

Решение интегрального уравнения Хаффорда для малых расстояний в задаче распространения радиоволн

© А.А. Абдулхаков, А.Г. Андреев, А.А. Ерохин, К.В. Князева, В.С. Панько, А.А. Сенченко

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
E-mail: alsenchenko@mail.ru

Поступило в Редакцию 4 июля 2025 г.

В окончательной редакции 23 сентября 2025 г.

Принято к публикации 23 сентября 2025 г.

Рассмотрено интегральное уравнение Хаффорда, а также два варианта его упрощения. Показано, что вторая версия упрощенного уравнения может быть использована до расстояний порядка 100 km. Показан способ аналитического решения интегрального уравнения Хаффорда для однородной сферической поверхности Земли. Получена уточненная формула для малых расстояний для расчета множителя ослабления.

Ключевые слова: дифракция, функция ослабления, множитель ослабления, интегральное уравнение Хаффорда, Спут-Н1.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.03.62174.20432

В связи с развитием наземных радионавигационных систем (РНС) [1] задача учета влияния поверхности Земли на распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред радиоволны по-прежнему актуальна. В современных условиях требования к характеристикам РНС неизменно растут. Например, достижение точности определения координат 5–10 м для наземной РНС Спут-Н1 [1,2] невозможно без учета влияния поверхности Земли.

В теории распространения радиоволн принято учитывать влияние подстилающей поверхности с помощью множителя ослабления (МО) [3,4]. Расчет МО для неоднородной сферической трассы можно выполнить с помощью численного решения интегрального уравнения Фейнберга [3,5], так как оно обладает хорошей численной устойчивостью. Однако для его использования требуется предварительно вычислить МО над однородной сферической поверхностью, параметры которой могут быть выбраны произвольно. Здесь и далее под однородной поверхностью следует понимать слоисто-однородную поверхность, поскольку, как показано в работе [6], любая слоисто-однородная среда может быть заменена на однородную среду с эквивалентными параметрами. Для расчета МО над однородными трассами часто используют ряд по нормальным волнам (формула Фока) [4], однако он плохо сходится на малых расстояниях. Для больших расстояний (примерно от 100 km) достаточно суммировать лишь несколько первых членов. Существуют разные способы вычисления МО на небольших расстояниях (например, можно использовать формулу для модели плоской Земли [3]), обладающие разными преимуществами и недостатками. В настоящей работе уточнена ранее полученная формула для малых расстояний [7] с целью распространения ее на большие расстояния.

Рассмотрим интегральное уравнение Хаффорда [8] для модели однородной сферической Земли

$$V(x) = 1.0 + \alpha \sqrt{x} \int_0^x V(s) \left[\delta + \sin\left(\frac{x-s}{2}\right) \right] \times \frac{\exp\left(j \frac{4\pi a}{\lambda} \left[\sin\left(\frac{s}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-s}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right] \right)}{\sqrt{s(x-s)}} ds, \quad (1)$$

где x — расстояние по прямой, соединяющей антенну с точкой наблюдения, нормированное на радиус сферической поверхности a , $\alpha = [ka/(2\pi)]^{1/2} \exp(j3\pi/4)$, a — радиус сферической поверхности Земли, k — волновое число в свободном пространстве, $\delta = (\epsilon_{rc} - 1)^{1/2}/\epsilon_{rc}$ — приведенный поверхностный импеданс подстилающей поверхности, ϵ_{rc} — относительная комплексная диэлектрическая проницаемость.

