

03

Конвекция стратифицированной магнитной жидкости в модулированном магнитном поле

© П.Н. Казанцев, Б.Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия
e-mail: kazantsev@yandex.ru

Поступило в Редакцию 16 июля 2025 г.

В окончательной редакции 6 октября 2025 г.

Принято к публикации 19 октября 2025 г.

Проведено исследование конвективной устойчивости стратифицированной магнитофорезом и термодиффузией магнитной жидкости, помещенной в подогреваемую со стороны узкой грани ячейку Хеле–Шоу, под воздействием неоднородного магнитного поля с переменным вкладом. Получены характеристики параметрической неустойчивости, отраженные в графиках зависимости критических магнитных чисел Рэлея от амплитуды и обратной частоты внешней модуляции. Описаны типы возникающих течений, а также представлена их эволюция во времени.

Ключевые слова: магнитные жидкости, магнитофорез, термодиффузия, ячейка Хеле–Шоу, параметрический резонанс.

DOI: 10.61011/JTF.2026.02.62280.186-25

Введение

Магнитные жидкости (МЖ) — коллоидные растворы магнитных наночастиц в немагнитной среде-носителе [1–3]. При определенных условиях МЖ ведут себя как однородные по составу среды, намагниченность $M(T)$ которых зависит от температуры T . Под действием градиента магнитного поля (внешнего или наведенного) на более холодные элементы МЖ действует большая сила Кельвина $\mathbf{F}_k = M\nabla H$ (H — напряженность магнитного поля), втягивающая их в область сильного поля и вызывающая течение. Этому явлению, известному как термомагнитная конвекция, посвящена обширная литература [4–7].

Существует другой класс явлений, объяснить которые можно только считая МЖ неоднородной по составу, у которой объемная доля магнитных частиц $\varphi(\mathbf{r}, t)$ изменяется во времени и в пространстве. Увеличение неоднородности может быть вызвано благодаря различным механизмам транспорта магнитных наночастиц: магнитофорезу, термодиффузии [8–10]. С другой стороны, диффузия и конвективное перемешивание „сглаживает“ неоднородности. В этом случае возникновение конвекции может происходить колебательным образом: нейтральные колебания на пороге неустойчивости характеризуются некоторой собственной частотой ω_0 . В ходе эволюции формируются колебательные нелинейные режимы.

Поведение механических и, в частности, гидродинамических, систем обладающих собственной частотой колебаний в переменных внешних полях различной природы (вibrationных [11,12], тепловых, электрических [13,14],

магнитных [9]) демонстрирует явление параметрического резонанса [15,16].

Переменное воздействие позволяет управлять теплообменом с помощью переключения между режимами течения, обладающими различной интенсивностью и, следовательно, теплопереносом, а также полностью подавить конвекцию.

В настоящей работе представлены результаты воздействия переменного магнитного поля на пороги устойчивости, характер нарастающих возмущений и нелинейные режимы колебательной конвекции МЖ в ячейке Хеле–Шоу.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ячейку Хеле–Шоу [17]. Расстояние между широкими гранями ячейки ($2d$) много меньше ее высоты $h = 20d$, и длины $l = 40d$. Ячейка заполнена МЖ (коллоидной суспензией) с вязкостью η , температуропроводностью κ и магнитной восприимчивостью χ (рис. 1) и помещена во внешнее неоднородное постоянное магнитное поле, образованное двумя магнитами в форме колец (рис. 2, 3). Поскольку ячейка с МЖ расположена точно по середине между кольцевыми магнитами, и ее высота мала по сравнению с расстоянием между кольцами $2z_0 = 3.4R$, поле в ячейке характеризуется линейной зависимостью [9,18]:

$$\mathbf{H}_c = (0, 0, Gz), \quad G = 0.244K/R^3,$$

где $K = 4\pi M_r \mathcal{L}(R_2 - R_1)$ — параметр, зависящий от намагниченности M_r , толщины \mathcal{L} и внутреннего R_1 и внешнего R_2 радиусов колец магнита, $R = (R_2 + R_1)/2$ — средний радиус колец. Отметим,

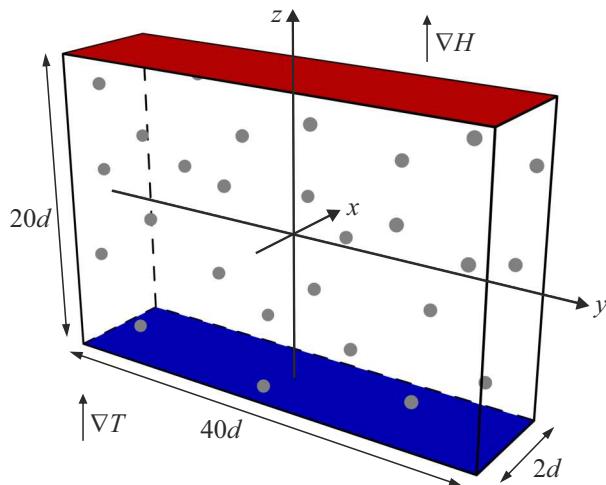


Рис. 1. Ячейка Хеле–Шоу.

что напряженность внешнего магнитного поля H_c — нечетная функция координаты z : ее проекция на ось z отрицательна при $-z < 0$ (рис. 2).

