

03.05.10

# Электронный и дырочный $g$ -факторы в полупроводниках и наноструктурах (Обзор)

© А.В. Родина, М.А. Семина, Е.Л. Ивченко

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: anna.rodina0108@gmail.com

Поступил в Редакцию 20 октября 2025 г.

В окончательной редакции 20 октября 2025 г.

Принят к публикации 28 октября 2025 г.

Представлен обзор экспериментальных и теоретических исследований спинового отклика носителей заряда в полупроводниках и полупроводниковых наноструктурах на внешнее магнитное поле. Количественно линейный отклик характеризуется величиной электронного или дырочного  $g$  фактора. Рассмотрены различные экспериментальные методы измерения электронного  $g$  фактора, начиная с исторических работ и включая современные исследования. Подробный анализ теоретических методов расчета электронного и дырочного  $g$  фактора в объемных полупроводниках и наноструктурах различной формы также включает в себя фундаментальные работы прежних лет и настоящего времени.

**Ключевые слова:** эффект Зеемана, фактор Ландé ( $g$  фактор), ЭПР, спиновая динамика, полупроводники.

DOI: 10.61011/FTT.2025.11.62126.282-25

## 1. Введение

В 2025 г. исполняется 100 лет открытию электронного спина [1]. Важнейшей характеристикой спина электрона является  $g$  фактор. Настоящий обзор посвящен изучению  $g$  фактора носителей заряда в полупроводниках и полупроводниковых наноструктурах.

В работах по измерению  $g$  фактора свободного электрона [2–5] он определяется как положительный коэффициент

$$g_0 = 2(1 + a) \approx 2.002319 \dots, \quad (1)$$

где с учетом квантово-электродинамических поправок коэффициент  $a = \alpha/(2\pi) + \dots$ ,  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. Такой же знак  $g_0$  для свободного электрона в вакууме выбирается и в физике твердого тела при изучении изменения фактора Ландé, или  $g$  фактора, с учетом спин-орбитального взаимодействия. В этом случае магнитный и механический моменты, соответственно  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{s}$ , связаны соотношением

$$\mathbf{m} = -g_0\mu_B\mathbf{s}, \quad (2)$$

где  $\mu_B$  — магнетон Бора (положительная величина). Отметим, что в физике иногда считают  $g_0$  отрицательной величиной, см. например, [6]. В этом случае в уравнении (2) отсутствует знак минус.

В данном обзоре мы придерживаемся определений (1) и (2). Тогда влияние магнитного поля  $\mathbf{B}$  на спин электрона в двухкратно вырожденной по спину зоне проводимости, или эффект Зеемана, описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_Z = \frac{1}{2} g_{ij}\mu_B\sigma_i B_j, \quad (3)$$

где  $i, j$  — декартовы координаты  $x, y, z$ ,  $\sigma_i$  — спиновые матрицы Паули,  $g_{ij}$  — тензор  $g$  факторов. В объемных кубических кристаллах, а также сферических квантовых точках, выращенных из композиционных материалов кубической симметрии, линейно независима одна компонента тензора  $g$  факторов:

$$g_{ij} = g\delta_{ij}, \quad (4)$$

и оператор (3) принимает вид  $g\mu_B\sigma \cdot \mathbf{B}/2$ . В симметрических структурах с квантовой ямой GaAs/GaAlAs, выращенной вдоль оси  $z \parallel [001]$  (точечная группа  $D_{2d}$ ), имеется две линейно независимые компоненты  $g_{zz} \equiv g_{\parallel}$  и  $g_{xx} = g_{yy} \equiv g_{\perp}$ . С понижением симметрии наноструктуры число линейно независимых компонент увеличивается. В квантовой точке сложной формы все 9 компонент  $g_{ij}$  могут быть различны.

В следующем разделе мы представим разнообразные методы измерения  $g$  фактора. Вторая часть обзора сосредоточена на теории электронного эффекта Зеемана в объемных кристаллах (раздел 3), в двумерных гетероструктурах (раздел 4) и наноструктурах с квантовыми точками (раздел 5). В разделе 6 рассмотрен эффект Зеемана на дырках. В заключительном разделе 7 подводятся итоги и намечаются перспективы на будущее.

## 2. Методы измерения $g$ фактора

### A. Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР)

Впервые электронный спиновый резонанс был обнаружен Е.К. Завойским в 1944 г. на кристаллогидрате

$\text{MnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  на частоте переменного магнитного поля  $\nu \approx 10 \text{ MHz}$  [7]. Он исходил из того, что поглощение высокочастотного поля пропорционально мнимой части магнитной восприимчивости [7]

$$\chi'' = \frac{2\nu_0^2\nu\nu'\chi_0}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2\nu'^2}, \quad (5)$$

где  $\chi_0$  — статическая магнитная восприимчивость,  $\nu_0$  — частота ларморовой прецессии,  $\nu'$  — затухание. Формула (5) описывает резонансный отклик на частоте, определяемой соотношением

$$h\nu_0 = \hbar\omega_0 = |g|\mu_B B, \quad (6)$$

где  $B$  — магнитное поле, а коэффициент  $g$  есть  $g$  фактор, введенный в разделе 1. Таким образом, измерение резонансной частоты  $\nu_0$  или  $\omega_0$  позволяет однозначно определить модуль  $g$  фактора. Заметим, что спектром ЭПР называется зависимость измеряемого сигнала не только от частоты переменного поля, но и от величины магнитного поля, вызывающего расщепление спиновых подуровней. При этом в случае непрерывного стационарного возбуждения часто регистрируется не линия резонансного поглощения, а производная этой линии. Это позволяет более точное определение значения резонансного магнитного поля, отвечающего пересечению первой производной с нулевой линией, а также определения ширины линии по расстоянию между точками максимума и минимума.

