

01

# Точное решение контактной краевой задачи для волноводной структуры из нелинейной и неоднородной оптических сред

© С.Е. Савотченко

Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Москва, Россия  
 Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия  
 МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия  
 E-mail: savotchenkose@mail.ru

Поступило в Редакцию 18 августа 2025 г.  
 В окончательной редакции 18 августа 2025 г.  
 Принято к публикации 6 ноября 2025 г.

Предложена модель волноводной структуры из градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, контактирующей с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Сформулирована соответствующая краевая задача сопряжения и получено ее точное решение, описывающее нелинейную поверхностную волну. Показано, что варьирование оптических характеристик среды дает возможность управлять характеристиками волны.

**Ключевые слова:** неоднородные оптические среды, нелинейные среды, поверхностные волны, нелинейные волны, оптические волноводы.

DOI: 10.21883/0000000000

Выявление новых закономерностей распространения поверхностных волн в неоднородных оптических средах [1], в том числе нелинейных [2], на основе математического моделирования является важной как фундаментальной, так и прикладной задачей [3]. Особое значение имеет возможность нахождения точных решений в явном аналитическом виде краевых задач сопряжения в рамках сформулированных моделей волноводных структур [4]. Такая возможность связана с выбором профиля пространственной зависимости показателя преломления и формы нелинейного отклика среды, которые допускают нахождение точных решений стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) [5].

В настоящей работе рассмотрена форма зависимости диэлектрической проницаемости, убывающей с расстоянием от поверхности оптически неоднородной среды (называемой градиентной [6]), для которой найдено новое точное решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Заданный профиль показателя преломления, определяющий диэлектрическую проницаемость немагнитных материалов, находящих широкое применение в фотонике [7] и биоинженерии [8], можно получить инжектированием ионов специально подобранных примесей [7] или лазерной литографией [9]. Полученное точное решение используется для нахождения решения краевой задачи сопряжения при аналитическом моделировании распространения поверхностных волн вдоль плоской поверхности градиентной среды, контактирующей с нелинейно-оптической средой. В качестве формы нелинейного отклика для нахождения точного решения предлагается использовать простую модель нелинейной среды, предложенную в [10] и примененную

для аналитического описания нелинейных поверхностных волн [11], а также нелинейных волноводов [12].

Выберем ось  $Ox$  перпендикулярно плоской поверхности раздела сред  $x = 0$  и оси  $Oy$ . Пусть полупространство  $x > 0$  занимает среда с неоднородным показателем преломления, полупространство  $x < 0$  занимает нелинейная среда. Будем рассматривать только поперечные волны с вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ ,  $E_y(x, z) = u(x)e^{i(knz - \omega t)}$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\lambda$  — длина волны,  $n = ck/\omega$  — эффективный показатель преломления,  $\omega$  — частота,  $c$  — скорость света в вакууме, поперечный профиль напряженности электрического поля  $u(x)$  определяется из скалярного уравнения теории волноводов [5]:

$$u''(x) + \{\varepsilon(x, |u|) - n^2\}k^2u(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(x, |u|)$  — диэлектрическая проницаемость всей среды, которую можно представить в виде

$$\varepsilon(x, |u|) = \begin{cases} \varepsilon_L(x), & x > 0, \\ \varepsilon_N(|u|), & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Неоднородность профиля (2) моделируется зависимостью от координаты перпендикулярно поверхности контакта сред в виде

$$\varepsilon_L(x) = e_0 + \frac{e_1}{x + h} + \frac{e_2}{(x + h)^2}, \quad (3)$$

где  $e_{0,1,2}$ ,  $h$  — параметры профиля. Такая форма профиля представляет собой обобщение профилей, рассмотренных при  $e_0 = e_2 = 0$  в [13] и при  $e_0 = e_1 = 0$  в [14].

Нелинейный отклик среды в (2) будем описывать моделью ступенчатой нелинейности

$$\varepsilon_n(|u|) = \begin{cases} \varepsilon_1, & |u| < u_s, \\ \varepsilon_2, & |u| > u_s, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_s$  — пороговая амплитуда напряженности поля, при достижении которой значение диэлектрической проницаемости скачком меняется с одного постоянного значения  $\varepsilon_1$  на другое  $\varepsilon_2$  [11].