Кроме постоянного поля кольцевых магнитов H_c , на магнитную жидкость действует переменное магнитное поле H_a с амплитудой A и частотой ω_* , создаваемое катушками Гельмгольца, расположенными по обе стороны ячейки (рис. 2, 3):

$$\mathbf{H}_a = (0, 0, A \cos \omega_* t).$$

Перпендикулярные градиенту магнитного поля грани ячейки (рис. 1) поддерживаются при разных постоянных температурах, образующих разность ΔT , так, что в ячейке присутствует градиент температуры, сонаправленный с градиентом напряженности поля. Перпендикулярные оси x грани (широкие грани) — теплоизолированы. При этом поведение МЖ рассматривается в невесомости — сила тяжести отсутствует.

Система уравнений конвекции МЖ содержит уравнение Навье–Стокса с учетом магнитной силы Кельвина, уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости, уравнение теплопроводности, а также уравнение для эволюции объемной доли $\varphi(\mathbf{r}, t)$ магнитных частиц [4,9,19]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + M \nabla H, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \varphi \mathbf{u} - D (\nabla \varphi + S_T \nabla T), \quad 3\pi\eta a \mathbf{u} = \frac{m^2 H}{3k_B T_*} \nabla H, \quad (4)$$

где ρ — плотность жидкости, \mathbf{v} — скорость, p — давление, η — коэффициент сдвиговой вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, T — температура, j —

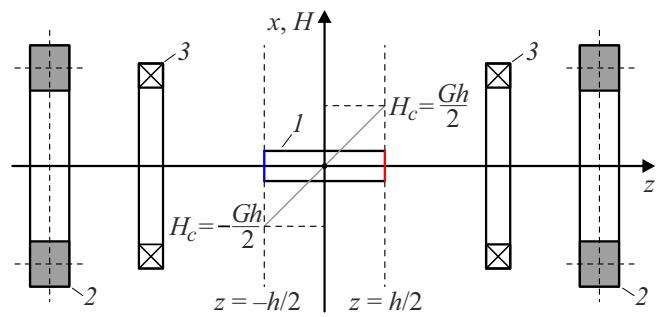


Рис. 2. Положение ячейки Хеле–Шоу (1) относительно кольцевых магнитов (2) и катушек Гельмгольца (3).

плотность потока магнитных частиц, $D = k_B T_* / 3\pi\eta a$ — коэффициент диффузии наночастиц диаметром a , k_B — постоянная Больцмана, S_T — коэффициент Соре, \mathbf{u} — скорость частиц относительно жидкости-носителя, вызванная магнитной силой, T_* — среднее значение температуры в состоянии механического равновесия, m — магнитный момент коллоидной частицы.

Ввиду сильной неоднородности внешнего магнитного поля, его отклонения внутри ячейки реальной МЖ от внешнего распределения $H = Gz + A \cos \omega_* t$ можно считать незначительными [9]. Таким образом, можно не включать уравнения Максвелла в систему (1)–(4).

На горизонтальных границах ячейки должны выполняться условия прилипания для скорости, постоянства температуры и непроницаемости для магнитных частиц:

$$z = h/2 : T = T_* + \Delta T/2, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{j} = 0,$$

$$z = -h/2 : T = T_* - \Delta T/2, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Намагниченность жидкости имеет ланжевеновский характер и, в силу малости величины магнитного поля внутри слоя [9], линейно зависит от напряженности:

$$M = \chi(\varphi, T) H, \quad \chi = \frac{\varphi M_s m}{3k_B T},$$

где M_s — намагниченность насыщения диспергированного ферромагнетика.

Если к ячейке приложена разница температур ΔT меньше критической, МЖ будет находиться в состоянии покоя ($\mathbf{v} = 0$). При механическом равновесии распределение температуры, согласно (2), имеет вид

$$T_0 = T_* + \frac{\Delta T}{h} z.$$

Находясь в таком состоянии длительное время, МЖ может быть стратифицирована под действием неоднородных температурного и магнитного полей. Таким образом, за счет подстановки $\mathbf{j} = 0$ в уравнение (4) получим равновесное распределение концентрации — параболический профиль, вызванный магнитофорезом [9],

который смещается по вертикали за счет действия термодиффузии [10]:

$$\varphi_0 = \left(1 + \frac{\gamma^2 (12(z/h)^2 - 1)}{72} \right) \bar{\varphi} - S_T \Delta T \frac{z}{h},$$

$$\gamma = \frac{mGh}{k_B T}, \quad (5)$$

где $\bar{\varphi}$ — среднее значение концентрации магнитных частиц.

Поскольку магнитофорез действует только в неоднородном магнитном поле, создаваемая кольцевыми магнитами переменная во времени добавка не окажет влияние на перераспределение магнитных частиц. С другой стороны, эта составляющая магнитного поля является источником параметрического воздействия на МЖ.

Отметим, что выражение (5) получено для случая $\gamma^2 \ll 1$, соответствующем экспериментальным ситуациям (например, $\gamma^2 = 0.25$ [9]).

2. Плоские течения в ячейке Хеле–Шоу

В приближении плоских траекторий ($v_x = 0$) [20], справедливом в случае, когда ширина и длина ячейки гораздо больше зазора между широкими гранями ($l \gg 2d, h \gg 2d$), удобно ввести функцию тока

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

и завихренность

$$\Phi = [\text{rot } \mathbf{v}]_x.$$

Решение системы запишем в виде

$$\mathbf{v} = \left[0, -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$T = T_0(z) + T'(t, y, z),$$

$$\varphi = \varphi_0(z) + \varphi'(t, y, z),$$

как и в случае задачи о тепловой конвекции коллоидной суспензии в ячейке Хеле–Шоу в постоянном поле [10].