Начало экспериментальному изучению ЭПР в полупроводниках положил Дж. Бемски (Bemski) [8]. Используя микроволновое излучение на частотах 9 GHz и 24 GHz, он обнаружил в зависимости поглощения от внешнего магнитного поля особенность, определяемую резонансным переворотом спина свободных электронов на поверхности Ферми в образцах InSb  $n$ -типа с концентрацией электронов от  $2 \cdot 10^{14}$  до  $3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ . Определенный при этом модуль  $g$  фактора электронов менялся от 50.7 до 48.8. Исааксон Р.А. (Isaacson R.A.) расширил интервал концентраций до  $3.6 \cdot 10^{13} - 1.5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  и измерил зависимость параметра  $|g|$  от энергии Ферми электронов [InSb], которая удовлетворительно согласовалась с формулой, выведенной в  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  теории возмущений для полупроводников со структурой цинковой обманки [10], см. подробнее в разделе 3.

## В. Оптически детектируемый магнитный резонанс (ОДМР)

Метод оптического детектирования магнитного резонанса (ОДМР) представляет собой комбинацию ЭПР и фотолюминесценции (ФЛ). В этом методе регистрируются изменения в интенсивности и поляризации ФЛ в зависимости от частоты микроволнового излучения и/или приложенного внешнего магнитного поля.

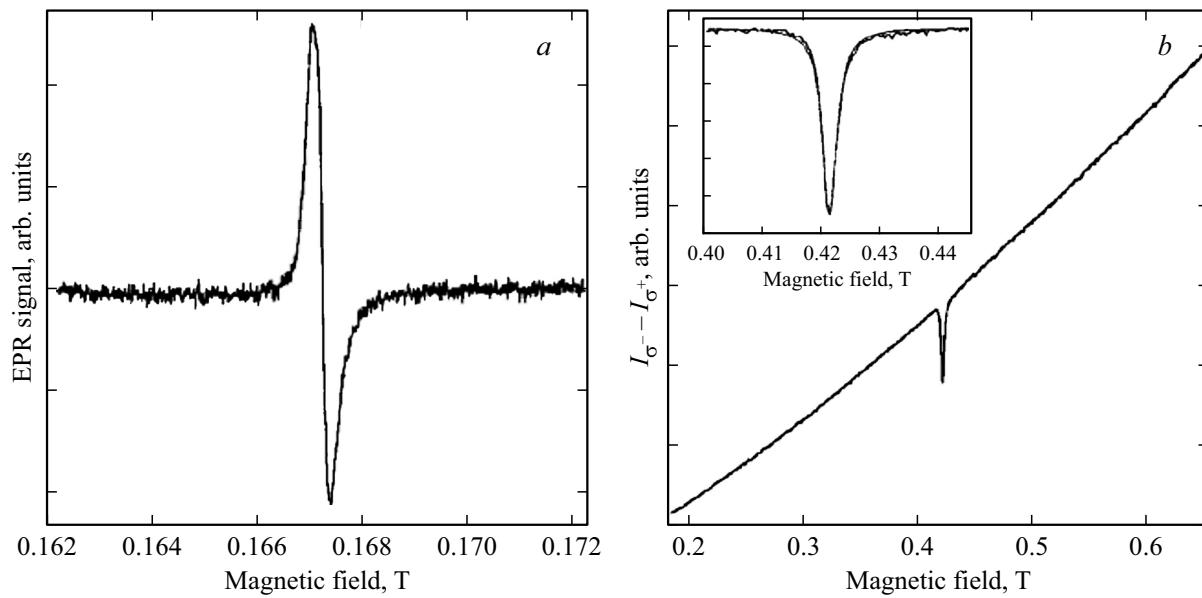
Тем самым определяются частоты резонансных переходов между спиновыми подуровнями носителя заряда или экситона. На рис. 1 представлены спектры ЭПР (*a*) и ОДМР (*b*), измеренные в объемном полупроводниковом твердом растворе  $n\text{-In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  ( $n = 2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ) [11]. Спектр (*a*) измерялся на частоте  $\nu = 9.5 \text{ GHz}$  при температуре  $T = 4.5 \text{ K}$  с регистрацией первой производной. На рис. 1, *b* представлена зависимость разности интенсивности  $I_{\sigma^-} - I_{\sigma^+}$  циркулярно поляризованных компонент экситонной ФЛ от магнитного поля. Для снятия спектра (*b*) использовалась частота  $\nu = 24 \text{ GHz}$  микроволнового поля, экситонная люминесценция возбуждалась нерезонансно излучением лазера на длине волны 514 nm. Найденные значения (*a*)  $|g| = 4.0746 \pm 0.005$ , обусловленное электронами проводимости или электронами, связанными на мелком доноре, и (*b*)  $|g| = 4.07 \pm 0.02$ , обусловленное электронами, связанными в экситон, практически не различаются. Это свидетельствует о том, что величина  $g$  фактора не меняется при связывании электрона проводимости в экситон.