Комбинируя (1)–(4), можно получить уравнения

$$u''_L(x) + \left( e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_L(x) = 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$u''_{2N}(x) + (\varepsilon_2 - n^2) k^2 u_{2N}(x) = 0, \quad |u| > u_s, \quad -x_s < x < 0, \quad (6)$$

$$u''_{1N}(x) + (\varepsilon_1 - n^2) k^2 u_{1N}(x) = 0, \quad |u| > u_s, \quad x < -x_s, \quad (7)$$

где  $u_L(x)$ ,  $u_{2N}(|u|)$  и  $u_{1N}(|u|)$  — поперечные профили напряженности электрического поля в соответствующих областях градиентной и нелинейной сред; положение  $x_s$  определяется как граница, отделяющая область, где  $|u| > u_s$  и  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , от  $|u| < u_s$  и  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , т.е. где поле совпадает с пороговым полем:  $u = u_s$ . В модели ступенчатой нелинейности считается, что вблизи поверхности контакта на расстоянии образуется приповерхностный слой с отличающимися от остальной среды оптическими свойствами переменной толщины  $x_s$ , зависящей от оптических характеристик сред и амплитуды поля.

Уравнения (5)–(7) дополняются естественным набором краевых условий сопряжения (вытекающим из требования непрерывности компонент поля)

$$u_L(+0) = u_{2N}(-0), \quad u'_L(+0) = u'_{2N}(-0), \quad (8)$$

$$u_{2N}(-x_s + 0) = u_{1N}(-x_s - 0) = u_s,$$

$$u'_{2N}(-x_s + 0) = u'_{1N}(+x_s - 0), \quad (9)$$

а также условиями на бесконечности:  $u_L(x) \rightarrow 0$ ,  $u_{1N}(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Таким образом, математическая формулировка модели волноводной структуры из нелинейной и неоднородной контактирующих оптических сред сводится к краевой задаче сопряжения (5)–(9).

Ограниченнное в начале координат и на бесконечности решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами (5) можно записать в виде

$$u_L(x) = u_{Lm} W_{\mu, \nu}(2n_0 k(x+h)), \quad (10)$$

где  $W_{\mu, \nu}$  — функция Уиттекера,  $n_0 = \sqrt{n^2 - e_0}$ ,  $\mu = e_1 k / 2n_0$ ,  $\nu = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2$ , и константа  $u_{Lm}$  определяется из краевых условий. Решение (10) существует при  $n^2 > e_0$  и  $k^2 > 1/4e_2$ .

Общее решение уравнения (6) при  $n^2 < \varepsilon_2$  можно записать в виде

$$u_{2N}(x) = u_{2m} \cos(p_2(x - x_m)), \quad (11)$$

где  $p_2^2 = (\varepsilon_2 - n^2) k^2$ , константы  $u_{2m}$  и  $x_m$  определяются из краевых условий.

Ограниченнное на бесконечности решение уравнения (7) существует при  $n^2 > \varepsilon_1$ , и его можно записать в виде

$$u_{1N}(x) = u_{1m} e^{q_1 x}, \quad (12)$$

где  $q_1^2 = (n^2 - \varepsilon_1) k^2$ , константа  $u_{1m}$  определяется из краевых условий.

Подставив решения (10)–(12) в краевые условия (8) и (9), можно получить точное решение краевой задачи сопряжения (5)–(9) в явном виде

$$u(x) = u_s \begin{cases} \left( \frac{p_2^2 + q_G^2}{p_2^2 + q_G^2} \right)^{1/2} \frac{W_{\mu, \nu}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu, \nu}(2n_0 kh)}, & x > 0, \\ \left( 1 + \frac{q_G^2}{p_2^2} \right)^{1/2} \cos(p_2(x - x_m)), & -x_s < x < 0, \\ e^{q_1(x+x_s)}, & x < -x_s, \end{cases} \quad (13)$$