Независимость функций для температуры и концентрации от поперечной координаты x соответствует случаю теплоизолированных широких граней, на которых отсутствует поток магнитных наночастиц.

Выберем следующие единицы измерения: расстояния — полутолщину ячейки d , времени — $\frac{d^2}{\kappa}$, скорости — $\frac{\kappa}{d}$, температуры — $T_* \frac{\eta \kappa}{\chi_* G^2 d^4}$, концентрации — $\varphi \frac{\eta \kappa}{\chi_* G^2 d^4}$.

После осреднения уравнений (1)–(3) поперек ячейки безразмерная система уравнений относительно функции тока Ψ и отклонений температуры $T' = T - T_0$ и

концентрации $\varphi' = \varphi - \varphi_0$ от их равновесных значений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{8}{3\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] &= Pr \left[\Delta_{\perp} \Phi - \frac{\pi^2}{4} \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{\pi} (z + \xi \cos \omega t) \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{\partial T'}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T'}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial y} \right] &= \Delta_{\perp} T' - \frac{2}{\pi} R_m \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \Phi &= \Delta_{\perp} \Psi, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right] = Le \left[\Delta_{\perp} \varphi' + \psi \Delta_{\perp} T' \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma^2}{3} \left(z \frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \varphi' \right) \right] - \frac{2}{\pi} (R_c z - R_m \psi) \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а также используются безразмерные параметры $Pr = \eta/\rho\kappa$ — число Прандтля, $\xi = A/Gd$ и $\omega = \omega_* d^2/\kappa$ — безразмерные амплитуда и частота модуляции внешнего магнитного поля, $R_m = \frac{\Delta T}{T_*} \frac{\chi_* G^2 d^4}{\kappa \eta}$ — магнитное число Рэлея, $R_c = \frac{\gamma^2}{3} \frac{\chi_* G^2 d^4}{\kappa \eta}$ — концентрационное число Рэлея, $\chi_* = \frac{\bar{\varphi} M_s m}{3 k_B T_*}$ — магнитная восприимчивость при средних равновесных температуре и концентрации, $Le = D/\kappa$ — число Льюиса, $\psi = S_T T_*/\bar{\varphi}$ — коэффициент разделения смеси, характеризующий термодиффузионное разделение.

В состоянии механического равновесия градиенты температуры и концентрации имеют вид:

$$\frac{dT_0}{dz} = R_m, \quad \frac{d\varphi_0}{dz} = R_c z - R_m \psi.$$

Безразмерные параметры R_c и ψ характеризуют начальную степень неоднородности МЖ, вызванную магнито- и термофорезом соответственно.

На границах ячейки должны выполняться следующие условия:

$$y = \pm 20 : \quad \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad (7)$$

$$z = \pm 10 : \quad \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = T' = \varphi' = 0. \quad (8)$$

3. Процедура Галеркина

Для исследования эволюции течений МЖ под действием переменного поля воспользуемся методом Галеркина [20,21]. Будем искать приближенное решение

задачи в виде суперпозиции базисных функций (пространственных гармоник), удовлетворяющих граничным условиям (7), (8):

$$\Psi = \sum_{n,m=1}^{n_{\max}, m_{\max}} \Psi_{nm}(t) \text{CS}\left(\frac{n\pi y}{40}\right) \text{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

$$T' = \sum_{n=0, m=1}^{n_{\max}, m_{\max}} \theta_{nm}(t) \text{SC}\left(\frac{n\pi y}{40}\right) \text{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

$$\varphi' = \sum_{n=0, m=1}^{n_{\max}, m_{\max}} \varphi_{nm}(t) \text{SC}\left(\frac{n\pi y}{40}\right) \text{CS}\left(\frac{m\pi z}{20}\right),$$

где

$$\text{CS}(nx) \equiv \begin{cases} \cos nx, & \text{нечетные } n \\ \sin nx, & \text{четные } n \end{cases},$$

$$\text{SC}(nx) \equiv \begin{cases} \sin nx, & \text{нечетные } n \\ \cos nx, & \text{четные } n \end{cases}.$$

Коэффициенты разложения $\Psi_{nm}(t)$, $\theta_{nm}(t)$, $\varphi_{nm}(t)$ определяются из интегральных условий, выражающих ортогональность невязки к каждой базисной функции. После применения процедуры Галеркина при $n_{\max} = 6$, $m_{\max} = 2$ получена система из 40 нелинейных дифференциальных уравнений относительно зависящих от времени амплитуд $X_i(t) = (\Psi_{nm}(t), \theta_{nm}(t), \varphi_{nm}(t))$ общего вида:

$$\dot{X}_i = \sum_j a_{ij} X_j + \sum_{jk} b_{ijk} X_j X_k.$$

Таким образом, задача в частных производных сводится к решению более простой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения, которая в дальнейшем решалась с помощью численного интегрирования методом Рунге–Кутты–Фельберга 4–5 порядка точности в системе компьютерной алгебры „Maple“. В качестве начальных условий для скорости задавались величины амплитуд 0.01, для отклонений температуры и концентрации — 0.

