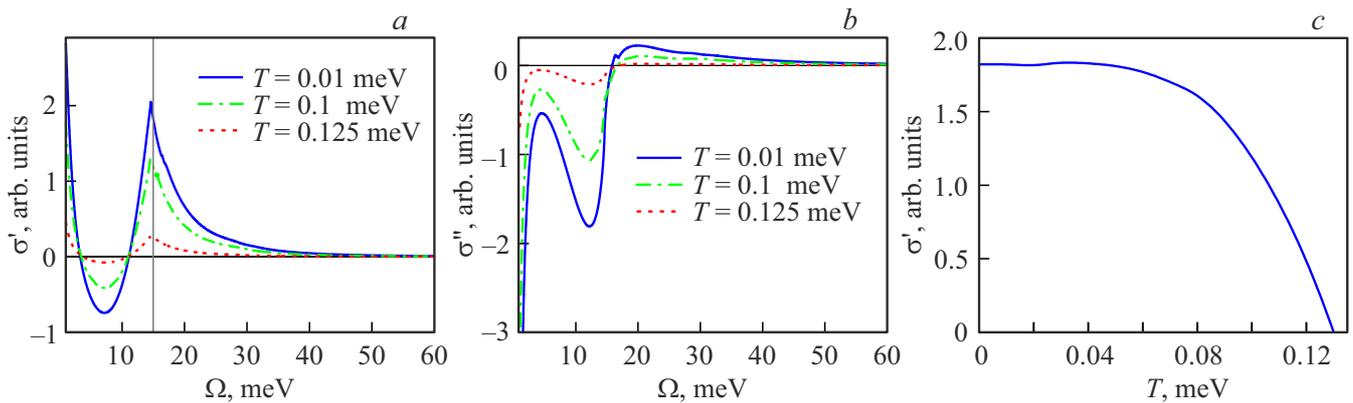


Рис. 4. Холловская проводимость $p_x + ip_y$ сверхпроводника. (a) и (b) — частотная зависимость вещественной и мнимой частей проводимости при различных температурах, соответственно. (c) — температурная зависимость вещественной части проводимости при частоте электромагнитной волны $\Omega = 15$ meV.

исключительно химическим составом сверхпроводника и его кристаллической структурой. Отметим, что мы не приводим сравнение низкочастотных асимптотик фононного и примесного механизмов, так как в рамках разработанной теории предел $\Omega \rightarrow 0$ означает выход за рамки применимости полученных выражений. Дело в том, что в низкочастотном пределе нельзя пренебрегать примесным рассеянием квазичастиц даже при квазибаллистическом режиме транспорта, и данная задача требует отдельного рассмотрения.

В заключение сделаем важное замечание об экспериментальном обнаружении поперечного отклика сверхпроводника в терагерцовом диапазоне электромагнитного излучения. Авторы работы [7] отмечают, что при переходе Sr_2RuO_4 в сверхпроводящее состояние в нулевом магнитном поле, сверхпроводник демонстрирует доменную структуру. Это проявляется в смене знака полярного эффекта Керра при освещении сфокусированным лазерным лучом различных областей образца. В условиях работы с терагерцовым излучением сверхпроводник будет освещаться целиком и вклады от доменов с противоположными знаками орбитального момента куперовских пар будут взаимно компенсироваться. Обойти эту трудность можно включением относительно слабого магнитного поля до перехода в сверхпроводящее состояние с последующим его выключением. Как утверждается в упомянутой работе, в данном случае речь идет не о захвате магнитного потока, а лишь об исключении спонтанности в выборе системой направления орбитального момента куперовских пар при фазовом переходе.

Благодарности

Авторы благодарят В.М. Ковалёва за обсуждение работы и ценные замечания при подготовке публикации.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00174, <https://rscf.ru/project/24-22-00174/>.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение А: Пояснения к вычислению диаграмм рис. 2

Диаграммы рис. 2 в рамках техники Келдыша получаются следующим образом: запишем функцию Грина $\mathcal{G}^<(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ в третьем порядке по электрон-фононному взаимодействию (рис. 5), проделаем необходимые преобразования, а затем устремим $(\mathbf{r}', t') \rightarrow (\mathbf{r}, t)$, то есть замкнем $\mathcal{G}^<$ в кольцо, как это представлено на рис. 2.

