

Усиление излучения апериодически неустойчивой плазмой, образованной при многофотонной ионизации атомов инертного газа

© К.Ю. Вагин

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: vagin@sci.lebedev.ru

Поступило в Редакцию 17 марта 2025 г.
В окончательной редакции 12 августа 2025 г.
Принято к публикации 13 октября 2025 г.

Рассмотрено взаимодействие электромагнитного излучения с предварительно образованной при многофотонной ионизации атомов плотного инертного газа полуограниченной неравновесной плазмой. Показано, что благодаря развитию в такой плазме апериодической электромагнитной неустойчивости возможно усиление проникающего в плазму и отраженного от нее полей на несколько порядков. Для плотности ионизуемого газа, близкой к атмосферной, инкремент нарастания напряженности полей попадает в терагерцовый диапазон частот.

Ключевые слова: фотоионизованная плазма, электромагнитные неустойчивости, терагерцовое излучение.

DOI: 10.61011/JTF.2026.02.62282.37-25

Введение

Воздействие коротких интенсивных лазерных импульсов электромагнитного излучения различной поляризации на атомы газов приводит к формированию фотоионизованных плазм, обладающих целым рядом необычных физических свойств, которые качественно отличаются от свойств равновесной плазмы с распределением электронов, близким к максвелловскому. При этом возможна как полная ионизация атомов газа мощными импульсами, реализующаяся в тунNELном режиме [1–5] так и образование слабоионизованной плазмы под воздействием лазерного излучения умеренной интенсивности в режиме многофотонной ионизации [6–13]. В зависимости от конкретных условий ионизации формирующиеся распределения фотоэлектронов как по значениям энергии, так и по направлениям импульсов весьма разнообразны. Общим объединяющим свойством распределений частиц в фотоионизованных плазмах является их неравновесность, которая может быть причиной развития различных неустойчивостей в плазме. В свою очередь, развитие неустойчивостей приводит к накоплению в плазме избыточной энергии электромагнитного поля [14] использование которой возможно в целях усиления и генерации излучения — одной из чрезвычайно актуальных современных задач исследований в различных научных и технических направлениях, в том числе в области физики плазмы.

Усиление излучения в условиях тунNELной ионизации атомов газов возможно благодаря развитию плазменных неустойчивостей, связанных с сильной анизотропией формирующегося распределения электронов фотоионизованной плазмы, задаваемой поляризацией ионизующего излучения. В частности, при ионизации

атомов газа линейно поляризованным излучением образуется распределение электронов, близкое к анизотропному би-максвелловскому распределению [1,2], тогда как в случае ионизации циркулярно поляризованным излучением формируется торообразное распределение электронов по скоростям [1,3,4]. Характерные особенности собственных неустойчивых мод и особенностей усиления электромагнитного излучения в таких плазмах, в том числе пространственно ограниченных, детально рассмотрено, например, в работах [15–20]. Гораздо большее многообразие неравновесных распределений фотоэлектронов, а как следствие собственных неустойчивых мод, возникает при многофотонной ионизации атомов газа [6–10]. В частности, при такой ионизации инертных газов вначале формируется сильно анизотропное распределение фотоэлектронов, которое быстро с течением времени становится изотропным, но многопиковым распределением по энергии. Изучению потенциальных и электромагнитных неустойчивостей, а также выявлению условий возможности усиления излучения в плазме, образованной при многофотонной ионизации атомов инертного газа на различных этапах ее эволюции, посвящены работы [21–27]. В условиях ионизации сравнительно плотного газа, давление которого близко к атмосферному, частоты столкновений фотоэлектронов с нейтральными атомами оказываются сравнимы с электронной плазменной частотой. Поэтому при описании распространения и усиления излучения в такой плазме наряду с учетом неравновесности распределения фотоэлектронов следует учитывать особенности их рассеяния на нейтральных атомах [27]. Отметим, что в описанных условиях характерные частоты процессов попадают в THz-диапазон. Это указывает на возможность использования описанного в данном сообщении механизма

усиления THz-излучения наряду с предложенными ранее (см., например, [28–30]) возможностями генерации THz-излучения при ионизации атомов в полях лазерного излучения умеренной интенсивности.

В настоящей работе рассмотрено воздействие пробного электромагнитного излучения на слабоионизованную неравновесную плазму, предварительно сформированную под воздействием интенсивного лазерного импульса фемтосекундной длительности в режиме многофотонной ионизации атомов инертного газа. В разд. 1 в линейном приближении по амплитуде поля пробного излучения одновременно аналитически решена начальная и граничная задача, опирающаяся на самосогласованное рассмотрение кинетического уравнения для возмущения функции распределения фотоэлектронов по скоростям и уравнений Максвелла для полей в полуограниченной плазме с привлечением преобразования Лапласа по времени. Без детализации явного вида сильно неравновесного энергетического распределения фотоэлектронов получены интегральные выражения для полей отраженной от плазмы волны и проникающего в нее излучения в случае произвольного профиля падающей волны. Описание ключевого для динамики фотоэлектронов в плотной слабоионизованной плазме упругого рассеяния на нейтральных атомах проведено кинетически с помощью интеграла столкновений, подобного используемому в модели Лоренца [31]. Особое внимание в настоящей работе уделено последовательному учету влияния эффекта Рамзауэра–Таунсенд [32–34] на частоту столкновений фотоэлектронов с нейтральными атомами. Возможность использования при аналитических расчетах отвечающей этому эффекту резкой немонотонной зависимости от скорости транспортного сечения упругого рассеяния фотоэлектронов на атомах в широком интервале энергий, актуальном для режима многофотонной ионизации, основана на подходе, развитом в работах [24,27,35] и применимом для конкретных экспериментальных данных для различных газов (см., например, [36,37]). Это выгодно отличает наш подход от работ, использующих частные степенные интерполяции [22,38] при моделировании сечения рассеяния в сравнительно узких диапазонах энергии фотоэлектронов. Индивидуальные особенности временной эволюции конкретной неравновесной плазмы и ее взаимодействия с электромагнитным излучением, в первую очередь, его усиления, во многом определяются дисперсионными свойствами собственных неустойчивых мод такой плазмы [39], которые необходимы для выполнения обратного преобразования Лапласа при вычислении временной зависимости полей. Применительно к модели холодной фотоионизованной плазмы, изотропное неравновесное распределение фотоэлектронов которой описывается моноэнергетическим пиком без уширения, в разд. 2 приведено явное выражение для поперечной диэлектрической проницаемости, позволяющее получить дисперсионное уравнение для собственных электромагнитных мод такой плазмы. В плоскости комплексной частоты во всем диапазоне возможных длин волн де-

тально описано решение этого уравнения для неустойчивой моды, наиболее эффективное увеличение амплитуды которой реализуется в длинноволновом пределе и отвечает апериодическому нарастанию во времени. Приведено точное аналитическое решение дисперсионного уравнения для максимального инкремента этой апериодической неустойчивости. На примере газа Xe для двух различных случаев фотоионизованных плазм приведены значения параметров и сделаны численные оценки характерных времен существования неравновесного распределения фотоэлектронов и времени развития неустойчивости. Установлен широкий интервал энергий фотоэлектронов, для которых возможно развитие этой апериодической неустойчивости. В разд. 3 на основе результатов предыдущих разделов аналитически и численно рассмотрена пространственно-временная структура электромагнитного поля во всем пространстве, формирующуюся в результате отклика неустойчивой плазмы на воздействие падающего импульса. Показано, что эффективно усиливающаяся часть как проникающего в плазму, так и отраженного полей нарастают ангармонически, а спектральный состав этих сигналов задается максимальным инкрементом неустойчивой апериодической моды фотоионизованной плазмы и слабо зависит от частоты пробного излучения, влияние которой заметно определяет амплитуду плазменного отклика. Получены асимптотические аналитические выражения для нарастающих во времени полей, и установлены условия наиболее эффективного усиления падающего на плазму излучения.