Для нахождения порогов параметрической неустойчивости применялась теория Флоке [22], согласно которой

$$X(t) = e^{\lambda t} X_*(t), \quad X_*(t) = \begin{pmatrix} \Psi_{nm} \\ \theta_{nm} \\ \varphi_{nm} \end{pmatrix},$$

где $X(t)$ и $X_*(t)$ — векторные функции размерности 40, $X_*(t)$ периодична во времени с периодом $\tau = 2\pi/\omega$, $e^{\lambda t}$ — мультипликатор Флоке и $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный показатель роста.

Используя подходящие начальные условия, мы получаем K линейно независимых решений для коэффициентов $(\Psi_{nm}(t), \theta_{nm}(t), \varphi_{nm}(t))$ в конце одного периода модуляции τ . Этими фундаментальными решениями являются K столбцов матрицы монодромии $K \times K$. Для решения задачи Коши использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Собственные значения матрицы монодромии представляют собой набор множителей Флоке

$\gamma_k = e^{\lambda_k \tau}$. Для получения собственных значений γ_k использован QR-алгоритм [23]. Периодическое во времени решение, описывающее равновесие, устойчиво, когда модуль любого множителя $|\gamma_k|$ не превышает единицы. Если множители упорядочены, то выполняется последовательность неравенств $1 \geq |\gamma_1| \geq \dots \geq |\gamma_k|$. Для границы неустойчивости мы имеем условие $|\gamma_1| = 1$, которое определяет нейтральное многообразие в пространстве параметров R_m , R_c , Pr и ψ . Случай $\gamma_1 = -1$ соответствует $\lambda_r = 0$, $\lambda_i = \omega/2$, т. е. нейтральные возмущения имеют период, в два раза превышающий период внешнего поля. Эти решения соответствуют субгармоническому отклику на внешнее поле. Когда $\gamma_1 = 1$ ($\lambda_r = 0$, $\lambda_i = \omega$), период нейтральных возмущений совпадает с периодом возбуждения — синхронный отклик. Если неустойчивость возникает при наличии пар комплексно сопряженных собственных значений с единичным модулем $|\gamma_1| = 1$ ($\lambda_r = 0$, $\lambda_i \neq \omega$), то нейтральные возмущения являются квазипериодическими с двумя различными характерными частотами, не связанными рациональным соотношением.

4. Границы параметрической неустойчивости и надкритические течения

В результате линейного анализа получены зависимости критического значения магнитного числа Рэлея R_m^* , характеризующего порог параметрической конвективной неустойчивости, от амплитуды ξ и частоты ω модуляции магнитного поля. Использован набор параметров, типичных для МЖ: $Pr = 10$, $Le = 10^{-4}$. Предполагалось, что жидкость изначально стратифицирована, благодаря магнетофорезу $R_c = 0.9$ и термодиффузии $\psi = 6$.

На рис. 3 представлен график зависимости порогового значения магнитного числа Рэлея R_m^* от приведенной обратной частоты переменного магнитного поля ω_0/ω , где $\omega_0 = 0.1238$ — частота собственных колебаний МЖ на границе неустойчивости в случае постоянного магнитного поля ($\xi = 0$) [10]. Для удобства R_m^* было нормировано на максимальное значение в области графика $R_{\max}^* = 0.495$. Красной линией отмечены пороги, соответствующие субгармоническому отклику: $\gamma_1 = -1$. В случае $\gamma_1 = 1$ имеем границу синхронного отклика системы (синяя линия). Чёрная линия отвечает квазипериодическим возмущениям.

Положение всех минимумов, кроме второго, на рис. 3 согласуется со стандартным для параметрических задач правилом отношения собственной и внешней частот [16]:

$$\omega_0/\omega = n/2, \quad n = 1, 2, 3\dots$$

Причем субгармонический отклик характеризуется полуцелым соотношением частот. При синхронном отклике собственная частота кратна внешней. Наконец, для квазипериодических возмущений отношение частот является иррациональным. Во всех участках графика,

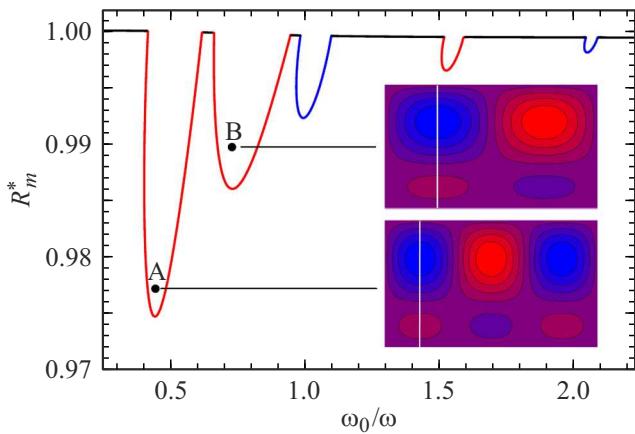


Рис. 3. Зависимость критического магнитного числа Рэлея R_m^* от приведенной обратной частоты внешней модуляции ω_0/ω . $\xi = 2$. Красная линия соответствует субгармоническому отклику, синяя — синхронному, черная — квазипериодическому. На вставках изолинии функции тока в плоскости $z(y)$: А — мода „32“ (описывается базисной функцией с $n = 3, m = 2$) при $t = 4930$, В — мода „22“ при $t = 4925$.