В отличие от ЭПР при оптическом детектировании электронного резонанса не требуется наличия в образце большого числа спинов. Достаточно надежного измерения сигнала люминесценции при условии, что ее интенсивность или поляризация зависит от спиновой поляризации электронов или экситонов, изменяющейся под воздействием микроволнового поля. В принципе, возможно наблюдение ОДМР на одном экситоне. Поэтому этот метод востребован для изучения эффекта Зеемана в полупроводниковыхnanoструктурах, например, в сверхрешетках GaAs/AlAs первого и второго типов [12–14].

## С. Комбинационное рассеяние с переворотом спина

В процессе неупругого рассеяния света с переворотом спина (спин-флип) во внешнем магнитном поле начальное и конечное состояния системы отличаются спиновыми состояниями электрона, дырки или экситона. В результате энергии падающего ( $\hbar\omega$ ) и рассеянного ( $\hbar\omega'$ ) фотонов различаются на энергию зеемановского расщепления  $\Delta_Z = |g|\mu_B B$ : при рассеянии в стоксову (низкочастотную) и антистоксову (высокочастотную) области так называемый рамановский сдвиг  $\hbar(\omega - \omega') = \pm\Delta_Z$  соответственно. Это явление было предсказано Яфетом (Yafet) [15] и впервые обнаружено на свободных электронах в  $n\text{-InSb}$  [16] и на связанных электронах и дырках в CdSe [17]. Помимо однократного, удается наблюдать двукратный и трехкратный процессы рассеяния, в которых направление спина меняется у двух или трех электронов [18–21] и рамановский сдвиг составляет  $\pm 2\Delta_Z$  или  $\pm 3\Delta_Z$ .

В nanoструктурах двухкратное рассеяние с переворотом спина электрона впервые наблюдалось в коллоидных наноплатетах (двумерных нанопластинках) CdSe



**Рис. 1.** (a) Спектр ЭПР ( $f_{mw} = 9.5$  GHz,  $T = 4.5$  K) объемного кристалла  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ , зарегистрированный по первой производной линии резонансного поглощения. (b) Спектр ОДМР ( $f_{mw} = 24$  GHz,  $T = 1.6$  K), зарегистрированный по магнитоиндукционной циркулярной поляризации экситонной ФЛ объемного кристалла  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$ . На вставке показан резонанс после вычитания линейного фона и его аппроксимации с помощью лоренцева контура. Рисунок адаптирован из работы [11].

в работе [21]. Спектры комбинационного рассеяния с переворотом спина (КРПС, или SFRS) для наноплателетов CdSe толщиной 4 монослоя показаны на рис. 2. Теория одно- и двукратного рассеяния с переворотом спина электрона в полупроводниковых наноплателетах построена в работе [22]. Коллоидные наноплателеты CdSe, толщина которых составляет несколько мономолекулярных слоев, а латеральные размеры — несколько десятков нанометров, могут стоять вертикально на кремниевой подложке, лежать на ней горизонтально или наклонно под некоторым углом [21]. В [22] построена микроскопическая теория и выведены правила отбора для комбинационного рассеяния с участием одного ( $1e$ ) и двух ( $2e$ ) электронов

$$I^{(1e)} \propto \sin^2 \tilde{\theta} |(\mathbf{e}^* \times \mathbf{e}^0) \cdot \mathbf{c}|^2, \quad (7a)$$

$$I^{(2e)} \propto \sin^4 \tilde{\theta} |\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}^0 - (\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{c})(\mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{c})|^2. \quad (7b)$$

Здесь  $I^{(ne)}$  ( $n = 1, 2$ ) — интенсивность вторичного излучения,  $\mathbf{e}^0$  и  $\mathbf{e}$  — единичные векторы поляризации первичного и вторичного лучей ( $\mathbf{e}^*$  — величина, комплексно сопряженная  $\mathbf{e}$ ),  $\mathbf{c}$  — орт в направлении нормали к плателету,  $\theta$  — угол между вектором  $\mathbf{c}$  и направлением эффективного магнитного поля в наноплателете ( $g_\perp \mathbf{B}_\perp + g_\parallel \mathbf{B}_\parallel$ ) /  $g$ , где  $g_\parallel$  и  $g_\perp$  —  $g$  факторы электрона для продольного ( $\mathbf{B} \parallel \mathbf{c}$ ) и поперечного ( $\mathbf{B} \perp \mathbf{c}$ ) направлений внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Здесь учтено, что при наличии анизотропии,  $g_\parallel \neq g_\perp$ , величина зеемановского расщепления составляет  $g\mu_B B$ , где