1. Падение электромагнитного импульса на полуограниченную фотоионизованную плазму

Рассмотрим слабоионизованную плазму, предварительно образованную при многофотонной ионизации одноатомного газа коротким импульсом линейно поляризованного лазерного излучения. Детальное обсуждение формирующегося после выключения ионизующего импульса неравновесного распределения фотоэлектронов и этапов его эволюции дано в работах [21,23,24]. При воздействии импульсов небольшой интенсивности $\sim 10^{12}–10^{13} \text{ W/cm}^2$ ионизация атомов реализуется при поглощении минимального числа фотонов, необходимого для преодоления потенциала ионизации атома. Энергетический спектр сильно неравновесного распределения фотоэлектронов имеет вид узкого пика, положение которого не превышает нескольких электрон-вольт [6,7,21]. Степень ионизации формирующегося плазменного образования невелика $\sim 10^{-6}–10^{-4}$ [21]. Поэтому рассеяние фотоэлектронов в основном происходит на нейтральных атомах, а столкновения электронов между собой и с ионами редки. Для указанных типичных энергий рассеяние фотоэлектронов на атомах носит упругий характер [36,37]. В сравнительно плотной

плазме частые столкновения фотоэлектронов с нейтральными атомами, характеризующиеся частотой $\nu(v)$, где v — скорость электронов, приводят к быстрой релаксации по направлениям импульса и на временах, превышающих ν^{-1} , неравновесная функция распределения фотоэлектронов становится изотропной $f_0(v)$. В плазме с достаточно не высокой степенью ионизации описанное неравновесное распределение фотоэлектронов по скоростям сохраняется в течение весьма широкого временного интервала вплоть до ее релаксации к равновесной максвелловской функции, которая происходит либо из-за редких электрон-электронных столкновений, либо из-за обмена энергией при столкновениях фотоэлектронов с тяжелыми нейтральными атомами [40].

Пусть на занимающую полупространство $z > 0$ однородную фотоионизованную плазму, описанную выше, в момент времени $t = 0$ падает нормально электромагнитная волна, напряженность электрического поля которой имеет вид

$$\mathbf{E}_i(t - z/c) = \mathbf{e}_x E_i(t - z/c) \eta(t - z/c), \quad z < 0, \quad (1)$$

где $\eta(\tau)$ — единичная функция Хевисайда, \mathbf{e}_x — единичный вектор вдоль оси $0x$. Поле вида (1) проникает в плазму и частично отражается в обратном направлении. Удовлетворяющее уравнениям Максвелла в вакууме отраженное поле можно представить в виде уходящей от плазмы $z < 0$ поперечной волны, с электрическим $\mathbf{E}_r(t + z/c) = \{E_r(t + z/c), 0, 0\}$ и имеющим аналогичную пространственно-временную зависимость ориентированным вдоль оси $0y$ магнитным полями. В свою очередь, проникая в плазму $z > 0$, поле (1) приводит к изменению исходной функции распределения фотоэлектронов и возникновению электрического $\mathbf{E}(z, t) = \{E(z, t), 0, 0\}$ и направленного вдоль $0y$ магнитного полей. Интересуясь откликом неравновесной плазмы на воздействие внешнего электромагнитного поля (1), вкладом в возмущения распределения фотоэлектронов и электромагнитного поля в плазме, связанным с малыми тепловыми флуктуациями, будем пренебрегать. Тогда можно считать, что в начальный момент времени $t = 0$, отвечающий приходу фронта падающей волны на границу плазмы, возмущения рассматриваемых величин отсутствуют $\delta f(\mathbf{v}, z, t = 0) = 0$ и $E(z, t = 0) = 0$.

В таких условиях для описания эволюции электромагнитного поля в плазме и отраженной волны при $t > 0$ воспользуемся преобразованием Лапласа, когда оригинал функции $\Phi(t)$ и его изображение $\Phi(\omega)$ связаны соотношениями

$$\Phi(\omega) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \Phi(t),$$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty+i\Delta}^{+\infty+i\Delta} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \Phi(\omega), \quad \text{где } \Delta > \gamma > 0,$$

а γ — показатель экспоненциального роста функции $\Phi(t)$.

Будем интересоваться сравнительно высокочастотными коллективными движениями фотоэлектронов, когда движением нейтральных атомов и ионов можно пренебречь. Типичные значения энергии фотоэлектронов порядка электрон-вольта, поэтому их характерная скорость сравнительно не велика. Ниже будет рассмотрено усиление электромагнитного поля, связанное с длинноволновыми неустойчивыми модами неравновесной плазмы. Это позволяет ограничиться изучением условий, когда расстояние $v/|\omega|$, проходимое электроном за время изменения поля, много меньше пространственного масштаба его изменения. Будем считать воздействие внешнего поля сравнительно слабым, что позволяет рассмотреть задачу о взаимодействии поля (1) с неравновесной плазмой в линейном приближении по его амплитуде. Тогда для малого возмущения изображения Лапласа функции распределения электронов $\delta f(\mathbf{v}, z, \omega)$ имеем линеаризованное кинетическое уравнение [27]:

$$\begin{aligned} & -i\omega \delta f(\mathbf{v}, z, \omega) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}\mathbf{E}(z, \omega)}{v} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \\ & = -\nu(v) [\delta f(\mathbf{v}, z, \omega) - \langle \delta f(\mathbf{v}, z, \omega) \rangle_{\mathbf{v}}], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{E}(z, \omega)$ — изображение Лапласа электрического поля в плазме, e и m — заряд и масса электрона. В (2) $\langle \dots \rangle_{\mathbf{v}} \equiv \int(\dots) dO_{\mathbf{v}}/4\pi$ означает усреднение по углам вектора скорости \mathbf{v} . Интеграл столкновений в (2) описывает упругие столкновения фотоэлектронов с нейтральными атомами, приводящие к изменению направления импульса электронов без изменения их энергии [31]. Пренебрежение слагаемым с пространственной производной в уравнении (2), оправданное в длинноволновом пределе, не позволяет точно описать поведение электромагнитного поля в плазме на малых масштабах. Однако такие масштабы существенны лишь вблизи фронта проникающего в плазму излучения, где усиление еще не успевает реализоваться.