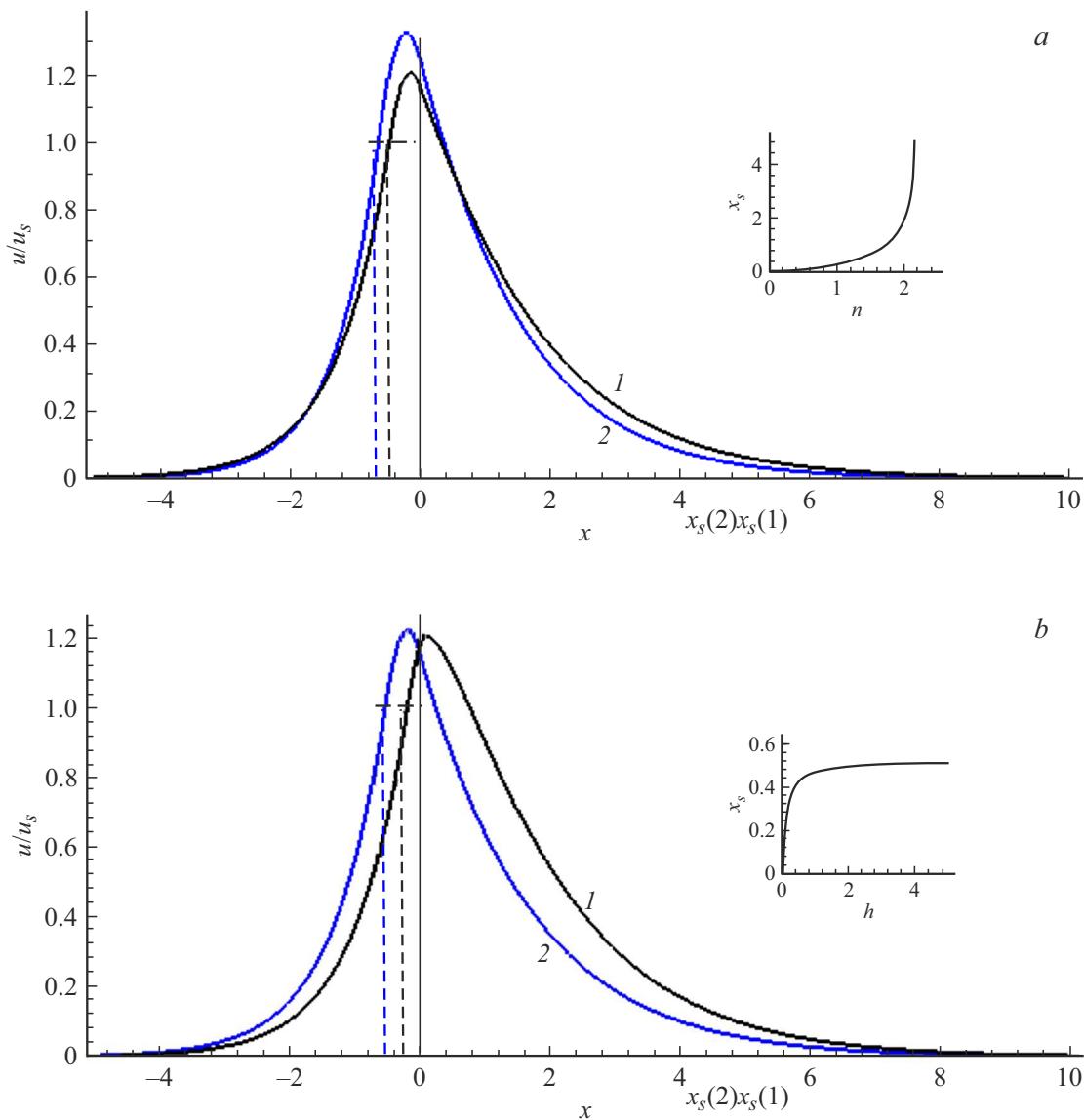
где

$$x_m = \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \left( \frac{q_G}{p_2} \right), \quad (14)$$

$$x_s = \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \left( \frac{q_1}{p_2} \right) - x_m, \quad (15)$$

$$q_G = \frac{k}{n_0} (n_0^2 - e_1/2) - \frac{W_{\mu+1, \nu}(2n_0 kh)}{h W_{\mu, \nu}(2n_0 kh)}. \quad (16)$$

