

01

Точное решение контактной краевой задачи для волноводной структуры из нелинейной и неоднородной оптических сред

© С.Е. Савотченко

Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Москва, Россия
 Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия
 МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия
 E-mail: savotchenkose@mail.ru

Поступило в Редакцию 18 августа 2025 г.

В окончательной редакции 18 августа 2025 г.

Принято к публикации 6 ноября 2025 г.

Предложена модель волноводной структуры из градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, контактирующей с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Сформулирована соответствующая краевая задача сопряжения и получено ее точное решение, описывающее нелинейную поверхностную волну. Показано, что варьирование оптических характеристик среды дает возможность управлять характеристиками волны.

Ключевые слова: неоднородные оптические среды, нелинейные среды, поверхностные волны, нелинейные волны, оптические волноводы.

DOI: 10.21883/0000000000

Выявление новых закономерностей распространения поверхностных волн в неоднородных оптических средах [1], в том числе нелинейных [2], на основе математического моделирования является важной как фундаментальной, так и прикладной задачей [3]. Особое значение имеет возможность нахождения точных решений в явном аналитическом виде краевых задач сопряжения в рамках сформулированных моделей волноводных структур [4]. Такая возможность связана с выбором профиля пространственной зависимости показателя преломления и формы нелинейного отклика среды, которые допускают нахождение точных решений стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) [5].

В настоящей работе рассмотрена форма зависимости диэлектрической проницаемости, убывающей с расстоянием от поверхности оптически неоднородной среды (называемой градиентной [6]), для которой найдено новое точное решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Заданный профиль показателя преломления, определяющий диэлектрическую проницаемость немагнитных материалов, находящихся широкое применение в фотонике [7] и биоинженерии [8], можно получить инжектированием ионов специально подобранных примесей [7] или лазерной литографией [9]. Полученное точное решение используется для нахождения решения краевой задачи сопряжения при аналитическом моделировании распространения поверхностных волн вдоль плоской поверхности градиентной среды, контактирующей с нелинейно-оптической средой. В качестве формы нелинейного отклика для нахождения точного решения предлагается использовать простую модель нелинейной среды, предложенную в [10] и примененную

для аналитического описания нелинейных поверхностных волн [11], а также нелинейных волноводов [12].

Выберем ось Ox перпендикулярно плоской поверхности раздела сред $x = 0$ и оси Oy . Пусть полупространство $x > 0$ занимает среда с неоднородным показателем преломления, полупространство $x < 0$ занимает нелинейная среда. Будем рассматривать только поперечные волны с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$, $E_y(x, z) = u(x)e^{i(knz - \omega t)}$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $n = ck/\omega$ — эффективный показатель преломления, ω — частота, c — скорость света в вакууме, поперечный профиль напряженности электрического поля $u(x)$ определяется из скалярного уравнения теории волноводов [5]:

$$u''(x) + \{\varepsilon(x, |u|) - n^2\}k^2 u(x) = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon(x, |u|)$ — диэлектрическая проницаемость всей среды, которую можно представить в виде

$$\varepsilon(x, |u|) = \begin{cases} \varepsilon_L(x), & x > 0, \\ \varepsilon_N(|u|), & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Неоднородность профиля (2) моделируется зависимостью от координаты перпендикулярно поверхности контакта сред в виде

$$\varepsilon_L(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2}, \quad (3)$$

где $e_{0,1,2}$, h — параметры профиля. Такая форма профиля представляет собой обобщение профилей, рассмотренных при $e_0 = e_2 = 0$ в [13] и при $e_0 = e_1 = 0$ в [14].

Нелинейный отклик среды в (2) будем описывать моделью ступенчатой нелинейности

$$\varepsilon_n(|u|) = \begin{cases} \varepsilon_1, & |u| < u_s, \\ \varepsilon_2, & |u| > u_s, \end{cases} \quad (4)$$

где u_s — пороговая амплитуда напряженности поля, при достижении которой значение диэлектрической проницаемости скачком меняется с одного постоянного значения ε_1 на другое ε_2 [11].