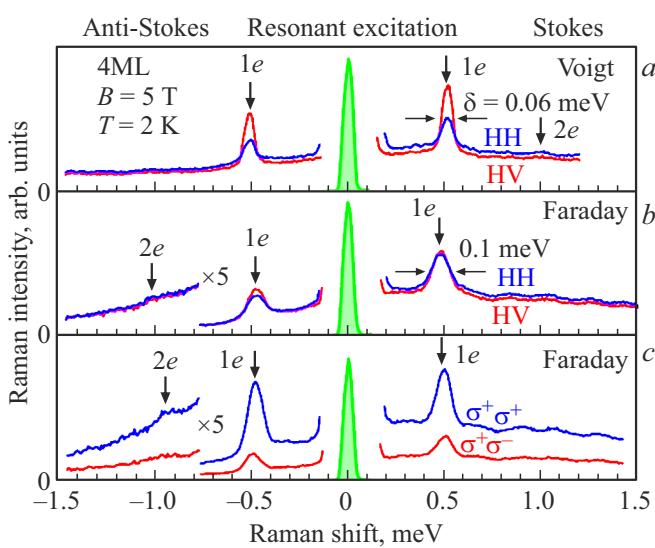
$$g = \sqrt{g_\perp^2 \sin^2 \theta_B + g_\parallel^2 \cos^2 \theta_B} \quad (8)$$

и  $\theta_B$  — угол между векторами  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{B}$ . Углы  $\tilde{\theta}$  и  $\theta_B$  связаны соотношением

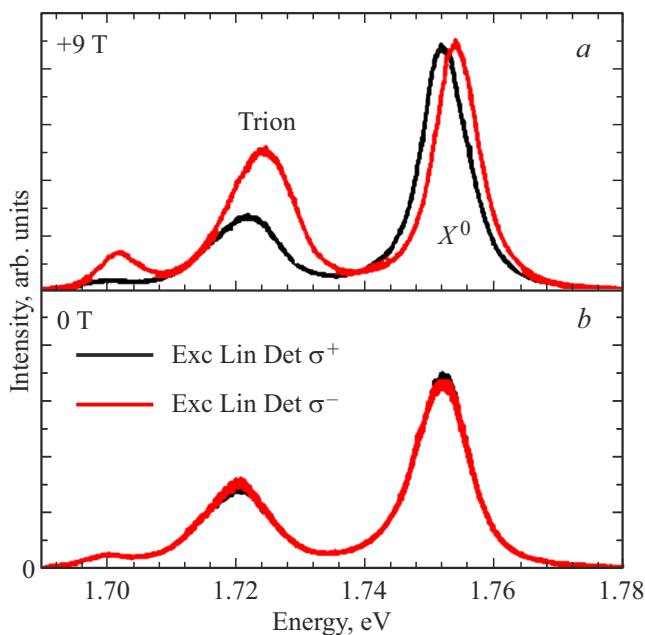
$$\sin^2 \tilde{\theta} = \frac{g_\perp^2}{g^2} \sin^2 \theta_B.$$

Механизм рассеяния, рассматриваемый при выводе уравнений (7a), (7b), включает поглощение первичного фотона с возбуждением экситона в плателете, переворот спина у одного или двух резидентных локализованных электронов за счет обменного взаимодействия с электроном в экситоне и испускание экситоном вторичного фотона. Из сравнения правил отбора с экспериментом сделан вывод, что плателеты в основном лежат на подложке или расположены к ней под небольшим углом. В дальнейших экспериментальных исследованиях [23] была измерена зависимость  $g$  фактора электрона от угла между направлением магнитного поля и осью  $\mathbf{c}$  в наноплателетах CdSe, хорошо описывающаяся выражением (8) и, таким образом, определена его анизотропия.

Рассеяние света с переворотом спина в полупроводниковых органо-неорганических и неорганических перовскитах экспериментально и теоретически исследовано в работах [24–26]. Установлена универсальная зависимость  $g$  факторов электронов и дырок от ширины запрещенной зоны в семействе перовскитов галогенидов свинца и определена их анизотропия в перовскитах с симметрией ниже кубической. В работе [26] обсуждается механизм и возможность наблюдения рассеяния света с переворотом спина экситона при участии акустического фонона в кубических перовскитах. При этом рамановский сдвиг определяется целым или половинным  $g$  фактором экситона.



**Рис. 2.** (a–c) Спектры комбинационного рассеяния с переворотом спина для наноплателетов CdSe толщиной 4 монослоя, измеренные при резонансном возбуждении при  $\hbar\omega = 2.497$  еВ, плотность мощности  $P = 20 \text{ W cm}^{-2}$ ,  $B = 5$  Т и  $T = 2$  К. (a) Спектры в геометрии Фойгта, измеренные в ко- (синий цвет) и кросс- (красный) линейных поляризациях. Спектры в геометрии Фарадея, измеренные в ко- и кросс-линейных поляризациях [панель (b)] и в ко- и кросс-круговых поляризациях [панель (c)]. Рисунок адаптирован из работы [21].



**Рис. 3.** Спектры фотолюминесценции, измеренные в  $\sigma_+$  (черный цвет) и  $\sigma_-$  (красный цвет) циркулярной поляризации в монослое WSe<sub>2</sub> при линейно поляризованном фотовозбуждении. Панель (b) — экспериментальные кривые в отсутствие магнитного поля. Символы  $X_0$  и „Trion“ означают линии излучения нейтрального экситона и отрицательно заряженного экситона  $X^-$  (триона). Монослой лежит на подложке SiO<sub>2</sub>/Si. Рисунок адаптирован из работы [TMDC].