Расстояние между антенной и точкой наблюдения x , входящее в уравнение (1), является нормированным к радиусу Земли. Поэтому даже для расстояний в сотни и тысячи километров выполняется условие $x \ll 1$. Это позволяет существенно упростить уравнение и найти его приближенное аналитическое решение. В работе [7] предлагается простая аппроксимация ядра интегрального уравнения, в которой полагают $\sin([x-s]/2) \approx [x-s]/2$, а экспоненту равной единице. Тогда уравнение (1) будет

$$V(x) = 1.0 + \alpha \sqrt{x} \int_0^x \left[\delta + \frac{x-s}{2} \right] \frac{V(s)}{\sqrt{s(x-s)}} ds. \quad (2)$$

Решение этого уравнения может быть найдено в виде ряда [9]:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varphi_k(x), \quad (3)$$

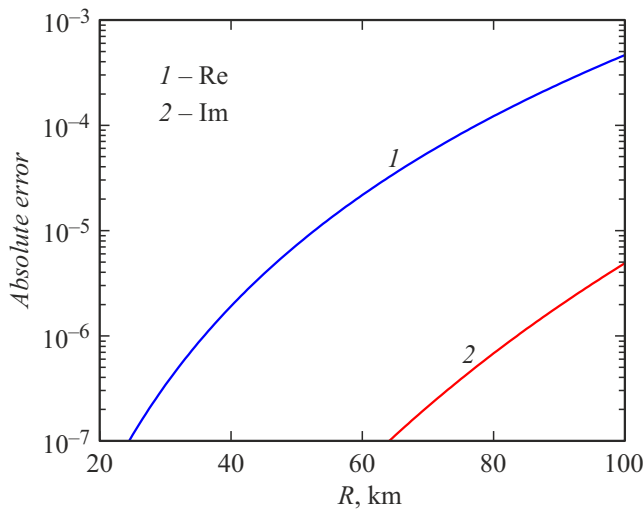


Рис. 1. Абсолютная ошибка аппроксимации экспоненты.

$$\varphi_{k+1}(x) = \int_0^x \left[\delta + \frac{x-s}{2} \right] \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{s(x-s)}} ds, \quad \varphi_0(x) = 1. \quad (4)$$

И после некоторых преобразований, отбросив несущественные слагаемые, можно прийти к его приближенному решению [7]:

$$W_{SM}(R) = y(SR) + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{jk}{8S}} \times \left\{ R - j \sqrt{\frac{\pi R}{4S}} + \frac{1+2SR}{2S} [y(SR) - 1] \right\}, \quad (5)$$

где $R = ax$ — расстояние по прямой между антенной и точкой наблюдения, $y(\rho)$ — функция ослабления для модели плоской однородной Земли ($\rho = SR$ — численное расстояние), $S = ik[1 - (1 - \delta^2)^{1/2}]$ — комплексный масштабный коэффициент, учитывающий влияние подстилающей поверхности.

Результаты расчетов по формуле (5) хорошо согласуются с более точными формулами примерно до 50 km, далее погрешность вычислений по ней резко возрастает. Задачей настоящей работы является подобрать простую, но более точную аппроксимацию ядра интегрального уравнения и найти уточненное решение.

Для $\sin([x-s]/2)$ будем использовать ту же самую аппроксимацию, что и в работе [7], абсолютная ошибка при такой аппроксимации не превышает 10^{-4} на расстоянии 1000 km:

$$\sin\left(\frac{x-s}{2}\right) \approx \frac{x-s}{2}. \quad (6)$$

Показатель степени экспоненты разложим в ряд Тейлора и отбросим все члены, кроме первых двух:

$$\sin\left(\frac{s}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-s}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \approx \frac{sx(x-s)}{16}. \quad (7)$$

Так же разложив экспоненту в ряд Тейлора, с учетом формулы (7) получим

$$\exp\left(j \frac{4\pi a}{\lambda} \left[\sin\left(\frac{s}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-s}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]\right) \approx 1 + j \frac{\pi a}{4\lambda} sx(x-s). \quad (8)$$

Модуль максимальной на интервале интегрирования абсолютной погрешности аппроксимации (8) приведен на рис. 1. Линия 1 соответствует действительной части погрешности, а линия 2 — мнимой части. Как следует из рисунка, максимальная погрешность действительной части не превышает 10^{-3} при удалении точки наблюдения до 100 km от антенны.