Комбинируя (1)–(4), можно получить уравнения

$$u_L''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_L(x) = 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$u_{2N}''(x) + (\varepsilon_2 - n^2) k^2 u_{2N}(x) = 0, \quad |u| > u_s, \quad -x_s < x < 0, \quad (6)$$

$$u_{1N}''(x) + (\varepsilon_1 - n^2) k^2 u_{1N}(x) = 0, \quad |u| > u_s, \quad x < -x_s, \quad (7)$$

где $u_L(x)$, $u_{2N}(|u|)$ и $u_{1N}(|u|)$ — поперечные профили напряженности электрического поля в соответствующих областях градиентной и нелинейной сред; положение x_s определяется как граница, отделяющая область, где $|u| > u_s$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$, от $|u| < u_s$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$, т.е. где поле совпадает с пороговым полем: $u = u_s$. В модели ступенчатой нелинейности считается, что вблизи поверхности контакта на расстоянии образуется приповерхностный слой с отличающимися от остальной среды оптическими свойствами переменной толщины x_s , зависящей от оптических характеристик сред и амплитуды поля.

Уравнения (5)–(7) дополняются естественным набором краевых условий сопряжения (вытекающим из требования непрерывности компонент поля)

$$u_L(+0) = u_{2N}(-0), \quad u_L'(+0) = u_{2N}'(-0), \quad (8)$$

$$u_{2N}(-x_s + 0) = u_{1N}(-x_s - 0) = u_s, \quad u_{2N}'(-x_s + 0) = u_{1N}'(+x_s - 0), \quad (9)$$

а также условиями на бесконечности: $u_L(x) \rightarrow 0$, $u_{1N}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Таким образом, математическая формулировка модели волноводной структуры из нелинейной и неоднородной контактирующих оптических сред сводится к краевой задаче сопряжения (5)–(9).

Ограниченное в начале координат и на бесконечности решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами (5) можно записать в виде

$$u_L(x) = u_{Lm} W_{\mu,v}(2n_0 k(x+h)), \quad (10)$$

где $W_{\mu,v}$ — функция Уиттекера, $n_0 = \sqrt{n^2 - e_0}$, $\mu = e_1 k / 2n_0$, $v = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2$, и константа u_{Lm} определяется из краевых условий. Решение (10) существует при $n^2 > e_0$ и $k^2 > 1/4e_2$.

Общее решение уравнения (6) при $n^2 < \varepsilon_2$ можно записать в виде

$$u_{2N}(x) = u_{2m} \cos(p_2(x - x_m)), \quad (11)$$

где $p_2^2 = (\varepsilon_2 - n^2)k^2$, константы u_{2m} и x_m определяются из краевых условий.

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (7) существует при $n^2 > \varepsilon_1$, и его можно записать в виде

$$u_{1N}(x) = u_{1m} e^{q_1 x}, \quad (12)$$

где $q_1^2 = (n^2 - \varepsilon_1)k^2$, константа u_{1m} определяется из краевых условий.

Подставив решения (10)–(12) в краевые условия (8) и (9), можно получить точное решение краевой задачи сопряжения (5)–(9) в явном виде

$$u(x) = u_s \begin{cases} \left(\frac{p_2^2 + q_1^2}{p_2^2 + q_G^2} \right)^{1/2} \frac{W_{\mu,v}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu,v}(2n_0 k h)}, & x > 0, \\ \left(1 + \frac{q_G^2}{p_2^2} \right)^{1/2} \cos(p_2(x - x_m)), & -x_s < x < 0, \\ e^{q_1(x+x_s)}, & x < -x_s, \end{cases} \quad (13)$$