исключая второй минимум, реализуется режим „32“, соответствующий третьей гармонике по горизонтали $n = 3$ и второй по вертикали $m = 2$ („шестиваликовое“ течение). Вертикальная асимметрия валов связана с тем, что магнитная сила направлена от центра ячейки к ее узким границам. Таким образом, в части ячейки с $z > 0$ градиент температур сонаправлен с градиентом магнитного поля — магнитная сила формирует неустойчивую стратификацию жидкости. Соответственно, в другой половине слоя, где градиенты температур и магнитного поля направлены противоположно, возникает устойчивая стратификация. Таким образом, конвективное тече-

ние, возникшее в более нагретой области, проникает в участок вблизи холодной границы, но со значительно меньшей интенсивностью.

Выражение (9) нарушается для второго минимума, в котором соотношение частот другое: $\omega_1/\omega \approx 3/4$. Но, судя по величине наибольшего по модулю мультиплексора Флоке ($y_1 = -1$), в данном минимуме имеется субгармонический отклик. На первый взгляд, здесь нарушены законы параметрического резонанса. Но дело, оказывается, в том, что во втором минимуме ($\omega_0/\omega \approx 3/4$) возбуждается другой пространственный режим „22“ („четырехваликовое“ течение). Вообще говоря, в случае постоянного магнитного поля [10] граница неустойчивости связана с „шестиваликовым“ течением (колебательной модой „32“, $R_m^*(32) = 0.495$), а порог монотонного „четырехваликового“ течения (мода „22“) находится выше ($R_m^*(22) = 0.54$).

На рис. 4 представлены графики эволюции амплитуд функции тока и температуры разных пространственных режимов. Гармонические колебания амплитуд, наблюдавшиеся в случае постоянного магнитного поля [10], несколько искажаются внешней модуляцией. Левому графику соответствует шестиваликовое течение в точке ($R_m = 0.4837$, $\omega_0/\omega \approx 0.45$), также отмеченной на рис. 3, правому — четырехваликовая неустойчивость в точке ($R_m = 0.4899$, $\omega_0/\omega \approx 0.73$). Можно заметить, что собственные частоты этих режимов отличаются: $\omega_{01} \approx 0.123$ и $\omega_{02} \approx 0.085$ соответственно. В то же время оба режима являются субгармоническим откликом, поскольку можно наблюдать, что частоты всех базисных мод вдвое меньше, чем частоты внешнего воздействия. Таким образом, соотношение (9) на самом деле не нарушается — график на рис. 3 нормирован на частоту ω_{01} , не являющуюся собственной для минимума в области $\omega_0/\omega \approx 3/4$. Само же появление этого минимума

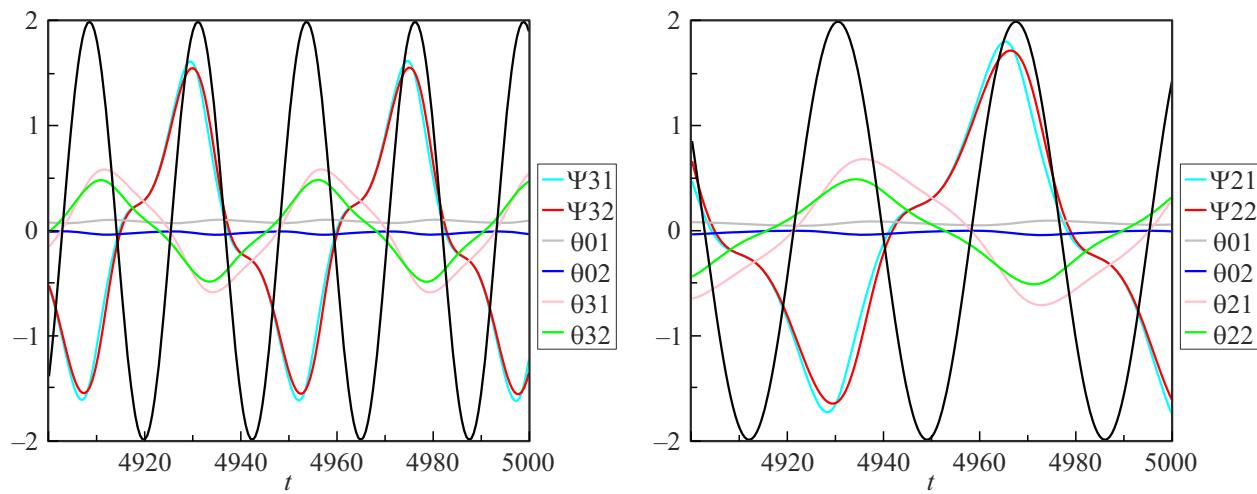


Рис. 4. Графики эволюции амплитуд функции тока для шестиваликового (слева) и четырехваликового (справа) режимов. Черная линия отвечает соответствующим колебаниям внешнего магнитного поля. Цифры у величин Ψ и θ в легенде относятся к значениям n и m соответствующих базисных функций. Например, линия $\theta31$ описывает эволюцию базисной функции температуры с $n = 3$, $m = 1$.