Используя решение кинетического уравнения (2) для вычисления возмущения электрического тока в плазме на основе самосогласованного рассмотрения уравнений Максвелла, получаем следующее уравнение для электрического поля в плазме:

$$\frac{\partial^2 E(z, \omega)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{tr}(\omega) E(z, \omega) = 0, \quad (3)$$

где

$$\epsilon_{tr}(\omega) = 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{\omega_L^2}{n\omega} \int_0^{+\infty} \frac{v^3 dv}{\omega + i\nu(v)} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \quad (4)$$

— поперечная диэлектрическая проницаемость фотоионизированной плазмы, полученная без учета пространственной дисперсии (что оправдано для длинноволновых возмущений), c — скорость света, $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ —

ленгмюровская частота электронов, n — плотность электронов.

Уравнение (3) следует дополнить условиями непрерывности тангенциальных компонент полей в вакууме $e^{i\omega z/c} \mathbf{E}_i(\omega) + e^{-i\omega z/c} \mathbf{E}_r(\omega)$ и в плазме $\mathbf{E}(z, \omega)$, а также их производных по z при $z = 0$. Здесь $E_{i(r)}(\omega) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} E_{i(r)}(t)$ — изображения Лапласа падающего (отраженного) электрических полей на границе плазмы при $z = 0$. Решая с учетом этих граничных условий однородное дифференциальное уравнение (3) и выполняя обратное преобразование Лапласа, получаем следующее выражение для отраженного от плазмы поля:

$$E_r \left(t + \frac{z}{c} \right) = -E_i \left(t + \frac{z}{c} \right) \\ + \int_{-\infty+i\Delta}^{+\infty+i\Delta} \frac{d\omega}{\pi} \frac{\omega}{\omega + ik(\omega)c} E_i(\omega) e^{-i\omega(t+\frac{z}{c})}, \quad z < 0. \quad (5)$$

В свою очередь, выражение для проникающего в плазму поля имеет вид

$$E(z, t) = \int_{-\infty+i\Delta}^{+\infty+i\Delta} \frac{d\omega}{\pi} \frac{\omega}{\omega + ik(\omega)c} E_i(\omega) e^{-i\omega t - k(\omega)z}, \quad z > 0. \quad (6)$$

Для входящей в выражения (5) и (6) величины

$$k(\omega) = \sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{tr}(\omega)} \quad (7)$$

при извлечении квадратного корня следует выбирать ветвь $\text{Re}[k(\omega)] > 0$, которая обеспечивает затухание проникающего в плазму поля при $z \rightarrow +\infty$.

2. Апериодическая неустойчивость образованной в результате многофотонной ионизации плазмы

Образованная при многофотонной ионизации плазма неустойчива относительно развития апериодической электромагнитной неустойчивости. Базируясь на результатах работы [27], приведем основные сведения об этой неустойчивой mode, необходимые для дальнейшего расчета структуры электромагнитного поля, взаимодействующего с рассматриваемой фотоионизированной плазмой. Возникновение этой неустойчивости обусловлено, во-первых, неравновесным пикообразным энергетическим распределением фотоэлектронов. Во-вторых, важную роль играет отвечающая эффекту Рамзауэра–Таунсенда [32–34] немонотонная зависимость эффективной частоты $v(v)$ упругих столкновений фотоэлектронов с нейтральными атомами инертных газов от скорости v фотоэлектронов, характеризующаяся ярко выраженным минимумом в области энергий $\sim 1 \text{ eV}$. Явный вид частоты $v(v) = Nv\sigma(v)$ учитывает зависимость транспортного сечения упругого рассеяния фотоэлектронов $\sigma(v)$

на нейтральных атомах с концентрацией N от скорости фотоэлектронов. В случае газа Хе такая зависимость σ установлена экспериментально в работах [36,37].

Следуя [27], ограничимся рассмотрением модели „холодной“ плазмы, когда распределение фотоэлектронов по скоростям аппроксимируется функцией вида $f_0(v) = (n/4\pi v_0^2) \delta(v - v_0)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, v_0 — скорость фотоэлектронов в энергетическом пике. Столь простая модель позволяет провести рассмотрение в аналитическом виде практически до конца. В этом случае поперечная диэлектрическая проницаемость (4) принимает алгебраический вид

$$\varepsilon_{tr}(\omega) = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu_0)} \left(1 - \frac{\beta}{3} \frac{i\nu_0}{\omega + i\nu_0} \right). \quad (8)$$

Здесь $\nu_0 \equiv \nu(v_0)$, а зависящая от скорости величина $\beta \equiv \beta(\nu_0) = d \ln[\nu(v)]/d \ln v|_{v=v_0}$ позволяет учесть определяющееся эффектом Рамзауэра–Таунсенда существенное влияние зависимости частоты столкновений фотоэлектронов от их скорости на свойства плазменных мод. Функция $\beta(v)$ явно получена и исследована в рамках предложенного в работе [27] подхода на основе детальных экспериментальных данных работы [37] в широком диапазоне отвечающих режиму многофотонной ионизации энергий фотоэлектронов, в котором, в частности, возможно развитие рассматриваемой апериодической неустойчивости. В этом интервале зависимость $\beta(v)$ носит резко немонотонный характер, продиктованный зависимостью $\sigma(v)$, что отличает наш подход от работ [22,38], в которых использована простая степенная интерполяция для моделирования $\sigma(v)$.

Приведем характерные значения эффективных частот столкновений фотоэлектронов с нейтральными атомами ν_0 и между собой $\nu_{ee} = 4\pi e^4 n \Lambda / m^2 v_0^3$, где $\Lambda = \ln[2\pi n v_0^3 / \omega_L^3]$ — кулоновский логарифм, определяющие границы временного интервала $\nu_0^{-1} < t \ll \nu_{ee}^{-1}$, на протяжении которого возможно существование слабо изменяющегося неравновесного изотропного распределения фотоэлектронов в форме ярко выраженногоmonoэнергетического пика, в частности, моделируемого δ -функцией. Именно в этом временном интервале возможно описываемое ниже усиление пробного излучения. Для реализованных в экспериментальной работе [7] условий, когда ионизация атомов Хе происходила при поглощении 11 фотонов излучения Nd:YAG-лазера, энергия фотоэлектронов равна $m v_0^2 / 2 = 0.72 \text{ eV}$. При этом сечение их рассеяния на нейтральных атомах составляет $\sigma = 0.4 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ и близко к своему наименьшему значению [37], минимизируя тем самым соответствующую частоту столкновений ν_0 . При давлении газа, близком к атмосферному, когда концентрация атомов $N \approx 2.5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, приняв степень ионизации, равной 10^{-6} , получаем следующие оценки: $\nu_0 \approx 0.5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$ и $\nu_{ee} \approx 1 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$. В этих условиях электронная ленгмюровская частота $\omega_L \approx 2.8 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$. В другом случае, при ионизации $K = 3$ фотонами излучения KrF-лазера атомов Хе энергия фотоэлектронов

заметно больше 2.87 eV [21] и сечение рассеяния возрастает $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$ [37], приводя к еще более заметному отличию указанных частот столкновений. Принимая в этом случае степень ионизации 10^{-5} , имеем оценки $v_0 \approx 3.8 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ и $v_{ee} \approx 1.5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$, $\omega_L \approx 8.9 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Тем самым для плазм с выбранными выше параметрами временной интервал существования неравновесного изотропного распределения фотоэлектронов в виде узкого моноэнергетического пика весьма широк.

