01

Точное решение контактной краевой задачи для волноводной структуры из нелинейной и неоднородной оптических сред

© С.Е. Савотченко

Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Москва, Россия
Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия
E-mail: savotchenkose@mail.ru

Поступило в Редакцию 18 августа 2025 г.
В окончательной редакции 18 августа 2025 г.
Принято к публикации 6 ноября 2025 г.

Предложена модель волноводной структуры из градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, контактирующей с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Сформулирована соответствующая краевая задача сопряжения и получено ее точное решение, описывающее нелинейную поверхностную волну. Показано, что варьирование оптических характеристик среды дает возможность управлять характеристиками волны.

Ключевые слова: неоднородные оптические среды, нелинейные среды, поверхностные волны, нелинейные волны, оптические волноводы.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.05.62332.20477

Выявление новых закономерностей распространения поверхностных волн в неоднородных оптических средах [1], в том числе нелинейных [2], на основе математического моделирования является важной как фундаментальной, так и прикладной задачей [3]. Особое значение имеет возможность нахождения точных решений в явном аналитическом виде краевых задач сопряжения в рамках сформулированных моделей волноводных структур [4]. Такая возможность связана с выбором профиля пространственной зависимости показателя преломления и формы нелинейного отклика среды, которые допускают нахождение точных решений стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) [5].

В настоящей работе рассмотрена форма зависимости диэлектрической проницаемости, убывающей с расстоянием от поверхности оптически неоднородной среды (называемой градиентной [6]), для которой найдено новое точное решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами. Заданный профиль показателя преломления, определяющий диэлектрическую проницаемость немагнитных материалов, находящих широкое применение в фотонике [7] и биоинженерии [8], можно получить инжектированием ионов специально подобранных примесей [7] или лазерной литографией [9]. Полученное точное решение используется для нахождения решения краевой задачи сопряжения при аналитическом моделировании распространения поверхностных волн вдоль плоской поверхности градиентной среды, контактирующей с нелинейно-оптической средой. В качестве формы нелинейного отклика для нахождения точного решения предлагается использовать простую модель нелинейной среды, предложенную в [10] и примененную для аналитического описания нелинейных поверхностных волн [11], а также нелинейных волноводов [12].

Выберем ось Ox перпендикулярно плоской поверхности раздела сред $x = 0$ и оси Oy. Пусть полупространство $x > 0$ занимает среда с неоднородным показателем преломления, полупространство $x < 0$ занимает нелинейная среда. Будем рассматривать только поперечные волны с вектором напряженности электрического поля $\mathbf{E} = (0,\ E_y,\ 0)$, $E_y(x, z) = u(x)e^{i(knz-\omega t)}$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, $n = ck/\omega$ — эффективный показатель преломления, ω — частота, c — скорость света в вакууме, поперечный профиль напряженности электрического поля $u(x)$ определяется из скалярного уравнения теории волноводов [5]:

$$u''(x) + \{\varepsilon(x, |u|) - n^2\}k^2u(x) = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon(x, |u|)$ — диэлектрическая проницаемость всей среды, которую можно представить в виде

$$\varepsilon(x, |u|) = \begin{cases} \varepsilon_L(x), & x > 0, \\ \varepsilon_N(|u|), & x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Неоднородность профиля (2) моделируется зависимостью от координаты перпендикулярно поверхности контакта сред в виде

$$\varepsilon_L(x) = e_0 + \frac{e_1}{x + h} + \frac{e_2}{(x + h)^2}, \tag{3}$$

где $e_{0,1,2}$, h — параметры профиля. Такая форма профиля представляет собой обобщение профилей, рассмотренных при $e_0 = e_2 = 0$ в [13] и при $e_0 = e_1 = 0$ в [14].

Нелинейный отклик среды в (2) будем описывать моделью ступенчатой нелинейности

$$\varepsilon_n(|u|) = \begin{cases} \varepsilon_1, & |u| < u_s, \\ \varepsilon_2, & |u| > u_s, \end{cases} \tag{4}$$

где u_s — пороговая амплитуда напряженности поля, при достижении которой значение диэлектрической проницаемости скачком меняется с одного постоянного значения ε_1 на другое ε_2 [11].