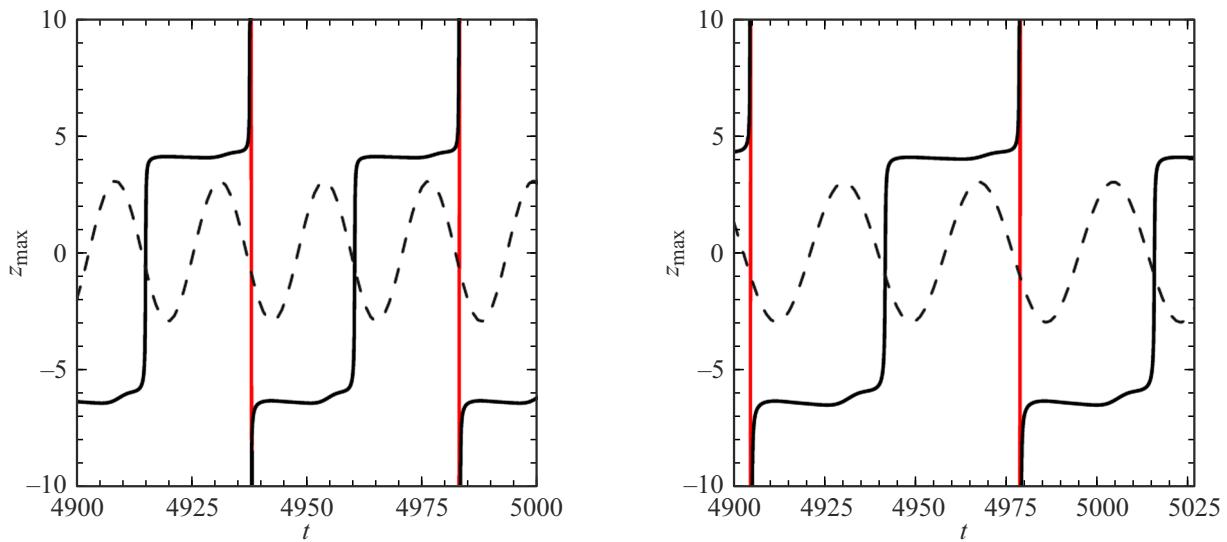


Рис. 5. Зависимость координаты максимума функции тока z_{\max} от времени при $R_m = 0.4837$, $\omega_0/\omega \approx 0.45$ (слева) и $R_m = 0.4899$, $\omega_0/\omega \approx 0.73$ (справа). Штриховые линии — фаза колебаний внешней модуляции.

вызвано параметрическим резонансным возбуждением пространственной моды „22“ четырехваликового режима, которая в постоянном поле была менее опасна для возбуждения конвекции.

Для уточнения характера нелинейного течения проанализируем колебания системы с помощью графика зависимости вертикальной координаты z_{\max} максимума функции тока от времени (рис. 5), например, на линии $y = 10$ для четырехваликового режима и на линии $y = 7$ для шестиваликового (вставка на рис. 3). Для удобства восприятия на рисунке штриховой линией дополнительно представлено изменение переменной части внешнего магнитного поля во времени. При $t = 4900$ (левый график) максимум функции тока находится в части ячейки, характеризующейся отрицательными координатами z и половину периода внешнего воздействия приблизительно сохраняет свое положение. Этим данным соответствует конвективный вал, вращающийся по часовой стрелке, амплитуда которого плавно растет от нуля до максимума, а затем вновь убывает до нуля. Общая структура течения соответствует вставке А на рис. 3. Далее, положение максимума функции тока (вала, вращающегося по часовой стрелке) смещается верхнюю треть полости. Это означает, что изменилось направление вращения валов, расположенных по вертикали. Эта структура течения сохраняется следующую половину периода и, затем, возвращается в первоначальное состояние. Отметим, что координата максимума z_{\max} на каждом полупериоде не строго постоянна, а немножко изменяется, т. е. глобальное течение представляет собой смешанное состояние: совокупность стоячей и бегущей волн. Кроме того, из сопоставления рис. 4 и 5 можно обнаружить, что при смене устойчивых положений максимума ($t \approx 4938$ и ≈ 4983 на графиках слева) амплитуды основных для конкретного режима

базисных функций скорости стремятся к нулю, позволяя при этом модам с малыми амплитудами формировать структуру течения.

Обсудим зависимость порога устойчивости в областях минимумов от величины амплитуды внешнего переменного магнитного поля (рис. 6). Порог в первом минимуме, характеризуемом субгармоническим откликом, с ростом амплитуды убывает по линейному закону. Критические числа в области минимума при $\omega_0/\omega \approx 1$ (синхронный отклик) при понижении амплитуды колебаний убывают по степенному закону. В то же время минимум

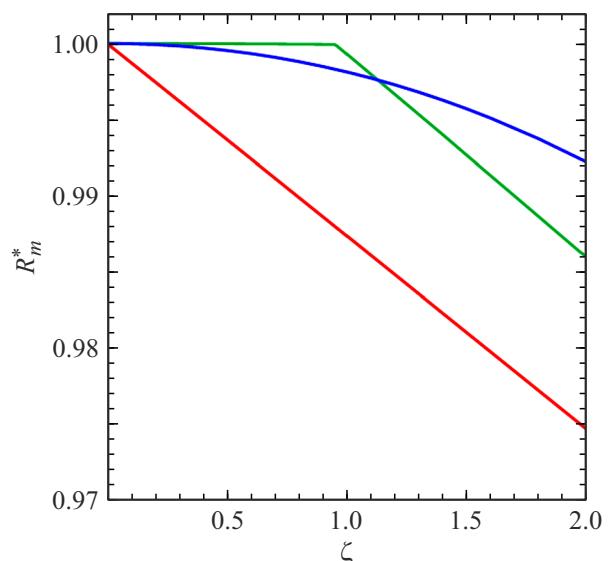


Рис. 6. Зависимость критического магнитного числа Рэлея R_m^* от амплитуды модуляции магнитного поля ξ в минимумах при $\omega_0/\omega \approx 1/2$ (красная линия), $\omega_0/\omega \approx 3/4$ (зеленая линия) и $\omega_0/\omega \approx 1$ (синяя линия).