Принимая пространственную структуру поля в плазме в виде e^{ikz} , где k — волновое число, из (3) можно получить дисперсионное уравнение для собственных мод рассматриваемой фотоионизованной плазмы. Детальное исследование законов дисперсии этих мод во всей области волновых чисел, их диссипативных свойств, а также влияния на них параметров плазмы, в частности, энергии и плотности фотоэлектронов проведено в [27]. На рис. 1 в плоскости комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$, отнесенной к ω_L , сплошная красная линия иллюстрирует общие свойства комплексной частоты аperiодически неустойчивой моды на примере плазмы Xe атмосферной плотности, образованной при поглощении атомами трех фотонов излучения KrF-лазера, когда энергия фотоэлектронов равна 2.87 eV, а степень ионизации составляет 10^{-5} . Вдоль этой кривой волновое число меняется от $-\infty$ слева при $\omega' \rightarrow -\infty$ до $+\infty$ справа при $\omega' \rightarrow +\infty$. В интервале сравнительно небольших волновых чисел $0.05\omega_L/c \leq |k| \leq 1.86\omega_L/c$ указанная мода является неустойчивой электромагнитной волной, вещественная частота которой уменьшается по мере уменьшения $|k|$. В области совсем малых волновых чисел (длинноволновый предел) мода становится аperiодически неустойчивой (вертикальный участок кривой вдоль минимумы оси на рис. 1). Максимальное значение инкремента этой моды $\omega'' = \gamma_m < \omega_L$ достигается при $k = 0$ и может быть определено из кубического уравнения

$$\varepsilon_{tr}(i\gamma_m) = 0. \quad (9)$$

Следуя [27], запишем точное аналитическое решение этого уравнения

$$\gamma_m = \omega_L \cdot \Gamma \left(\frac{v_0}{\omega_L}, \beta \right), \quad (10)$$

где функция

$$\Gamma(\xi, \beta) = a(\xi, \beta) + b(\xi, \beta), \quad (11)$$

$$a(\xi, \beta) = \left(\frac{\xi^3}{27} + \xi \frac{\beta - 1}{6} + \frac{1}{3} \sqrt{\xi^4 \frac{\beta}{9} + \xi^2 \left[\left(\frac{\beta - 1}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \right]} + \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$b(\xi, \beta) = \frac{\xi^2 - 3}{9a(\xi, \beta)}.$$

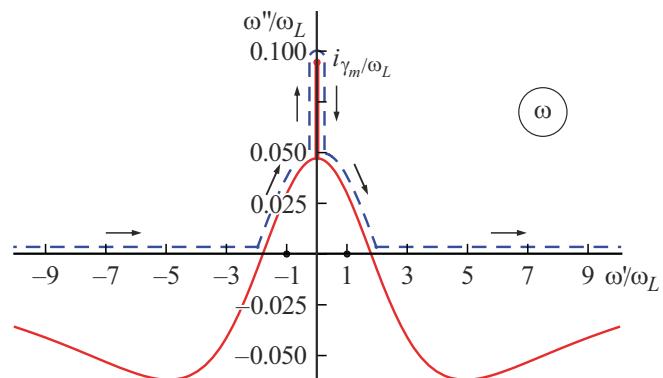


Рис. 1. Частота собственной аperiодически неустойчивой моды fotoионизированной плазмы (сплошная красная линия) в плоскости комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$, отнесенными к электронной плазменной частоте ω_L . Кривая построена для плазмы газа Xe с плотностью нейтральных атомов $N \approx 2.5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, образованной при поглощении атомами трех фотонов излучения KrF-лазера, когда энергия фотоэлектронов равна 2.87 eV, а степень ионизации составляет 10^{-5} . Штриховая синяя линия изображает трансформированный путь интегрирования в выражениях (5), (6).

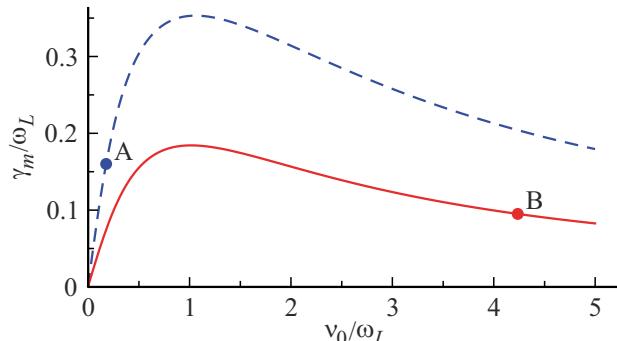


Рис. 2. Зависимость безразмерного максимального инкремента аperiодической неустойчивости γ_m/ω_L от безразмерной частоты столкновений v_0/ω_L для плазм Xe с энергией фотоэлектронов: 0.72 eV (штриховая кривая) и 2.87 eV (сплошная кривая). Нанесенные на кривые точки отвечают рассмотренным в разд. 2 двум различным fotoионизованным плазмам с плотностью нейтральных атомов $N \approx 2.5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ и степенью ионизации 10^{-6} (**A**) и 10^{-5} (**B**) соответственно.

На рис. 2 представлен график функции (11), описывающий зависимость безразмерного максимального инкремента аperiодической неустойчивости γ_m/ω_L от безразмерной частоты столкновений v_0/ω_L для двух различных fotoионизованных плазм Xe, рассмотренных нами в разд. 2. Штриховая кривая отвечает плазме с энергией фотоэлектронов 0.72 eV, сплошная кривая — соответственно случаю $mv_0^2/2 = 2.87 \text{ eV}$. Рис. 2 демонстрирует, что функция (10) имеет нерезкий максимум для частот столкновений, близких к электронной ленгмюровской частоте. Ассимптотическое поведение γ_m , согласно (10), (11) в слабо- и сильностолкновительных

пределах описывается простыми выражениями

$$\gamma_m \approx \left(\frac{\beta}{3} - 1\right) \cdot \begin{cases} \nu_0, & \nu_0 \ll \omega_L, \\ \omega_L^2/\nu_0, & \nu_0 \gg \omega_L. \end{cases} \quad (12)$$