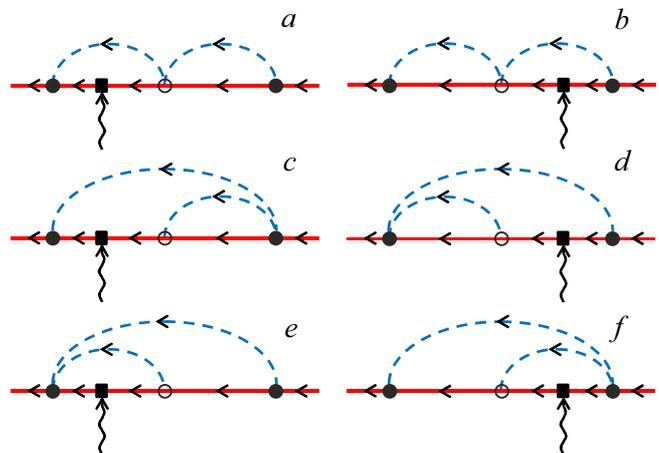


Рис. 5. Функция Грина $\mathcal{G}^<(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ в четвертом порядке теории возмущений (и в третьем по электрон-фононному взаимодействию).

Опираясь на рис. 5, получаем

$$(a) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_2}(\omega - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_2} \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2 - \Omega) \right) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1 - \Omega) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A1})$$

$$(b) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1) \right) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_2}(\omega - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_2} \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2 - \Omega) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A2})$$

$$(c) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_1} \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1 - \Omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}(\omega_1 - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2 - \Omega) \right) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A3})$$

$$(d) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \left(D_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}(\omega_1 - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_1} \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1 - \Omega) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A4})$$

$$(e) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \left(D_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}(\omega_1 - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_2} \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2 - \Omega) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1 - \Omega) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A5})$$

$$(f) = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}-\mathbf{p}_1}(\omega - \omega_1) \hat{G}_{\mathbf{p}_1}(\omega_1) \tau_z \left(D_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}(\omega_1 - \omega_2) \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2) \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{p}_2} \hat{G}_{\mathbf{p}_2}(\omega_2 - \Omega) \right) \right) \tau_z \hat{G}_{\mathbf{p}}(\omega - \Omega) \right\}^<, \quad (\text{A6})$$

где большие круглые скобки введены для облегчения восприятия формул и фононные функции Грина имеют вид:

$$D_{\mathbf{p}}^{R(A)}(\omega) = \frac{\omega_{\mathbf{p}}^2}{(\omega \pm i\delta)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2},$$

$$D_{\mathbf{p}}^<(\omega) = -n_B(\omega)[D_{\mathbf{p}}^A(\omega) - D_{\mathbf{p}}^R(\omega)] \quad (\text{A7})$$

и $n_B(\omega) = 1/(e^{\omega/T} - 1)$ — распределение Бозе-Эйнштейна. При записи выражений (A1)–(A6) и при дальнейших преобразованиях важно следить за порядком следования множителей, так как матричные функции Грина сверхпроводника не коммутируют друг с другом. Чтобы перейти от \hat{T}_c –упорядоченных функций Грина к $G^{(R,A,<)}$ воспользуемся простыми правилами. Последовательно соединенные функции (и отдельные блоки функций) преобразуются так:

$$(ABC)^{R(A)} = A^{R(A)}B^{R(A)}C^{R(A)}, \quad (\text{A8})$$

$$(ABC)^< = A^R B^R C^< + A^R B^< C^A + A^< B^A C^A. \quad (\text{A9})$$

Произведения из параллельно соединенных линий, направленных при этом в одном направлении, раскрываются иначе:

$$(AB)^< = A^< B^<, \quad (\text{A10})$$

$$(AB)^R = A^< B^R + A^R B^< + A^R B^R, \quad (\text{A11})$$

$$(AB)^A = A^< B^A + A^A B^< - A^A B^A. \quad (\text{A12})$$

Кажущаяся простота приведенных правил обманчива в том отношении, что после их применения выражения становятся весьма громоздкими, и мы их не приводим.

Приложение В: Пояснения к взятию следа

При раскрытии произведений матричных функций Грина сверхпроводника нет необходимости удерживать все слагаемые. Ненулевой вклад в холловскую проводимость дают только слагаемые, содержащие произведение двух матриц $\hat{\Delta}(\mathbf{p})$ с различными импульсами, например, $\hat{\tau}_z \hat{\Delta}(\mathbf{p}_1) \hat{\tau}_z \hat{\Delta}(\mathbf{p}_2) \hat{\tau}_z$, $\hat{\tau}_z \hat{\Delta}(\mathbf{p}_1) \hat{\Delta}(\mathbf{p})$ и тому подобные. Прочие слагаемые заануляются при интегрировании по угловым переменным.