Комбинируя (1)–(4), можно получить уравнения

$$u_L''(x)+\left(e_0+\frac{e_1}{x+h}+\frac{e_2}{(x+h)^2}-n^2\right)k^2u_L(x)=0,\ x>0, \tag{5}$$

$$u_{2N}''(x)+(\varepsilon_2-n^2)k^2u_{2N}(x)=0,\ |u|>u_s,\ -x_s<x<0, \tag{6}$$

$$u_{1N}''(x)+(\varepsilon_1-n^2)k^2u_{1N}(x)=0,\ |u|>u_s,\ x<-x_s, \tag{7}$$

где $u_L(x)$, $u_{2N}(|u|)$ и $u_{1N}(|u|)$ — поперечные профили напряженности электрического поля в соответствующих областях градиентной и нелинейной сред; положение x_s определяется как граница, отделяющая область, где $|u|>u_s$ и $\varepsilon=\varepsilon_2$, от $|u|<u_s$ и $\varepsilon=\varepsilon_1$, т.е. где поле совпадает с пороговым полем: $u=u_s$. В модели ступенчатой нелинейности считается, что вблизи поверхности контакта на расстоянии образуется приповерхностный слой с отличающимися от остальной среды оптическими свойствами переменной толщины x_s, зависящей от оптических характеристик сред и амплитуды поля.

Уравнения (5)–(7) дополняются естественным набором краевых условий сопряжения (вытекающим из требования непрерывности компонент поля)

$$u_L(+0)=u_{2N}(-0),\quad u_L'(+0)=u_{2N}'(-0), \tag{8}$$

$$u_{2N}(-x_s+0)=u_{1N}(-x_s-0)=u_s,$$
$$u_{2N}'(-x_s+0)=u_{1N}'(+x_s-0), \tag{9}$$

а также условиями на бесконечности: $u_L(x)\to 0$, $u_{1N}(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$.

Таким образом, математическая формулировка модели волноводной структуры из нелинейной и неоднородной контактирующих оптических сред сводится к краевой задаче сопряжения (5)–(9).

Ограниченное в начале координат и на бесконечности решение уравнения Гельмгольца с переменными коэффициентами (5) можно записать в виде

$$u_L(x)=u_{Lm}W_{\mu,\nu}\big(2n_0k(x+h)\big), \tag{10}$$

где $W_{\mu,\nu}$ — функция Уиттекера, $n_0=\sqrt{n^2-e_0}$, $\mu=e_1k/2n_0$, $\nu=\sqrt{1-4k^2e_2}/2$, и константа u_{Lm} определяется из краевых условий. Решение (10) существует при $n^2>e_0$ и $k^2>1/4e_2$.

Общее решение уравнения (6) при $n^2<\varepsilon_2$ можно записать в виде

$$u_{2N}(x)=u_{2m}\cos\big(p_2(x-x_m)\big), \tag{11}$$

где $p_2^2=(\varepsilon_2-n^2)k^2$, константы u_{2m} и x_m определяются из краевых условий.

Ограниченное на бесконечности решение уравнения (7) существует при $n^2>\varepsilon_1$, и его можно записать в виде

$$u_{1N}(x)=u_{1m}e^{q_1x}, \tag{12}$$

где $q_1^2=(n^2-\varepsilon_1)k^2$, константа u_{1m} определяется из краевых условий.

Подставив решения (10)–(12) в краевые условия (8) и (9), можно получить точное решение краевой задачи сопряжения (5)–(9) в явном виде

$$u(x)=u_s\begin{cases}\left(\frac{p_2^2+q_1^2}{p_2^2+q_G^2}\right)^{1/2}\frac{W_{\mu,\nu}\left(2n_0k(x+h)\right)}{W_{\mu,\nu}(2n_0kh)}, & x>0,\\ \left(1+\frac{q_G^2}{p_2^2}\right)^{1/2}\cos\big(p_2(x-x_m)\big), & -x_s<x<0,\\ e^{q_1(x+x_s)}, & x<-x_s,\end{cases} \tag{13}$$