#### D. Спектральное разрешение экситонных подуровней

Наиболее прямым способом определения экситонного  $g$  фактора является наблюдение расщепления спектральных линий отражения, поглощения или люминесценции в магнитном поле. Одна из таких возможностей появляется в разбавленных магнитных полупроводниках, или полупроводниковых твердых растворах, в которых часть атомов одной из подрешеток замещена парамагнитными примесными атомами, например, Mn, Fe или Co. Внешнее магнитное поле индуцирует магнитный момент парамагнитных ионов. Обменное  $sp-d$  взаимодействие магнитных ионов с электронами и дырками приводит к гигантскому спиновому расщеплению состояний носителей заряда, намного превосходящему зеемановское расщепление в исходной немагнитной матрице. В результате, в оптических спектрах возникает несколько отдельных линий, амплитуда которых поляризационно зависит [27].

Другая возможность имеется в случае узких экситонных линий, полуширина которых меньше или сравнима с зеемановским расщеплением экситонных подуровней. Эта возможность проиллюстрирована на рис. 3, где показано расщепление в магнитном поле спектра экситонной ФЛ (пик  $X^0$ ) в мономолекулярном слое WSe<sub>2</sub> [TMDC]. При инверсии направления магнитного поля  $B_z \rightarrow -B_z$  спектральные положения циркулярно поляризованных пиков люминесценции  $\sigma_{\pm}$  меняются местами.

#### E. Магнитная циркулярная поляризация люминесценции (МЦПЛ)

Если время спиновой релаксации между зеемановскими подуровнями экситона меньше или сопоставимо с временем жизни экситона или экситонного комплекса, то спиновые подуровни во внешнем магнитном поле будут заселены селективно, а ФЛ циркулярно поляризована, по крайней мере, частично, даже при неполяризованном или линейно поляризованном возбуждении, см. подробнее в обзоре [29]. Такая возможность реализуется в спектре излучения триона в монослое WSe<sub>2</sub> (рис. 3, пик „Trion“). Как видно из рисунка, экситонные пики ФЛ совпадают по интенсивности, так как время жизни  $\tau_0$  экситона  $X_0$  мало по сравнению с его временем спиновой релаксации  $\tau_s$ . Для триона выполнено обратное соотношение  $\tau_s < \tau_0$  и интенсивность одной из циркулярно поляризованных компонент ФЛ существенно превышает другую.

Преимуществом метода МЦПЛ является его относительная простота. В частности, он не требует спектрального разрешения зеемановских подуровней экситона и может быть применен к широкому классу объектов, имеющих широкие спектральные линии или полосы ФЛ. В работе [30] теоретически изучены сценарии формирования МЦПЛ в неоднородном ансамбле локализованных экситонов в случае, когда  $g$  фактор экситона сильно

зависит от его энергии. Метод МЦПЛ является одним из основных методов определения  $g$  факторов экситонов и трионов в ансамблях коллоидных наноструктур, в которых неоднородная ширина линии ФЛ не позволяет непосредственно определить расщепление зеемановских подуровней [31–34]. При низких температурах удается определить  $g$  фактор темного (запрещенного по спину, оптически неактивного) экситона, а также  $g$  фактор тяжелой дырки в отрицательно заряженном трионе. В работе [34] методом МЦПЛ для наноплателетов CdSe было показано, что обменное взаимодействие экситона с носителями заряда, связанными на поверхности, или оборванными связями вносит значительный вклад в его зеемановское расщепление и контролирует не только значение, но и знак МЦПЛ.

## F. Эффект Ханле

При междузонном поглощении циркулярно поляризованного света проекция углового момента фотонов передается возбуждаемым электронам и дыркам. В результате полный средний спин  $s_0$  фотоэлектронов в момент рождения отличен от нуля. За время жизни в зоне проводимости этот спин испытывает в поперечном магнитном поле  $\mathbf{B}$  ларморову прецессию с угловой частотой  $\Omega_L = g\mu_B\mathbf{B}/\hbar$ . Спиновая динамика оптически ориентированных по спину электронов описывается уравнением кинетики

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{T} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\Omega}_L = \mathbf{G}_s, \quad (9)$$

где  $T$  — время жизни спина, определяемое временем жизни и временем спиновой релаксации фотоэлектрона:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_s}, \quad (10)$$

$\mathbf{G}_s$  — темп генерации электронных спинов. Далее будем считать, что  $\mathbf{G}_s \parallel z$ ,  $\mathbf{B} \perp z$ . Для простоты мы пренебрегаем в (9) влиянием взаимодействия электронного спина с флуктуационным спином ядер основной решетки.

В стационарных условиях возбуждения, когда  $\mathbf{G}_s \parallel z$  не зависит от времени и  $ds/dt = 0$ , уравнение для среднего спина  $\mathbf{S} = \mathbf{s}/N$  одного фотовозбужденного электрона ( $N$  — стационарное число фотовозбужденных электронов) совпадает с уравнением (9) для  $\mathbf{s}$ , в котором  $\mathbf{G}_s$  нужно заменить на  $\mathbf{G}_s/N$ . В этом случае, для проекции  $\mathbf{S}$  на ось  $z$  получаем

$$S_z(B_\perp) = \frac{S_z(0)}{1 + (\Omega_L T)^2},$$

где  $S_z(0)$  — проекция на ось  $z$  среднего спина на один электрон, генерируемого при постоянном циркулярно-поляризованном возбуждении в нулевом магнитном поле:

$$S_z(0) = \frac{s_z(0)}{N} = \frac{T}{\tau_0} \frac{G_{sz}}{N} = \frac{\tau_s}{\tau_s + \tau_0} \frac{G_{sz}}{N}. \quad (11)$$