Приложение С: Пояснения к вычислению интегралов

Как было упомянуто в начале статьи, в изучаемой системе энергия фонона зависит только от угловых переменных, что позволяет выполнить интегрирование по импульсам. Например, петля из функций D и \hat{G} запишется в следующем виде:

$$v \int \frac{d\varphi_1}{2\pi} D_{\varphi-\varphi_1}(\omega - \omega_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \hat{G}_{\xi_1}(\omega_1). \quad (\text{C1})$$

Интеграл по ξ_1 от запаздывающей функции Грина равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \hat{G}_{\xi_1}(\omega_1) = -[\hat{\tau}_0 \omega_1 + \hat{\Delta}(\varphi_1)]g(\omega_1), \quad (\text{C2})$$

$$g(\omega_1) = \pi \frac{\Theta(\Delta^2 - \omega_1^2)}{\sqrt{\Delta^2 - \omega_1^2}} + i\pi \frac{\text{sign}(\omega)\Theta(\omega_1^2 - \Delta^2)}{\sqrt{\omega_1^2 - \Delta^2}}. \quad (\text{C3})$$

Токовые вершины содержат интегралы от произведения двух матричных функций Грина, которые также берутся, например:

$$\sum_{\mathbf{p}} \hat{G}_{\xi}^R(\omega) \hat{G}_{\xi}^A(\omega - \Omega) = \frac{v}{\Omega} \int \frac{d\varphi_1}{2\pi} \times \left\{ [\hat{\tau}_0 \omega + \hat{\Delta}(\varphi)]g(\omega) - [\hat{\tau}_0(\omega - \Omega) + \hat{\Delta}(\varphi)]g^*(\omega - \Omega) \right\}. \quad (\text{C4})$$

Интегрирование по угловым переменным производится подобно тому, как это было сделано при обсуждении электрон-фононного взаимодействия в начале статьи.

Список литературы

- [1] E.R. Schemm, W.J. Gannon, C.M. Wishne, W.P. Halperin, A. Kapitulnik. Science **345**, 190 (2014).
- [2] E.R. Schemm, R.E. Baumbach, P.H. Tobash, F. Ronning, E.D. Bauer, A. Kapitulnik. Phys. Rev. B **91**, 140506(R) (2015).

- [3] Xinxin Gong, Mehdi Kargarian, Alex Stern, Di Yue, Hexin Zhou, Xiaofeng Jin, Victor M. Galitski, Victor M. Yakovenko, Jing Xia. *Sci. Adv.* **3**, e1602579 (2017).
- [4] E.M. Levenson-Falk, E.R. Schemm, Y. Aoki, M.B. Maple, A. Kapitulnik. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 187004 (2018).
- [5] Y. Maeno, H. Hashimoto, K. Yoshida, S. Nishizaki, T. Fujita, J.G. Bednorz, F. Lichtenberg. *Nature* **372**, 532 (1994).
- [6] A.P. Mackenzie, Y. Maeno. *Rev. Mod. Phys.* **75**, 657 (2003).
- [7] J. Xia, Y. Maeno, P.T. Beyersdorf, M.M. Fejer, A. Kapitulnik. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 167002 (2006).
- [8] Y. Maeno, A. Ikeda, G. Mattoni. *Nat. Phys.* **20**, 1712 (2024).
- [9] R.M. Lutchyn, P. Nagornykh, V.M. Yakovenko. *Phys. Rev. B* **80**, 104508 (2009).
- [10] E.J. König, A. Levchenko. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 027001 (2017).
- [11] S. Li, A.V. Andreev, B.Z. Spivak. *Phys. Rev. B* **92**, 100506 (2015).
- [12] P.A. Ioselevich, P.M. Ostrovsky. *JETP Lett.* **110**, 804 (2019).
- [13] P.I. Arseev. *Phys. Usp.* **58**, 1159 (2015).
- [14] M. Braden, W. Reichardt, S. Nishizaki, Y. Mori, Y. Maeno. *Physical Review B* **57**, 1236 (1998).
- [15] C. Lupien, W.A. MacFarlane, C. Proust, L. Taillefer, Z.Q. Mao, Y. Maeno. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5986(2001).

Редактор А.Н. Смирнов