Полученное решение (13) описывает нелинейную поверхность волну, распространяющуюся вдоль плоской границы раздела между градиентной средой с профилем диэлектрической постоянной в форме (3) и нелинейной средой со ступенчатой нелинейностью (4). Его характерные профили приведены на рисунке. Эффективный показатель преломления в данной модели является свободным параметром, и он не связан дисперсионным уравнением с параметрами системы. Это означает, что нелинейная поверхность волна, описываемая решением (13), может возбуждаться при непрерывно меняющемся значении эффективного показателя преломления в интервале допустимых значений  $\max(e_0, \varepsilon_1) < n^2 < \varepsilon_2$ , который в свою очередь определяется углом падения лазерного луча, возбуждающего поверхность волну. Анализ показал, что при повышении значения эффективного показателя преломления возрастает интенсивность волны, наблюдается расширение приповерхностного слоя (увеличение толщины  $x_s$ , определяемой выражением (15)) и уменьшение глубины локализации поля в градиентной среде (см. рисунок, a). Следовательно, варьируя угол падения в ходе экспериментов, можно менять такие характеристики нелинейной поверхности волны, как ее амплитуда и ширина локализации вблизи поверхности. При увеличении параметра  $h$  градиентного профиля диэлектрической проницаемости также наблюдается существенное изменение поперечного профиля поля (см. рисунок, b). В этом случае можно наблюдать перемещение максимума интенсивности нелинейной поверхности волны из приповерхностного слоя нелинейной среды в градиентную. При этом происходит



Поперечный профиль напряженности электрического поля нелинейной поверхностной волны (13) при  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1.5$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_0 = 0.05$ ,  $\epsilon_1 = 0.1$ ,  $\epsilon_2 = 5$ ,  $k = 0.5$ : *a* —  $h = 1$ ,  $n = 1.3$  (1) и 1.5 (2); *b* —  $n = 1.3$ ,  $h = 0.1$  (1) и 3 (2) (в условных единицах).

расширение приповерхностного слоя, однако с ростом значений  $h$  скорость этого процесса замедляется, и увеличения  $x_s$  практически не происходит при дальнейшем увеличении  $h$ .

Таким образом, получено точное решение краевой задачи сопряжения, описывающее нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, которая контактирует с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Продемонстрирована возможность управления характеристиками поверхностной волны путем варьирования оптических характеристик среды.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] D. Mihalache, Rom. Rep. Phys., **76** (2), 402 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.402
- [2] R. Bano, M. Asghar, K. Ayub, T. Mahmood, J. Iqbal, S. Tabassum, R. Zakaria, M. Gilani, Front. Mater., **8**, 783239 (2021). DOI: 10.3389/fmats.2021.783239
- [3] S. Savotchenko, Russ. Technol. J., **11** (4), 84 (2023). DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93
- [4] Н.Н. Розанов, *Нелинейная оптика* (Изд-во ИТМО, СПб., 2008), ч. 1.

- [5] C-L Chen, *Foundations for guided-wave optics* (John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 2005). DOI: 10.1002/0470042222
- [6] G.P. Agrawal, *Physics and engineering of graded-index media* (Cambridge University Press, N.Y., 2023). DOI: 10.1017/9781009282086
- [7] B.K. Singh, V. Bambole, V. Rastogi, P.C. Pandey, Opt. Laser Technol., **129**, 106293 (2020). DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106293
- [8] D. Dash, J. Saini, Prog. Electromagn. Res. M, **116**, 165 (2023). DOI: 10.2528/PIERM23032302
- [9] М.Д. Апарин, Т.Г. Балуян, М.И. Шарипова, М.А. Сиротин, Е.В. Любин, И.В. Соболева, В.О. Бессонов, А.А. Федянин, Изв. РАН. Сер. физ., **87** (6), 807 (2023). DOI: 10.31857/S0367676523701405 [M.D. Aparin, T.G. Baluyan, M.I. Sharipova, M.A. Sirotin, E.V. Lyubin, I.V. Soboleva, V.O. Bessonov, A.A. Fedyanin, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., **87**, 710 (2023). DOI: 10.3103/S1062873823701976].
- [10] A.E. Kaplan, IEEE J. Quantum Electron., **21**, 1538 (1985). DOI: 10.1109/JQE.1985.1072828
- [11] П.И. Хаджи, Л.В. Федоров, ЖТФ, **61** (5), 110 (1991).
- [12] С.Е. Савотченко, Письма в ЖТФ, **46** (16), 43 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49854.18146 [S.E. Savotchenko, Tech. Phys. Lett., **46**, 823 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020080271].
- [13] S.E. Savotchenko, Rom. Rep. Phys., **76** (4), 406 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.406
- [14] S.E. Savotchenko, Rom. Rep. Phys., **77** (1), 402 (2025). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2025.77.402