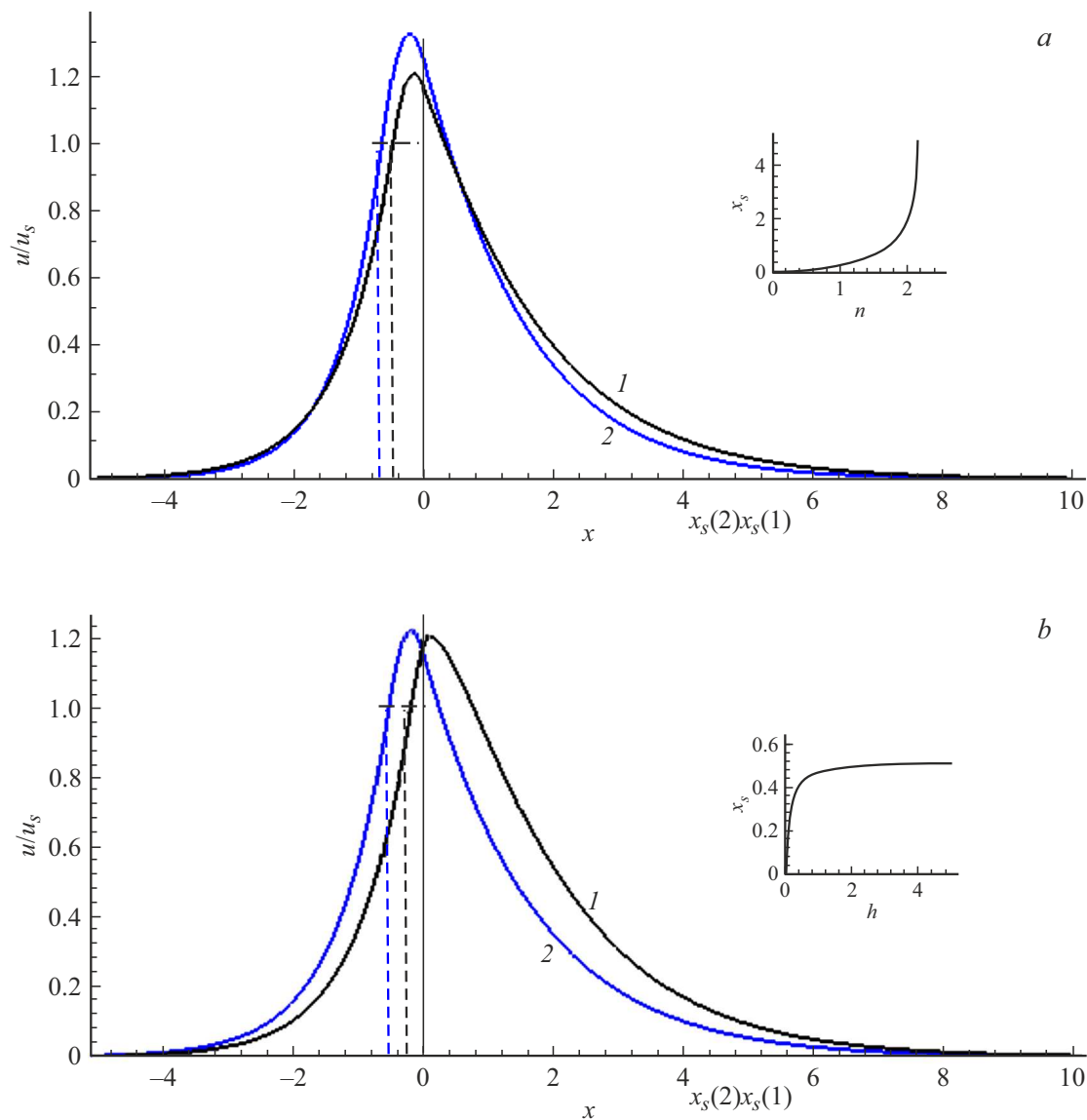
где

$$x_m = \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{q_G}{p_2} \right), \quad (14)$$

$$x_s = \frac{1}{p_2} \operatorname{arctg} \left(\frac{q_1}{p_2} \right) - x_m, \quad (15)$$

$$q_G = \frac{k}{n_0} (n_0^2 - e_1/2) - \frac{W_{\mu+1,v}(2n_0 k h)}{h W_{\mu,v}(2n_0 k h)}. \quad (16)$$