Применим приведенные выше аппроксимации и получим следующее „уточненное“ интегральное уравнение:

$$V(x) = 1.0 + \alpha \sqrt{x} \int_0^x \left[\delta + \frac{x-s}{2} \right] \times \left[1 + j \frac{\pi a}{4\lambda} sx(x-s) \right] \frac{V(s)}{\sqrt{s(x-s)}} ds. \quad (9)$$

Подобно решению уравнения (2) решение последнего уравнения также может быть найдено в виде ряда [9]:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \psi_k(x), \quad (10)$$

$$\psi_{k+1}(x) = \sqrt{x} \int_0^x \left[\delta + \frac{x-s}{2} \right] \left[1 + j \frac{\pi a}{4\lambda} sx(x-s) \right] \times \frac{\psi_k(x)}{\sqrt{s(x-s)}} ds, \quad \psi_0(x) = 1. \quad (11)$$

Сравнивая формулы (4) и (11), можно заметить, что члены ряда (11) содержат в себе члены ряда (4), т.е. $\psi_k(x) = \varphi_k(x) + \psi'_k(x)$. Последнее утверждение может быть доказано с помощью метода математической индукции. Тогда члены ряда (11) могут быть выражены через формулу (4):

$$\psi_{k+1}(x) = \sqrt{x} \int_0^x \left(\delta + \frac{x-s}{2} \right) \left(1 + j \frac{\pi a}{4\lambda} sx(x-s) \right) \times \frac{\varphi_k(x) + \psi'_k(x)}{\sqrt{s(x-s)}} ds = \varphi_{k+1}(x) + \sqrt{x} \left[\int_0^x \left(\delta + \frac{x-s}{2} \right) \times \left(\frac{\psi'_k(x)}{\sqrt{s(x-s)}} + j \frac{\pi a}{4\lambda} x \sqrt{s(x-s)} (\varphi_k(x) + \psi'_k(x)) \right) ds \right]. \quad (12)$$

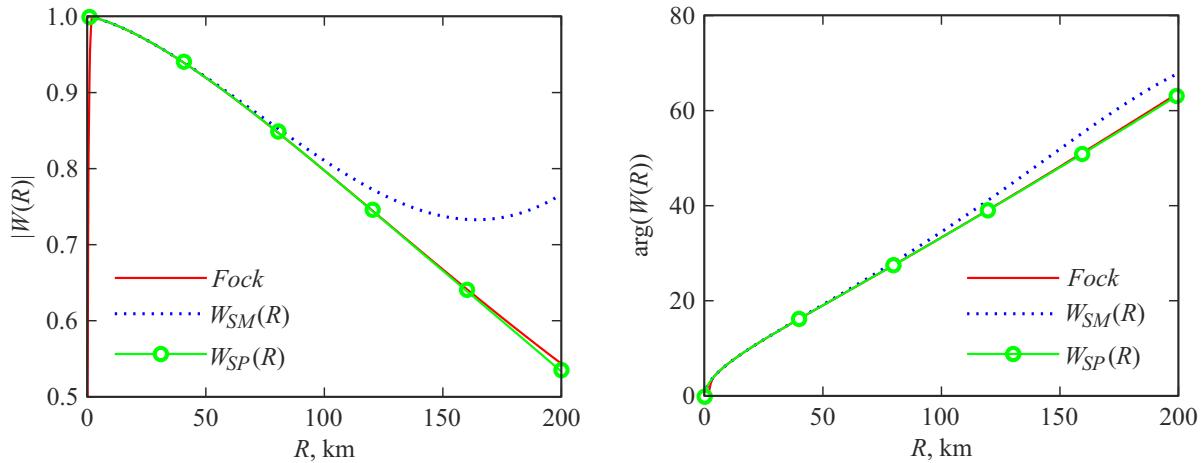


Рис. 2. МО над сферической морской поверхностью.