Тем самым апериодическая неустойчивость возможна при выполнении неравенства $\beta/3 > 1$, которое реализуется в рассмотренной плазме Xe в сравнительно широком интервале энергий фотоэлектронов $0.65 \text{ eV} < m\nu_0^2/2 < 4.1 \text{ eV}$ [27]. Максимальное значение $\beta/3 - 1 \approx 1.9$ достигается для энергии 0.95 eV . Для описанных в работе [7] условий, когда $m\nu_0^2/2 = 0.72 \text{ eV}$ значение коэффициента $\beta/3 - 1 \approx 1.0$ [27]. Для выбранных выше значений атмосферной плотности газа и степени его ионизации 10^{-6} в этом случае получаем $\nu_0/\omega_L \approx 0.18$, а относительный максимальный инкремент $\gamma_m/\omega_L = 0.16$, что отвечает „слабостолкновительному“, пределу (верхняя строка в (12)). На рис. 2 этому случаю соответствует точка **A**. Абсолютное значение инкремента апериодической неустойчивости составляет $\gamma_m = 0.45 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \approx \nu_0$. В плазме, образованной при ионизации тремя фотонами излучения [21], в которой фотоэлектроны имеют энергию 2.87 eV , коэффициент $\beta/3 - 1 \approx 0.5$ [27]. В такой плазме, образованной из газа атмосферной плотности при степени ионизации 10^{-5} , реализуется „сильностолкновительный“ предел (нижняя строка в (12)) $\nu_0/\omega_L \approx 4.2$, а относительный максимальный инкремент $\gamma_m/\omega_L = 0.095$ (точка **B** на рис. 2). Однако абсолютное значение инкремента в этом случае оказывается больше по сравнению с предыдущим случаем $\gamma_m = 0.85 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$. Отметим, что, согласно [27], максимальный инкремент в плазме Xe может составлять $\gamma_m \approx 0.56\omega_L$ при $m\nu_0^2/2 \approx 0.89 \text{ eV}$ и $\nu_0 \approx 1.15\omega_L$. Таким образом, характерные значения наибольшего значения инкремента апериодической неустойчивости γ_m рассматриваемых фотоионизованных плазм оказываются сравнимы с электронной ленгмюровской частотой (не превосходя ее) и соответствуют терагерцовому диапазону частот.

В малой окрестности волнового числа $k = 0$ частота рассматриваемой апериодически неустойчивой собственной моды является чисто мнимой и может быть представлена в виде

$$\omega'' = \gamma_m - \frac{k^2 c^2}{\alpha^2 \gamma_m}, \quad (13)$$

где с учетом уравнения (9)

$$\alpha^2 = \omega \frac{\partial \epsilon_{tr}(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=i\gamma_m} \equiv \frac{(2\gamma_m + \nu_0)^2 + \omega_L^2 - \gamma_m^2}{(\gamma_m + \nu_0)^2} > 0. \quad (14)$$

Численные значения коэффициента α (14) для двух различных случаев фотоионизованной плазмы, описанных в начале разд. 2, составляют 8.4 и 1.05 соответственно. Аналитические выражения (10), (11) для максимального инкремента апериодически неустойчивой

моды γ_m и выражения (13), (14) для разложения инкремента вблизи γ_m будут использованы в следующем разделе при описании нарастающего во времени отклика фотоионизованной плазмы на воздействие падающего излучения (1).

3. Усиление поля падающей волны

В разд. 3 найдем отклик предварительно созданной в режиме многофотонной ионизации плазмы на воздействие внешнего электромагнитного импульса (1). Используя полученные в разд. 1 интегральные выражения для поля отраженной волны (5) и проникающего в плазму поля (6), установим формирующуюся пространственно-временную структуру излучения. Выражения (5), (6) позволяют рассматривать воздействие на плазму импульсов различной формы. Ниже рассмотрим поле падающей монохроматической волны вида

$$E_i(t - z/c) = E_L \cdot \sin [\omega_0(t - z/c)], \quad (15)$$

где E_L — амплитуда, ω_0 — частота пробного излучения, а образ Лапласа такого поля имеет вид $E_i(\omega) = E_L \cdot \omega_0 / (\omega_0^2 - \omega^2)$. Будем опираться на полученные в [27] результаты, как аналитических, так и численных расчетов закона дисперсии описанной в предыдущем разделе неустойчивой моды. Деформируем стандартный путь интегрирования (5), (6) в путь, огибающий кривую частоты рассматриваемой моды в плоскости комплексной переменной $\omega = \omega' + i\omega''$ и изображенный на рис. 1 штриховой линией. Тогда выражения для полей в вакууме и плазме можно разбить на сумму двух вкладов

$$E_r(t + z/c) = E_r^{(\omega)}(t + z/c) + E_r^{(\gamma)}(t + z/c), \quad z < 0, \\ E(z, t) = E^{(\omega)}(z, t) + E^{(\gamma)}(z, t), \quad z > 0. \quad (16)$$

Вклады с индексом (ω) формируются при интегрировании по участкам контура вдоль вещественной оси при $\omega'' = 0$ и описывают нарастающие во времени гармонические поля с частотой близкой к частоте падающей волны ω_0 . Напротив, слагаемые с индексом (γ) отвечают участкам контура интегрирования, лежащим выше вещественной оси $\omega'' > 0$. Именно эти вклады описывают нарастающие во времени поля, связанные с развитием в плазме апериодической неустойчивости. Очевидно, что основной вклад в интегралы (5), (6), определяющие нарастающий во времени отклик плазмы, дают значения переменной интегрирования вдоль положительного участка мнимой оси вблизи максимального значения инкремента γ_m . Опираясь на применимое в малой окрестности $\omega = i\omega'' \approx i\gamma_m$ разложение (13), можно записать следующее приближенное выражение для функции (7):

$$k(i\omega'') \approx \mp i\alpha \frac{\gamma_m}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega''}{\gamma_m}},$$

$$0 < \gamma_m - \omega'' \ll \gamma_m, \quad (17)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют левому и правому вертикальным участкам контура интегрирования вдоль мнимой оси. Тогда на больших временах $t \gg \gamma_m^{-1}$, используя метод перевала [41], выражения (5), (6) позволяют получить следующие асимптотические выражения для нарастающих во времени частей поля отраженной волны

$$E_r^{(y)}\left(t + \frac{z}{c}\right) \approx -\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \gamma_m E_i(i\gamma_m) \frac{e^{\gamma_m(t+z/c)}}{[\gamma_m(t+z/c)]^{3/2}}, \quad z < 0. \quad (18)$$

и проникающего в плазму поля, как вблизи ее границы, так и убывающего в глубину

$$E^{(y)}(z, t) \approx -\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \gamma_m E_i(i\gamma_m) \times \begin{cases} \left(1 + \frac{\gamma_m z}{c}\right) \frac{e^{\gamma_m t}}{(\gamma_m t)^{3/2}}, & 0 < z \ll \frac{2}{\alpha} c \sqrt{\frac{t}{\gamma_m}}, \\ \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{ct}{z}\right)^{-1} \frac{e^{\gamma_m(t - \frac{\alpha^2}{c^2} \frac{z^2}{\gamma_m})}}{\sqrt{\gamma_m t}}, & \frac{2}{\alpha} c \sqrt{\frac{t}{\gamma_m}} \ll z < ct. \end{cases} \quad (19)$$