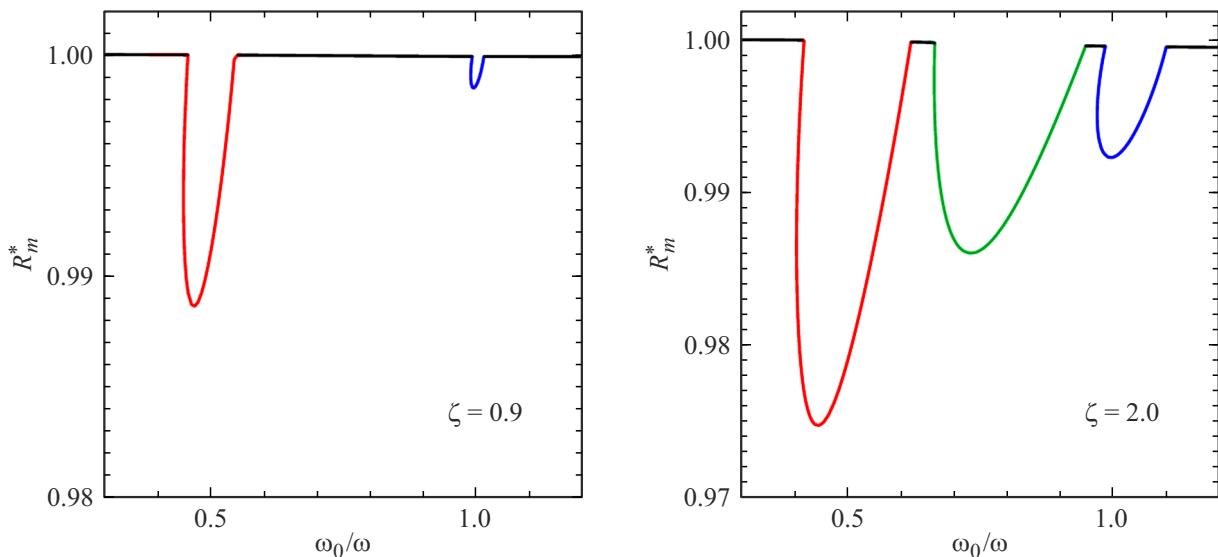


Рис. 7. Зависимость порога устойчивости от отношения собственной и внешней частот для $\xi = 0.9$ (слева) и $\xi = 2$ (справа). Критические магнитные числа Рэлея отнесены к максимальному значению на каждом из графиков.

второго языка ($\omega_0/\omega \approx 3/4$) появляется лишь при достижении критического значения амплитуды $\xi^* = 0.96$. При $\xi < 0.96$ пороги устойчивости в данной области практически не зависят от амплитуды — наблюдается квазипериодические возмущения. При $\xi > \xi^*$ критические числа начинают убывать по линейному закону, реализуется субгармонический отклик. На рис. 7 представлено сравнение графиков $R_m^*(\omega_0/\omega)$ для двух случаев: малых $\xi < \xi^*$ (слева) и больших $\xi > \xi^*$ (справа) амплитуд внешнего воздействия. В первом случае возбуждается только мода „32“ и он полностью соответствует закону параметрического резонанса (9), во втором (при большой амплитуде воздействия) проявляется конкуренция различных пространственных мод: „32“ и „22“.

Оценим характерные значения величин, соответствующих колебательной конвекции для параметрического резонанса в первом минимуме. Для МЖ, стратифицированной профилем концентрации с $R_c = (\gamma^2/3) \cdot \alpha = 0.9$ и $\psi = 6$, на которую действует переменное поле с безразмерными амплитудой $\xi = 2$ и частотой $\omega = 0.278$ (рис. 3), наблюдается субгармонический отклик с минимальным значением критического магнитного числа Рэлея R_m^* равным 0.4825, а безразмерный период возникающего колебательного режима (отклика) составляет $\mathcal{T} = 45.2$. Для экспериментальной проверки теории предлагается использовать ячейку Хеле–Шоу с размерами $2d = 0.6$ mm и $h = 6$ mm и магнетитовую (Fe_3O_4) ферромагнитность на водной основе с диаметром частиц $a = 10$ nm и объемной намагниченностью $M_s = 480$ Gs. Магнитный момент m наночастицы равен $2.51 \cdot 10^{-16}$ erg/Ое. Для ферромагнитности с объемной концентрацией $\varphi = 2\%$ и нагретой до средней температуры $T_* = 300$ K значение восприимчивости составит $\chi_* = 0.02$. Если использовать кольцевые