Таким образом, получим первые три члена ряда (10) с учетом формулы (12):

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) + \frac{\beta}{8}x^3\varphi_1(x), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = \varphi_2(x) + \frac{4\beta}{21}x^3 \left[\varphi_2(x) + \frac{\pi x^3}{165} + \frac{2x^3}{2145} \right. \\ \left. \times (52\delta^2 + 16\delta x + x^2) \right] \approx \varphi_2(x) + \frac{4\beta}{21}x^3\varphi_2(x), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \psi_3(x) = \varphi_3(x) + \frac{11\beta}{48}x^3 \left[\varphi_3(x) + \pi^2\sqrt{x}x^3 \left(\frac{3\delta}{1760} + \frac{41x}{591360} \right) \right. \\ \left. + \frac{\pi^2\beta^2x^7\sqrt{x}}{128} \left(\delta^3 + \frac{31\delta^2x}{84} + \frac{473\delta x^2}{13440} + \frac{143x^3}{161280} \right) \right] \\ \approx \varphi_3(x) + \frac{11\beta}{48}x^3\varphi_3(x), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta = j\pi a/4\lambda$, выражения $\varphi_1(x) - \varphi_3(x)$ определяются формулами [7]:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \pi\sqrt{x} \left(\delta + \frac{x}{4} \right), \quad \varphi_2(x) = \pi x \left(2\delta^2 + \frac{2}{3}\delta x + \frac{x^2}{30} \right), \\ \varphi_3(x) = \pi^2 x^{3/2} \left(\delta^3 + \frac{3}{8}\delta^2 x + \frac{\delta x^2}{32} + \frac{x^3}{1536} \right). \end{aligned}$$

Поскольку решение (10) уточненного уравнения (9) содержит в себе решение (3) уравнения (2), суммирование членов ряда $\varphi_k(x)$ в (10) можно заменить на формулу (5):

$$\begin{aligned} W_{SP}(R) = y(SR) + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{jk}{8S}} \left\{ R - j \sqrt{\frac{\pi R}{4S}} + \frac{1+2SR}{2S} [y(SR) - 1] \right\} \\ + \Phi(Ra^{-1}) + \alpha\psi'_1(Ra^{-1}) + \alpha^2\psi'_2(Ra^{-1}) + \alpha^3\psi'_3(Ra^{-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где R — расстояние по прямой (не вдоль поверхности Земли) между передающей антенной и точкой приема,

a — радиус Земли, $\Phi(x)$ — часть отброшенных при получении формулы (5) членов ряда [7], которые начинают оказывать заметное влияние на расстояниях до 100 km:

$$\Phi(x) = \frac{\alpha^2\pi}{30}x^3 + \frac{\alpha^3\pi^2\delta}{32}\sqrt{x}x^3 + \frac{2\alpha^4\pi^2\delta^2}{35}x^4. \quad (17)$$

Полученная уточненная формула для малых расстояний (УФМР) (16) пригодна для расчета множителя ослабления только для морских трасс с высокой проводимостью, для которых $|\delta| \ll 1$. Пример расчета МО для однородной сферической морской поверхности (здесь и далее параметры моря $\epsilon_r = 80$, $\sigma = 5$ S/m, частота $f = 1.9$ MHz) с использованием полученных формул приведен на рис. 2. Для сравнения на этом же рисунке приведена зависимость МО, рассчитанная с использованием классической формулы Фока [4]. Видно, что формула для малых расстояний (ФМР) (5) обладает меньшей точностью, чем УФМР (16). При этом в соответствии с поставленной целью УФМР может использоваться для расстояний не менее 100 km.