С учетом связи между правилами отбора при генерации и излучательной рекомбинации степень циркулярной поляризации ФЛ описывается лоренцианом

$$P_{\text{circ}}(B) = \frac{I_{\sigma_+} - I_{\sigma_-}}{I_{\sigma_+} + I_{\sigma_-}} = \frac{P_{\text{circ}}(0)}{1 + (B/B_{1/2})^2}, \quad (12)$$

где  $B_{1/2} = \hbar/(|g|\mu_B T)$ . При выводе выражения (12) предполагалось, что фотодырки быстро теряют свой направленный спин и неполяризованы. Деполяризация ФЛ в поперечном магнитном поле называется эффектом Ханле. Измерение зависимости  $P_{\text{circ}}(B)$  позволяет найти произведение  $|g|T$ . При этом условие наблюдения эффекта Ханле противоположно условию наблюдения МЦПЛ — время спиновой релаксации фотовозбужденного электрона  $\tau_s$  не должно быть слишком малым по сравнению со временем его жизни  $\tau_0$ . Отметим, что строго говоря, время спиновой релаксации  $\tau_s$ , входящее в отношение  $T/\tau_0$  в выражении (11) для среднего спина в нулевом магнитном поле, и время  $\tau_s$ , определяющее эффективное магнитное поле  $B_{1/2}$ , могут различаться. Они отвечают временам соответственно продольной и поперечной спиновой релаксации (или спиновой когерентности). В ансамбле квазичастиц время спиновой когерентности определяется дефазировкой спинов, обусловленной разбросом параметров. Примерами наблюдения эффекта Ханле могут служить рис. 1 в [35] и рис. 2 в [36].

## G. Спиновые биения

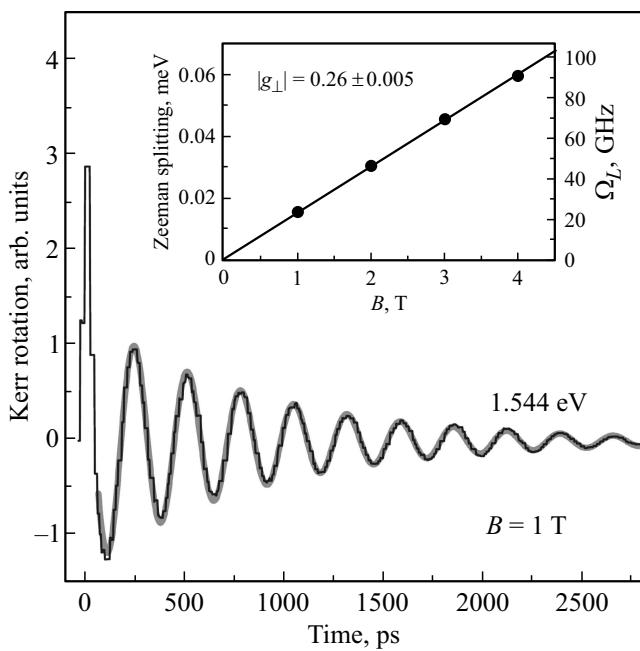
При описании спиновой динамики электронов, возбуждаемых коротким импульсом циркулярно поляризованным излучением, в уравнении (9) нужно положить  $\mathbf{G}_s = 0$ , но учесть производную по времени  $ds/dt \neq 0$  и ввести начальные условия для полного среднего спина  $s_0$  и числа фотовозбужденных электронов  $N_0$ . Для компоненты спина вдоль оси  $z$  появляются биения в поперечном магнитном поле на частоте ларморовой прецессии:

$$s_z(t) = e^{-t/T_2} \cos(\Omega_L t) s_{0,z}, \quad S_z(t) = e^{-t/\tau_s} \cos(\Omega_L t) S_{0,z}, \quad (13)$$

где  $S_{0,z} = s_{0,z}/N_0$ , а время  $T_2$  определяется временем жизни  $\tau$  и временем спиновой когерентности  $\tau_s$ .

В настоящее время для регистрации спиновых биений используется очень чувствительный и эффективный метод „накачка–зондирование“ (pump-probe): на образец падает циркулярно поляризованный импульс накачки и с запозданием на время  $t$  приходит импульс пробного линейно-поляризованного света. Вследствие спинового эффекта Керра плоскость поляризации отраженного пробного импульса поворачивается на угол  $\delta\theta \propto s_z(t)$ , величина которого измеряется поляризационно-чувствительным балансным детектором. Подробнее с методом можно ознакомиться в обзоре [37] и в главе 15 в коллективной монографии [38].

Рис. 4 иллюстрирует наблюдение электронных спиновых биений в квантовой яме GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As [39].



**Рис. 4.** Зависимость керровского вращения от времени в квантовой яме GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As толщиной 10 нм в магнитном поле 1 Т. Чёрная линия показывает экспериментальные данные, толстая серая линия соответствует результатам аппроксимации согласно уравнению (13) с параметрами  $\Omega_L = 23.4 \text{ GHz}$  и  $T_2 = \tau_s = 880 \text{ ps}$ . На вставке показаны расщепление Зеемана (левая шкала) и частота спиновых биений  $\Omega_L$  (правая шкала) в зависимости от магнитного поля.  $T = 1.6 \text{ K}$ . Рисунок адаптирован из работы [39].