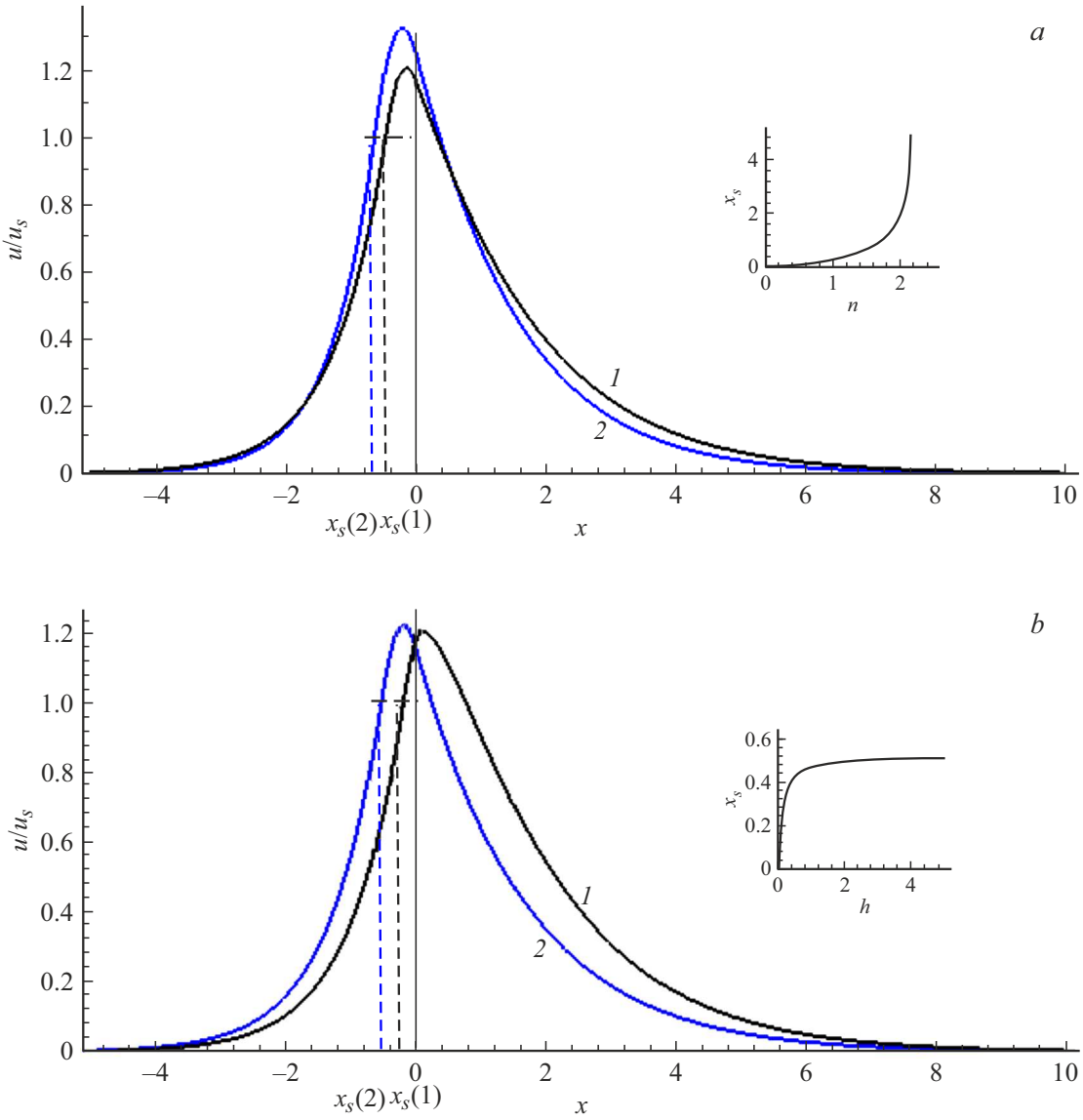
где

$$x_m=\frac{1}{p_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{q_G}{p_2}\right), \tag{14}$$

$$x_s=\frac{1}{p_2}\operatorname{arctg}\left(\frac{q_1}{p_2}\right)-x_m, \tag{15}$$

$$q_G=\frac{k}{n_0}(n_0^2-e_1/2)-\frac{W_{\mu+1,\nu}(2n_0kh)}{hW_{\mu,\nu}(2n_0kh)}. \tag{16}$$