Для оценки точности полученных формул было выполнено численное решение интегрального уравнения Хаффорда (1), его упрощенного (2) и уточненного (9) вариантов по методике, приведенной в [10]. Далее были построены графики ошибки для морской поверхности (рис. 3), вычисленные по формуле $|W - W_H|/|W_H| \cdot 100\%$, где W_H — комплексные значения МО, полученные в результате решения интегрального уравнения Хаффорда (1), W — комплексные значения МО, полученные указанным в легенде способом. Сплошные линии на рисунке соответствуют ошибке численного решения соответствующего уравнения Хаффорда (2) и (9), пунктирные вычислены для ФМР (5) и УФМР (16). По результатам расчетов видно, что точность ФМР ниже, чем дает упрощенное уравнение Хаффорда (2). Причина этого заключается в отброшенных во время ее вывода членах: если к ФМР (5) прибавить хотя бы часть отброшенных членов (17), то два графика начинают сливаться. Уточненная формула для малых расстояний

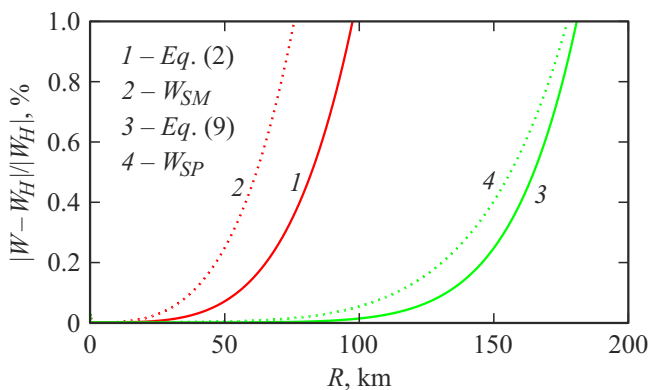


Рис. 3. Ошибка вычисления МО над сферической морской поверхностью.

также немного не доходит до предельной точности, но на расстоянии 100 km ошибка составляет всего 0.05 %, этого будет достаточно в большинстве случаев.

Также необходимо отметить, что уточненная формула для малых расстояний не пригодна для трасс с низкой проводимостью, к которым относятся любые участки с суши. Причиной этого является малое число используемых членов ряда (10) (только первые три).

В заключение кратко отметим, что уточненная формула для малых расстояний (16):

- 1) обладает высокой точностью для морских трасс до расстояний порядка 100 km;
- 2) может быть использована над трассами с низкой проводимостью, если использовать большее число членов ряда (10);
- 3) позволяет точно вычислять МО для однородных морских трасс, где ряд по нормальным волнам (формула Фока [4]) плохо сходится.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке „Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности“ в рамках научного проекта № 20240924-08494 („Исследование влияния подстилающей поверхности на пути распространения радионавигационного сигнала на точность измерения радионавигационных параметров в наземных радионавигационных системах“).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] И.В. Куликовский, О.Р. Адамович, Д.В. Бербенев, Военная мысль, № 12, 50 (2023). <https://elibrary.ru/ebcise>
- [2] А.С. Селиверстов, Записки по гидрографии, **308**, 54 (2019). https://mil.ru/activity/social/media/journal/notes_on_hydrography

- [3] Е.Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности (Наука, М., 1999), с. 167, 281, 284.
- [4] В.А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн (Сов. радио, М., 2011), с. 249.
- [5] М.Г. Дембелов, Ю.Б. Башкуев, Физика волновых процессов и радиотехнические системы, **11** (1), 89 (2008). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12946241>
- [6] Г.И. Макаров, В.В. Новиков, С.Т. Рыбачек, Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью (Наука, М., 1991), с. 33–49.
- [7] А.А. Сенченко, Ю.П. Саломатов, Изв. вузов. Физика, **53** (9/2), 114 (2010). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16036544>
- [8] G.A. Hufford, Quart. Appl. Math., **9** (4), 391 (1952). DOI: 10.1090/qam/44350
- [9] И.С. Березин, Н.П. Жидков, Методы вычислений (Физматлит, М., 1959), т. 2, с. 613.
- [10] А.А. Сенченко, Ю.П. Саломатов, Докл. ТУСУР, **26** (2-2), 36 (2012). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18900071>