Они позволяют с высокой точностью определить значение поперечного электронного  $g$  фактора  $|g_{\perp}| = 0.26 \pm 0.005$ . При этом время жизни резидентных электронов в квантовой яме предполагается бесконечным, а время жизни спина  $T_2$  определяется временем спиновой когерентности. Значения продольного электронного  $g$  фактора  $|g_{\parallel}|$  в квантовой яме можно определить регистрируя спиновые биения в магнитном поле, наклонном к оси роста ямы [39]. Отметим, что в ансамбле произвольно ориентированных двумерных коллоидных наноплателетов измеряемый сигнал керровского вращения всегда определяется величиной поперечного электронного  $g$  фактора, а наличие его анизотропии дает только небольшой вклад в спиновую дефазировку, ускоряя затухание амплитуды сигнала [23,40]. При этом в ансамбле произвольно ориентированных нанокристаллов возможно также наблюдение спиновых биений в магнитном поле, параллельном направлению распространения светового луча (геометрия Фарадея) [41].

## Н. Антипересечение экситонных подуровней

Метод антипересечения экситонных подуровней проиллюстрируем на примере экситона  $X_{e-hh}^0$ , образован-

ного из электрона в зоне проводимости со спином  $s = \pm 1/2$  и тяжелой дырки с проекцией углового момента  $j = \pm 3/2$  [29]. Из четырех состояний экситона  $|s, j\rangle = |\pm 1/2, \pm 3/2\rangle$  два состояния с суммарной проекцией углового момента  $m = s + j = \pm 1$  оптически активны (светлые), а состояния с  $m = \pm 2$  неактивны (темные). В структурах с пониженной симметрией  $C_{2v}$  зависимость энергии экситонных подуровней от магнитного поля  $\mathbf{B} \parallel z$  описывается формулами [29,42]

$$E_{1,2} = E_0 + \frac{1}{2} \left( \delta_0 \pm \sqrt{\delta_2^2 + (g_e - g_{hh})^2 \mu_B^2 B_z^2} \right),$$

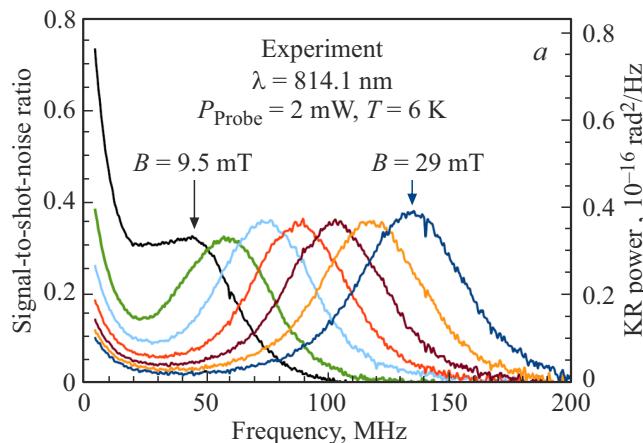
$$E_{3,4} = E_0 + \frac{1}{2} \left( -\delta_0 \pm \sqrt{\delta_1^2 + (g_e + g_{hh})^2 \mu_B^2 B_z^2} \right). \quad (14)$$

Здесь  $E_0$  — энергия возбуждения экситона без учета обменного взаимодействия и при  $B_z = 0$ ,  $g_e$  и  $g_{hh}$  — продольные  $g$  факторы электрона и дырки,  $\delta_0$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — константы обменного расщепления, обычно  $\delta_0 \gg \delta_1, \delta_2$ . Пары подуровней 1, 2 и 3, 4 представляют собой светлые и темные состояния, расщепленные анизотропным обменным взаимодействием и магнитным полем. При этом время жизни светлых состояний короче, так как вклад в него вносят как излучательные, так и безызлучательные процессы экситонной рекомбинации. В магнитном поле экситоны 1 и 2 излучают эллиптически поляризованные光子ы with противоположными знаками циркулярной поляризации.

При  $g_e + g_{hh} > g_e - g_{hh}$  подуровень 3 с ростом поля  $B_z$  пересекается при некоторых значениях  $B_{\text{cr},1}$  и  $B_{\text{cr},2}$  с подуровнями 1 и 2. Любое дополнительное незначительное локальное понижение симметрии приводит к смешиванию состояний 3 и 1 (или 2) в окрестности поля  $B_{\text{cr},1}$  ( $B_{\text{cr},2}$ ), так что оба смешанных состояния становятся светлыми и их время жизни превышает время жизни светлого состояния 2 (или 1). В результате интенсивность экситонной ФЛ возрастает и она становится частично циркулярно поляризованной. Экспериментально этот эффект наблюдался, в частности, на сверхрешетках GaAs/AlAs в работах [12–14], теория построена в [42].