В случае явного вида (15) падающего поля комбинация $\gamma_m E_i(i\gamma_m) = E_L \gamma_m \omega_0 / (\gamma_m^2 + \omega_0^2)$. Из этого следует, что наиболее эффективно будет усиливаться излучение с частотой, близкой к максимальному инкременту апериодически нестационарной моды фотоионизованной плазмы $\omega_0 \sim \gamma_m$. Выражения (18), (19) демонстрируют тот факт, что нарастание во времени наиболее эффективно усиливающегося отклика неравновесной плазмы определяется максимальным инкрементом развивающейся в плазме апериодической нестационарности γ_m , тогда как амплитуда задается также напряженностью и частотой внешнего излучения.

На рис. 3 для различных моментов времени, отвечающих значениям произведения $\gamma_m t = 2.5$ — (рис. 3, a), 5 — (рис. 3, b), 7.5 — (рис. 3, c) и 10 — (рис. 3, d) соответственно, представлена пространственная структура электрического поля $E(z, t)$ в плазме $z > 0$ и полного поля $E_i(t - z/c) + E_r(t + z/c)$ перед ней $z < 0$, отнесенных к амплитуде падающей волны E_L , в зависимости от безразмерной координаты $\omega_L z / c$. Параметры плазмы выбраны такими же, как и на рис. 1. Частота излучения принята $\omega_0 \approx 0.12 \omega_L \approx 1.1 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$ и, согласно с приведенными в предыдущем разделе оценками, соответствует нижней части THz-диапазона частот. При этом $\omega_0 \approx 1.26 \gamma_m$, что близко к оптимальным условиям усиления по амплитуде. Рис. 3 демонстрирует, что поле проникает в плазму на глубину $z < ct$ и отражается от нее, экспоненциально быстро нарастаая с течением времени. Усиление напряженности плазменного отклика может достигать нескольких порядков по сравнению с амплитудой падающей волны. На вставке к рис. 3, c отдельно друг от друга изображены поля падающей на плазму волны $E_i(t - z/c)$ (сплошная красная линия) и нарастающей во времени отраженной волны

$E_r(t + z/c)$ (штриховая синяя линия). Напомним, что в использованном нами в кинетическом уравнении (2) длинноволновом приближении, не учитывающем пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости плазмы (4), описание полей (15) вблизи фронтов их распространения при $z \approx \pm ct$ не точно. Однако это не существенно при описании нарастающей во времени части отклика плазмы. Для фотоионизированной плазмы с параметрами, использованными при построении рис. 3 реализуются условия нормального скин-эффекта, в которых глубина скин-слоя определяется выражением [35] $\delta = (c/\omega_L) \sqrt{2v_0/(\beta/3 - 1)|\omega|}$. В условиях неустойчивости $|\omega| = \gamma_m$ и для рассматриваемой плазмы применима нижняя строка предельного выражения (12). Тогда $\delta = \sqrt{2}(\beta/3 - 1)^{-1}(c v_0/\omega_L^2) = \sqrt{2} c / \gamma_m \approx 0.5 \text{ см}$. Как демонстрируют эти рисунки максимальный рост напряженности усиливающегося поля внутри плазмы реализуется на пространственных масштабах порядка нескольких глубин скин-слоя и определяется значениями порядка сантиметра. Отметим, что наше сравнительно простое аналитическое рассмотрение проведено в линейном приближении как по амплитуде поля (1), так и на линейной стадии развития апериодической нестационарности. Поэтому полученные количественные результаты применимы на временах, меньших времени изменения исходного неравновесного распределения фотоэлектронов и времени нелинейного насыщения нестационарности, что легко реализуется для пробных полей небольшой по сравнению с ионизующим излучением интенсивности.

В заключение разд. 3 уделим внимание обоснованию целесообразности применения использованной нами модели однородного плазменного полупространства со скачкообразным изменением плотности электронов на границе при изучении особенностей взаимодействия пробного излучения с фотоионизированной газовой плазмой. Такая плазма формируется под ионизующим воздействием интенсивного лазерного импульса длительностью несколько десятков фемтосекунд и локализована в области фокусировки импульса, а плотность фотоэлектронов убывает от центра фокусировки к периферии, что требует обсуждения используемого приближения. Работа [35] посвящена рассмотрению влияния пространственного масштаба размытия границ плазмы на режимы воздействия на нее пробного электромагнитного излучения, в частности, установлению условий применимости предположения о скачкообразном изменении плотности фотоэлектронов. В [35] показано, что если толщина пограничного слоя переменной плотности меньше глубины скин-слоя, то учет размытия границы плазмы не приводит к заметным поправкам по сравнению с моделью резкой границы. Для фотоионизированной плазмы, описанной в [21], с параметрами, использованными при построении рис. 1–3, реализуются условия нормального скин-эффекта, в которых глубина скин-слоя $\delta \approx 0.5 \text{ см}$. Типичные размеры фокального пятна современных фемтосекундных лазеров могут составлять от нескольких единиц до нескольких сотен микрометров,