магниты из SmCo_5 ($M_r = 600$ G) с внутренним и внешним радиусами $R_1 = 3$ cm и $R_2 = 5$ cm соответственно и толщиной колец $\mathcal{L} = 1.86$ cm, то внутри ячейки будет наведено постоянное магнитное поле с градиентом $G \approx 107$ Ое/cm. При этих условиях безразмерная амплитуда $\xi = 2$ переменного поля катушек Гельмгольца соответствует размерному значению $A = \xi G d = 2 \cdot 107 \cdot 0.03$ Ое ≈ 6.42 Ое. Тогда для ячейки с нашим образцом ферромагнитности получим $\gamma = mGh/k_B T_* = 0.386$, а значение входящей в R_c и R_m вспомогательной комбинации параметров $\alpha = \chi_* G^2 d^4 / \kappa \eta = 18$. Таким образом, из равенства $R_m = (\Delta T / T_*) \cdot \alpha$ следует, что подобная термомагнитная неустойчивость может быть возбуждена с помощью разности температур $\Delta T = R_m T_* / \alpha = 0.4825 \cdot 300 / 18 \approx 8$ K. Размерный период колебаний при этом составит

$$\mathcal{T}_{\text{dim}} = \mathcal{T} \cdot d^2 / \kappa = 45.2 \cdot (0.03)^2 / 10^{-3} \approx 41 \text{ s.}$$

Заключение

Рассмотрена параметрическая термомагнитная конвекция неоднородной по составу МЖ за счет термодиффузии и магнитофореза магнитных наночастиц. МЖ заполняет подогреваемую со стороны одной из узких граней ячейку Хеле–Шоу, помещенную в переменное магнитное поле. При различных значениях амплитуды переменного магнитного поля получены характеристики параметрической неустойчивости: зависимости критических магнитных чисел Рэлея от обратной частоты нейтральных колебаний.

Для надкритических колебательных режимов конвекции (внутри первого и второго языков параметрической неустойчивости) представлены характерные распределения

ния функции тока, а также проанализировано поведение во времени амплитуд различных пространственных гармоник. Показано, что нелинейное течение МЖ представляет собой „смешанное“ состояние; большую часть периода внешнего воздействия в ячейке реализуется стоячая волна с небольшой примесью бегущей волны.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] М.И. Шлиомис. УФН, **112** (3), 427 (1974). DOI: 10.3367/UFNr.0112.197403b.0427 [M.I. Shliomis. Sov. Phys. Usp., **17** (2), 153 (1974). DOI: 10.1070/PU1974v01n02ABEH004332]
- [2] Р. Розенцвейг. *Феррагидродинамика* (Мир, М., 1989)
- [3] Б.М. Берковский, В.Ф. Медведев, М.С. Краков. *Магнитные жидкости* (Химия, М., 1989)
- [4] В.А. Finlayson. J. Fluid Mechanics, **40** (4), 753 (1970). DOI: 10.1017/S0022112070000423
- [5] P.J. Stiles, M. Kagan. J. Magn. Magn. Mater., **85**, 196 (1990). DOI: 10.1016/0304-8853(90)90050-Z
- [6] A.A. Bozhko, S.A. Suslov. *Convection in Ferro-Nanofluids: Experiments and Theory* (Springer, Cham, 2018)
- [7] P.V. Krauzin, P.N. Kazantsev, M.T. Krauzina. Microgravity Sci. Technol., **34** (5), 95 (2022). DOI: 10.1007/s12217-022-10010-3
- [8] M.I. Shliomis, B.L. Smorodin. J. Magn. Magn. Mater., **252** (1), 197 (2002). DOI: 10.1016/S0304-8853(02)00712-6
- [9] M.I. Shliomis, B.L. Smorodin, S. Kamiyama. Philosophical Magazine, **83**, 2139 (2003). DOI: 10.1080/0141861031000107908
- [10] П.Н. Казанцев, Б.Л. Смородин. ПМТФ, **66** (2), 129 (2024). DOI: 10.15372/PMTF202415534
- [11] Г.З. Гершунин, И.О. Келлер, Б.Л. Смородин. Докл. РАН, **348** (2), 194 (1996).
- [12] В.Г. Козлов, С.В. Субботин. ПМТФ, **59** (1), 28 (2018). DOI: 10.15372/PMTF20180104
- [13] В.А. Ильин, Б.Л. Смородин. Письма в ЖТФ, **31** (10), 57 (2005). [V.A. Il'in, B.L. Smorodin. Tech. Phys. Lett., **31** (5), 432 (2005). DOI: 10.1134/1.1931790]
- [14] Н.Н. Картаых, Б.Л. Смородин, В.А. Ильин. ЖЭТФ, **148** (1), 178 (2015). DOI: 10.7868/S0044451015070160 [N.N. Kartavykh, B.L. Smorodin, V.A. Il'in. J. Experimental and Theoretical Physics, **121** (1), 155 (2015). DOI: 10.1134/S1063776115080087]
- [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика* (Физматлит, М., 2004)
- [16] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. *Введение в теорию колебаний и волн* (Наука, М., 1994)
- [17] H. Lamb. *Hydrodynamics* (Univ. Press, Cambridge, 1993)
- [18] А.Ф. Пшеничников. Magnetohydrodynamics, **29**, 33 (1993).
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Физматлит, М., 1986)
- [20] Д.В. Любимов, Г.Ф. Путин, В.И. Чернатаинский. ДАН СССР, **235** (3), 554 (1977).
- [21] Л.В. Канторович, В.И. Крылов. *Приближенные методы высшего анализа* (Физматгиз, Л., 1962)
- [22] E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations* (McGraw-Hill, NY, 1955)
- [23] J.H. Wilkinson, C. Reinsch. *Handbook for Automatic Computation, Linear Algebra* (Springer, Berlin, 1971)