Полученное решение (13) описывает нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль плоской границы раздела между градиентной средой с профилем диэлектрической постоянной в форме (3) и нелинейной средой со ступенчатой нелинейностью (4). Его характерные профили приведены на рисунке. Эффективный показатель преломления в данной модели является свободным параметром, и он не связан дисперсионным уравнением с параметрами системы. Это означает, что нелинейная поверхностная волна, описываемая решением (13), может возбуждаться при непрерывно меняющемся значении эффективного показателя преломления в интервале допустимых значений $\max(e_0, \varepsilon_1)<n^2<\varepsilon_2$, который в свою очередь определяется углом падения лазерного луча, возбуждающего поверхностную волну. Анализ показал, что при повышении значения эффективного показателя преломления возрастает интенсивность волны, наблюдается расширение приповерхностного слоя (увеличение толщины x_s, определяемой выражением (15)) и уменьшение глубины локализации поля в градиентной среде (см. рисунок, *a*). Следовательно, варьируя угол падения в ходе экспериментов, можно менять такие характеристики нелинейной поверхностной волны, как ее амплитуда и ширина локализации вблизи поверхности. При увеличении параметра h градиентного профиля диэлектрической проницаемости также наблюдается существенное изменение поперечного профиля поля (см. рисунок, *b*). В этом случае можно наблюдать перемещение максимума интенсивности нелинейной поверхностной волны из приповерхностного слоя нелинейной среды в градиентную. При этом происходит



Поперечный профиль напряженности электрического поля нелинейной поверхностной волны (13) при $e_0 = -0.1$, $e_1 = 1.5$, $e_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 5$, $k = 0.5$: *a* — $h = 1$, $n = 1.3$ (*1*) и 1.5 (*2*); *b* — $n = 1.3$, $h = 0.1$ (*1*) и 3 (*2*) (в условных единицах).

расширение приповерхностного слоя, однако с ростом значений h скорость этого процесса замедляется, и увеличения x_s практически не происходит при дальнейшем увеличении h.

Таким образом, получено точное решение краевой задачи сопряжения, описывающее нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль градиентной среды с убывающим в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем показателем преломления, которая контактирует с нелинейной средой со скачкообразным изменением диэлектрической проницаемости в зависимости от интенсивности электрического поля. Продемонстрирована возможность управления характеристиками поверхностной волны путем варьирования оптических характеристик среды.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] D. Mihalache, Rom. Rep. Phys., **76** (2), 402 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.402
[2] R. Bano, M. Asghar, K. Ayub, T. Mahmood, J. Iqbal, S. Tabassum, R. Zakaria, M. Gilani, Front. Mater., **8**, 783239 (2021). DOI: 10.3389/fmats.2021.783239
[3] S. Savotchenko, Russ. Technol. J., **11** (4), 84 (2023). DOI: 10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93
[4] Н.Н. Розанов, *Нелинейная оптика* (Изд-во ИТМО, СПб., 2008), ч. 1.

[5] C-L Chen, *Foundations for guided-wave optics* (John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 2005). DOI: 10.1002/0470042222
[6] G.P. Agrawal, *Physics and engineering of graded-index media* (Cambridge University Press, N.Y., 2023). DOI: 10.1017/9781009282086
[7] B.K. Singh, V. Bambole, V. Rastogi, P.C. Pandey, Opt. Laser Technol., **129**, 106293 (2020). DOI: 10.1016/j.optlastec.2020.106293
[8] D. Dash, J. Saini, Prog. Electromagn. Res. M, **116**, 165 (2023). DOI: 10.2528/PIERM23032302
[9] М.Д. Апарин, Т.Г. Балуян, М.И. Шарипова, М.А. Сиротин, Е.В. Любин, И.В. Соболева, В.О. Бессонов, А.А. Федянин, Изв. РАН. Сер. физ., **87** (6), 807 (2023). DOI: 10.31857/S0367676523701405 [M.D. Aparin, T.G. Baluyan, M.I. Sharipova, M.A. Sirotin, E.V. Lyubin, I.V. Soboleva, V.O. Bessonov, A.A. Fedyanin, Bull. Russ. Acad. Sci. Phys., **87**, 710 (2023). DOI: 10.3103/S1062873823701976].
[10] A.E. Kaplan, IEEE J. Quantum Electron., **21**, 1538 (1985). DOI: 10.1109/JQE.1985.1072828
[11] П.И. Хаджи, Л.В. Федоров, ЖТФ, **61** (5), 110 (1991).
[12] С.Е. Савотченко, Письма в ЖТФ, **46** (16), 43 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49854.18146 [S.E. Savotchenko, Tech. Phys. Lett., **46**, 823 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020080271].
[13] S.E. Savotchenko, Rom. Rep. Phys., **76** (4), 406 (2024). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2024.76.406
[14] S.E. Savotchenko, Rom. Rep. Phys., **77** (1), 402 (2025). DOI: 10.59277/RomRepPhys.2025.77.402