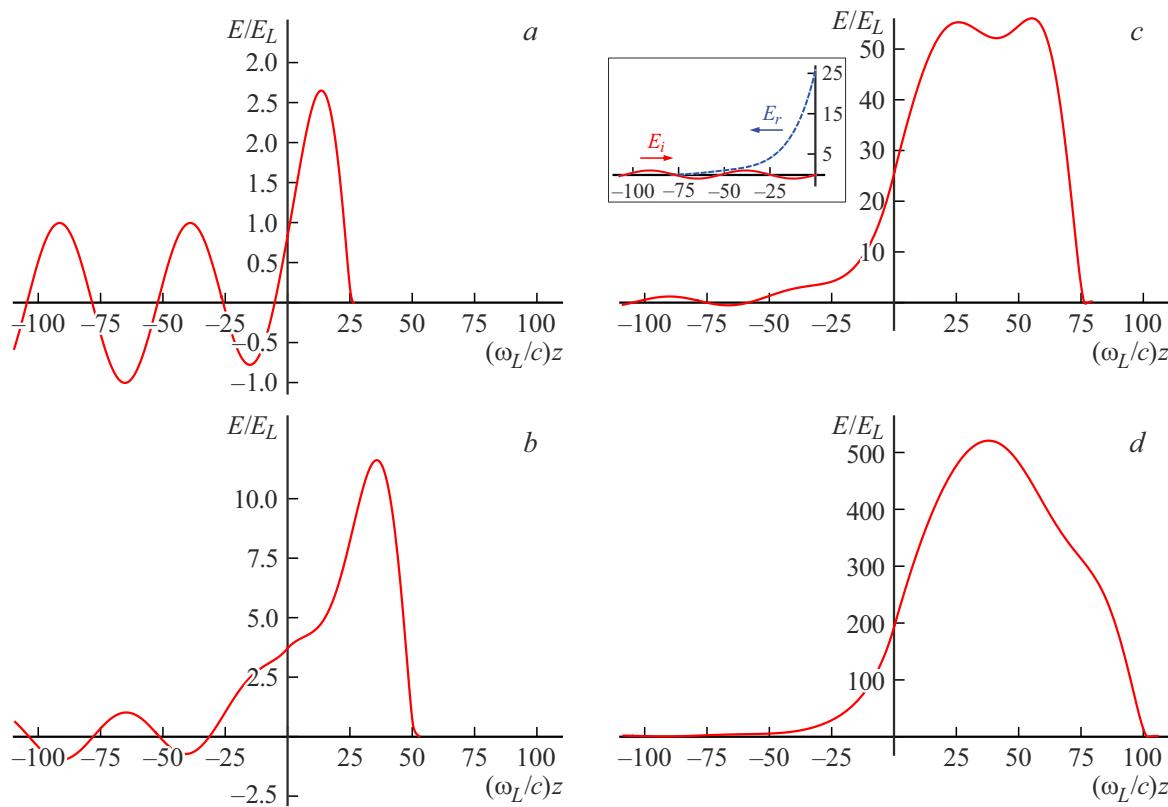


Рис. 3. Пространственная структура напряженности электрического поля $E(z, t)$ в плазме $z > 0$ и напряженности полного поля $E_i(t - z/c) + E_r(t + z/c)$ перед ней $z < 0$, отнесенные к амплитуде падающей волны E_L , как функция безразмерной координаты $\omega_L z/c$. Кривые построены в различные моменты времени, когда значение произведения $\gamma_m t = 2.5$ — (a), 5 — (b), 7.5 — (c) и 10 — (d). Вставка к рисунку (c) иллюстрирует отдельно друг от друга поля падающей на плазму волны $E_i(t - z/c)$ (сплошная красная линия) и нарастающей во времени отраженной волны $E_r(t + z/c)$ (штриховая синяя линия). Параметры плазмы выбраны те же, что и на рис. 1. Частота излучения принята $\omega_0 \approx 0.12 \omega_L$.

и при воздействии таких лазеров на газы с плотностью, близкой к атмосферной, формируется лазерная плазма, нарастание плотности электронов на границе которой реализуется на масштабах микрометров, что значительно меньше δ , обеспечивая возможность применения модели резкой плазмы, обоснованной в [35]. Отметим, что размытие границы из-за разлета плазмы в условиях электронейтральности определяется холодными ионами и происходит со скоростью, сравнимой с ионно-звуковой скоростью $\sim \sqrt{m/M} v_0$ (M — масса иона), и на временном интервале существования неравновесного узкопикового энергетического распределения фотоэлектронов не превосходит нескольких электронных дебавских радиусов [42] $v_0/\omega_L \approx 3.3 \cdot 10^{-3} c/\omega_L \approx 10^{-4}$ см и также не является препятствием для использования модели резкой границы плазмы на временах существования неравновесного распределения фотоэлектронов. Размеры формирующейся плазменной области вдоль направления распространения ионизующего лазерного импульса в газе составляют несколько десятков сантиметров [20,22,25], тогда как эффективная пространственная зона усиления пробного THz-излучения для рассмотренной в разд. 3 плазмы сосредоточена в значи-

тельно меньшей области размерами порядка нескольких глубин скин-слоя, т.е. порядка сантиметра. Одним из основных преимуществ выбранной нами простой одномерной модели описания плазмы, которая не учитывает поперечных размеров плазменной области, является возможность получения конечного аналитического результата. Такой подход оправдан установленной при рассмотрении доминирующей ролью длинноволновых собственных неустойчивых апериодических мод в усилении излучения. Последовательный учет поперечных размеров плазмы и их влияние на эффективность усиления излучения являются целью нашего дальнейшего рассмотрения.

Заключение

В линейном приближении рассмотрен отклик на воздействие внешнего электромагнитного импульса неравновесной столкновительной слабоионизованной полуограниченной плазмы, предварительно образованной в результате многофотонной ионизации атомов инертного газа коротким импульсом лазерного излучения. Рас-