Полученное решение (13) описывает нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль плоской границы раздела между градиентной средой с профилем диэлектрической постоянной в форме (3) и нелинейной средой со ступенчатой нелинейностью (4). Его характерные профили приведены на рисунке. Эффективный показатель преломления в данной модели является свободным параметром, и он не связан дисперсионным уравнением с параметрами системы. Это означает, что нелинейная поверхностная волна, описываемая решением (13), может возбуждаться при непрерывно меняющемся значении эффективного показателя преломления в интервале допустимых значений $\max(e_0, \varepsilon_1) < n^2 < \varepsilon_2$, который в свою очередь определяется углом падения лазерного луча, возбуждающего поверхностную волну. Анализ показал, что при повышении значения эффективного показателя преломления возрастает интенсивность волны, наблюдается расширение приповерхностного слоя (увеличение толщины x_s , определяемой выражением (15)) и уменьшение глубины локализации поля в градиентной среде (см. рисунок, а). Следовательно, варьируя угол падения в ходе экспериментов, можно менять такие характеристики нелинейной поверхностной волны, как ее амплитуда и ширина локализации вблизи поверхности. При увеличении параметра h градиентного профиля диэлектрической проницаемости также наблюдается существенное изменение поперечного профиля поля (см. рисунок, б). В этом случае можно наблюдать перемещение максимума интенсивности нелинейной поверхностной волны из приповерхностного слоя нелинейной среды в градиентную. При этом происходит



Поперечный профиль напряженности электрического поля нелинейной поверхностной волны (13) при $e_0 = -0.1$, $e_1 = 1.5$, $e_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 5$, $k = 0.5$: a — $h = 1$, $n = 1.3$ (1) и 1.5 (2); b — $n = 1.3$, $h = 0.1$ (1) и 3 (2) (в условных единицах).

расширение приповерхностного слоя, однако с ростом значений h скорость этого процесса замедляется, и увеличения x_s практически не происходит при дальнейшем увеличении h .

Таким образом, получено точное решение краевой задачи сопряжения, описывающее нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, которая контактирует с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Продemonстрирована возможность управления характеристиками поверхностной волны путем варьирования оптических характеристик среды.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] D. Mihalache, Rom. Rep. Phys., **76** (2), 402 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.402
- [2] R. Bano, M. Asghar, K. Ayub, T. Mahmood, J. Iqbal, S. Tabassum, R. Zakaria, M. Gilani, Front. Mater., **8**, 783239 (2021). DOI: 10.3389/fmats.2021.783239
- [3] S. Savotchenko, Russ. Technol. J., **11** (4), 84 (2023). DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93
- [4] Н.Н. Розанов, *Нелинейная оптика* (Изд-во ИТМО, СПб., 2008), ч. 1.

- [5] C-L Chen, *Foundations for guided-wave optics* (John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 2005). DOI: 10.1002/0470042222
- [6] G.P. Agrawal, *Physics and engineering of graded-index media* (Cambridge University Press, N.Y., 2023). DOI: 10.1017/9781009282086
- [7] B.K. Singh, V. Bambole, V. Rastogi, P.C. Pandey, *Opt. Laser Technol.*, **129**, 106293 (2020). DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106293
- [8] D. Dash, J. Saini, *Prog. Electromagn. Res. M*, **116**, 165 (2023). DOI: 10.2528/PIERM23032302
- [9] М.Д. Апарин, Т.Г. Балуян, М.И. Шарипова, М.А. Сиротин, Е.В. Любин, И.В. Соболева, В.О. Бессонов, А.А. Федеянин, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **87** (6), 807 (2023). DOI: 10.31857/S0367676523701405 [M.D. Aparin, T.G. Baluyan, M.I. Sharipova, M.A. Sirotnin, E.V. Lyubin, I.V. Soboleva, V.O. Bessonov, A.A. Fedyanin, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, **87**, 710 (2023). DOI: 10.3103/S1062873823701976].
- [10] A.E. Kaplan, *IEEE J. Quantum Electron.*, **21**, 1538 (1985). DOI: 10.1109/JQE.1985.1072828
- [11] П.И. Хаджи, Л.В. Федоров, *ЖТФ*, **61** (5), 110 (1991).
- [12] С.Е. Савотченко, *Письма в ЖТФ*, **46** (16), 43 (2020). DOI: 10.21883/PJTf.2020.16.49854.18146 [S.E. Savotchenko, *Tech. Phys. Lett.*, **46**, 823 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020080271].
- [13] S.E. Savotchenko, *Rom. Rep. Phys.*, **76** (4), 406 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.406
- [14] S.E. Savotchenko, *Rom. Rep. Phys.*, **77** (1), 402 (2025). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2025.77.402