смотрение проведено на основе согласованного кинетического описания динамики фотоэлектронов и уравнений Максвелла для полей при помощи преобразования Лапласа по времени, позволяющего последовательно описать развитие неустойчивости в полуограниченной плазме в рамках начальной задачи. Получены общие интегральные выражения для полей, допускающие различную форму воздействующего на плазму импульса и дающие возможность детально описать пространственную структуру излучения во всем пространстве и его временную эволюцию на линейной стадии развития неустойчивости. Из-за неравновесности энергетического распределения фотоэлектронов и особенностей их рассеяния на нейтральных атомах, связанных с эффектом Рамзауэра–Таунсенда, в такой плазме возможно развитие апериодической электромагнитной неустойчивости. Показано, что в результате взаимодействия с такой неустойчивой плазмой гармонической плоской волны наряду с откликом на частоте внешнего поля доминирует ангармоническое усиление во времени как проникающего в плазму, так и отраженного от нее полей в широкой полосе частот сосредоточенных вблизи максимального значения инкремента апериодической неустойчивости фотоионизированной плазмы. При этом характерные значения коэффициента усиления могут достигать нескольких порядков. Для плотностей ионизованного газа близких к атмосферной плотности характерное значение инкремента попадает в THz-диапазон. Это указывает на новую возможность использования рассмотренного выше механизма отклика фотоионизированной плазмы для усиления или генерации электромагнитного излучения, в частности, в терагерцовом диапазоне частот.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] N.B. Delone, V.P. Krainov. JOSA B, **8**, 1207 (1991). DOI: 10.1364/JOSAB.8.001207
- [2] S.J. McNaught, J.P. Knauer, D.D. Meyerhofer. Phys. Rev. Lett., **78**, 626 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.626
- [3] W.P. Leemans, C.E. Clayton, W.B. Mori, K.A. Marsh, P.K. Kaw, A. Dyson, C. Joshi, J.M. Wallace. Phys. Rev. A, **46**, 1091 (1992). DOI: 10.1103/PhysRevA.46.1091
- [4] В.Д. Мур, С.В. Попруженко, В.С. Попов. ЖЭТФ, **119**, 893 (2001). [V.D. Mur, S.V. Popruzhenko, V.S. Popov. JETP, **92**, 777 (2001). DOI: 10.1134/1.1378169]
- [5] C.K. Huang, C.J. Zhang, K.A. Marsh, C.E. Clayton, C. Joshi. Plasma Phys. Control. Fusion, **62**, 024011 (2020). DOI: 10.1088/1361-6587/ab61df
- [6] P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, G. Petite, N.K. Rahman. Phys. Rev. Lett., **47**, 1127 (1979). DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.1127
- [7] G. Petite, P. Agostini, F. Yergeau. JOSA B, **4**, 765 (1987).
- [8] H.G. Muller, H.B. van Linden van den Heuvell, P. Agostini, G. Petite, A. Antonetti, M. Franco, A. Migus. Phys. Rev. Lett., **60**, 565 (1988). DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.565
- [9] F. Fabre, P. Agostini, G. Petite, M. Clement. J. Phys. B: Atom. Mol. Phys., **14**, L677 (1981). DOI: 10.1088/0022-3700/14/21/007
- [10] Y. Gontier, N.K. Rahman, M. Trahin. EPL, **5**, 595 (1988). DOI: 10.1209/0295-5075/5/7/004
- [11] T. Marchenko, H.G. Muller, K.J. Schafer, M.J.J. Vrakking. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **43**, 185001 (2010). DOI: 10.1088/0953-4075/43/18/185001
- [12] M. Li, Y. Liu, H. Liu, Y. Yang, J. Yuan, X. Liu, Y. Deng, C. Wu, Q. Gong. Phys. Rev. A, **85**, 013414 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.013414
- [13] L. Zhang, Z. Miao, W. Zheng, X. Zhong, C. Wu. Chem. Phys., **523**, 52 (2019). DOI: /10.1016/j.chemphys.2019.04.005
- [14] А.В. Тимофеев. Физика плазмы, **38**, 87 (2012). [A.V. Timofeev. Plasma Phys. Rep., **38**, 79 (2012). DOI: 10.1134/S1063780X11120099]
- [15] К.Ю. Вагин, С.А. Урюпин. ЖЭТФ, **138**, 757 (2010). [K.Y. Vagin, S.A. Uryupin. JETP, **111**, 670 (2010). DOI: 10.1134/S1063776110100195]
- [16] К.Ю. Вагин, С.А. Урюпин. Физика плазмы, **39**, 759 (2013). [K.Y. Vagin, S.A. Uryupin. Plasma Phys. Rep., **39**, 674 (2013). DOI: 10.1134/S1063780X13080060]
- [17] К.Ю. Вагин, С.А. Урюпин. Физика плазмы, **40**, 468 (2014). [K.Y. Vagin, S.A. Uryupin. Plasma Phys. Rep., **40**, 393 (2014). DOI: 10.1134/S1063780X14040096]
- [18] К.Ю. Вагин, С.А. Урюпин. Физика плазмы, **41**, 808 (2015). [K.Y. Vagin, S.A. Uryupin. Plasma Phys. Rep., **41**, 744 (2015). DOI: 10.1134/S1063780X15080103]
- [19] Z. Donko, N. Dyatko. Eur. Phys. J. D, **70**, 135 (2016). DOI: /10.1140/epjd/e2016-60726-4
- [20] A.V. Bogatskaya, N.E. Gnedovskaya, E.A. Volkova, A.M. Popov. Plasma Sources Sci. Technol., **29**, 105016 (2020). DOI: 10.1088/1361-6595/aba110
- [21] А.В. Богацкая, А.М. Попов. Письма в ЖЭТФ, **97**, 453 (2013). [A.V. Bogatskaya, A.M. Popov. JETP Lett., **97**, 388 (2013). DOI: 10.1134/S0021364013070035]
- [22] A.V. Bogatskaya, A.M. Popov. Laser Phys. Lett., **16** (6), 066008 (2019). DOI: 10.1088/1612-202X/ab183d
- [23] K.Yu. Vagin, S.A. Uryupin. Plasma Sources Sci. Technol., **29**, 035005 (2020). DOI: 10.1088/1361-6595/ab5e28
- [24] K.Yu. Vagin, S.A. Uryupin. Phys. Plasmas, **27**, 112110 (2020). DOI: 10.1063/5.0023518
- [25] A.V. Bogatskaya, E.A. Volkova, A.M. Popov. Phys. Rev. E, **104**, 025202 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevE.104.025202
- [26] A.V. Bogatskaya, E.A. Volkova, A.M. Popov. J. Opt. Society America B, **39** (1), 299 (2022). DOI: 10.1134/JOSAB.435710.
- [27] К.Ю. Вагин, С.А. Урюпин. Физика плазмы, **49** (9), 903 (2023). [K.Y. Vagin, S.A. Uryupin. Plasma Phys. Reports, **49** (9), 1104 (2023). DOI: 10.1134/S1063780X23600998]
- [28] V.A. Kostin, I.D. Laryushin, A.A. Silaev, and N.V. Vvedenskii. Phys. Rev. Lett., **117** (3), 035003 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.035003
- [29] A.A. Silaev, A.A. Romanov, N.V. Vvedenskii. Opt. Lett., **45** (16), 4527 (2020). DOI.org/10.1364/OL.394979
- [30] M. Gao, X. Xu, J. Lou, R. Wang, Z. Zhang, Z. Wen, C. Chang, Y. Huang. Phys. Rev. Res., **5** (2), 023091 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevResearch.5.023091

- [31] H.A. Lorentz. Arch. Neerl. **10**, 336 (1905). (see also *Lorentz H.A. Collected Papers* (Martinus Nijhoff, The Hague, 1936), Vol. III.)
- [32] J.S. Townsend, V.A. Bailey. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, **42**, 873 (1921).
- [33] C. Ramsauer. Annalen der Physik, **369**, 513 (1921).
- [34] R.B. Brode. Reviews of Modern Physics, **5**, 257 (1933).
- [35] K.Y. Vagin, T.V. Mamontova, S.A. Uryupin. Phys. Rev. E, **104** (4), 045203 (2021). DOI:10.1103/PhysRevE.104.045203
- [36] M. Hayashi. J. Phys. D: Appl. Phys., **16**, 581 (1983). DOI: 10.1088/0022-3727/16/4/018
- [37] M. Hayashi. *Bibliography of electron and photon cross sections with atoms and molecules published in the 20th century* (Xenon: Tech. Rep.: National Inst. for Fusion Science 2003.)
- [38] A.V. Bogatskaya, H. Bin, A.M. Popov, I.V. Smetanin. Phys. Plasmas, **23** (9), 023091 (2016).
- [39] А.Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей. Т.1: Неустойчивости однородной плазмы* (Атомиздат, М., 1970), 294 с.
- [40] Б.М. Смирнов. *Физика слабоионизованного газа: В задачах с решениями* (Наука, М., 1985), 424 с. [B.M. Smirnov. *Physics of ionized gases* (John Wiley & Sons, NY, 2001)]
- [41] Ф. Олвер. *Введение в асимптотические методы и специальные функции* (Наука, М., 1978), 375 с. [F.W.J. Olver. *Introduction to Asymptotics and Special Functions* (Academic Press, NY and London, 1974), 297 p.]
- [42] J.E. Allen, M. Perego. Phys. Plasmas, **21** (3), 045203 (2014). DOI: 10.1063/1.4870084