## I. Флуктуации электронного спина (спиновый шум)

Даже в отсутствие какой-либо средней спиновой ориентации в образце с  $N$  электронами ожидается флуктуационный спин  $s_z$  порядка  $\sqrt{N}$  из-за хаотически направленных спинов отдельных электронов. Поэтому, как и в методе „накачка–зондирование“, пробный линейно-поляризованный свет при прохождении образца без всякой накачки испытывает поворот плоскости поляризации на угол  $\theta \propto s_z(t)$ . В поперечном магнитном поле в спектре спинового шума возникает пик на частоте ларморовой прецессии  $\Omega_L$ , определяемой  $g$  фактором электрона, см., например, [43–45].



**Рис. 5.** Спектры шума керровского вращения в одиночной квантовой яме GaAs/AlAs шириной 20 нм (помещенной в микрорезонатор), измеренные в магнитных полях от 9.5 до 29 мТ с равным шагом. Параметры эксперимента приведены на панели. Рисунок адаптирован из работы [49].

Эксперименты по измерению стохастических флуктуаций электронных спинов были впервые проведены Александровым и Запасским (1981), которые использовали оптическое вращение Фарадея для обнаружения флуктуаций спина в газе атомов натрия [46]. Аналогичный оптический метод измерения электронного спинового шума в конденсированных системах был продемонстрирован, в частности, в легированном  $n$ -GaAs М. Эстрайхом и его коллегами [47], см. также [48]. На рис. 5 представлен спектр спиновых флуктуаций, измеренный в одиночной квантовой яме GaAs/AlAs шириной 20 нм, помещенной в микрорезонатор [49].

В равновесии в силу флуктуационно-диссилиционной теоремы Каллена–Вельтона [50] спектр флуктуаций угла поворота  $\theta$  пропорционален мнимой части магнитной восприимчивости  $\chi''$  в уравнении (5) [43]. Таким образом, между ЭПР и методом спинового шума имеется прямая связь. Можно также установить физическую связь этих двух явлений с рассеянием света с переворотом спина и спиновыми биениями (13) [51].

### 3. $g$ фактор электрона в объемных полупроводниках

Экспериментальные значения  $g$  фактора электрона в зоне проводимости прямозонных полупроводников  $A_3B_5$  или  $A_2B_6$  со структурой цинковой обманки меняются в пределах от  $-51.3$  в InSb и  $-14.8$  в InAs до  $-0.44$  в GaAs и  $1.9$  в ZnTe. Этот широкий разброс хорошо описывается формулой, получившей название формулы Рот (Laura Roth) [10]

$$g = g_0 - \frac{4}{3} \frac{|p_{cv}|^2}{m_0} \frac{\Delta}{E_g(E_g + \Delta)}. \quad (15)$$

Здесь  $g_0$  —  $g$  фактор свободного электрона (1),  $E_g$  — ширина запрещенной зоны,  $\Delta$  — спин-орбитальное рас-

щепление валентной зоны,  $m_0$  — масса электрона в вакууме,  $p_{cv}$  — межзонный матричный элемент оператора импульса. Формула получена в  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  методе теории возмущений с учетом  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  подмешивания состояний из  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$  валентных подзон к состояниям  $\Gamma_6$  зоны проводимости.

Формула (15) подробно проанализирована в работах [52, 53] и главе 11 в коллективной монографии [54]. Анализ показывает, что типичная величина энергии межзонного взаимодействия  $E_p 2|p_{cv}|^2/m_0$  [55, 56] (или  $P^2$  в обозначениях [53]) характеризуется малым разбросом для большинства бинарных соединений  $A_3B_5$  или  $A_2B_6$ , в отличие от широкого разброса значений  $E_g$  и  $\Delta$ . Поэтому для оценок можно положить  $E_p$  константой со значением 20 еВ, а величины  $E_g$  и  $\Delta$  взять из оптических экспериментов. Более точный расчет предполагает определение энергии  $E_p$  из  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  формулы для эффективной массы  $m^*$  для значения этой массы, найденной, например, из циклотронного резонанса. Наконец, для еще лучшего согласования теории с экспериментом можно в правую часть уравнения (15) добавить небольшой постоянный вклад  $g_{rb}$ , учитывающий  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  вклад далеких зон в  $g$  фактора электрона. Подчеркнем, что второе слагаемое в (15), обусловленное спин-орбитальным взаимодействием в валентной зоне, играет важную роль и вносит главный вклад в  $g$ . Этот вклад тем больше, чем больше величина спин-орбитального расщепления  $\Delta$  и меньше величина запрещенной зоны  $E_g$ , и, для многих полупроводников, приводит к смене знака  $g$  фактора электрона. Например,  $g(\text{CdTe}) = -1.66$  при  $\Delta = 0.82$  еВ и  $E_g = 1.6$  еВ,  $g(\text{GaAs}) = -0.44$  при  $\Delta = 0.34$  еВ и  $E_g = 1.52$  еВ,  $g(\text{CdSe}) = 0.68$  при  $\Delta = 0.42$  еВ и  $E_g = 1.8$  еВ, и  $g(\text{InP}) = 1.2$  при  $\Delta = 0.108$  еВ и  $E_g = 1.42$  еВ (см. ссылки на источники в [75]).

Недавно формула Рот оказалась востребованной для расчета  $g$  фактора дырок в валентной зоне свинцово-галогенидных перовскитов  $\text{APbX}_3$  ( $\text{A} = \text{Cs}$ , метиламмоний MA, формамидин FA; X — Cl, Br, I) [24]. По сравнению с полупроводниками типа GaAs, в этих материалах кубической симметрии зоны перевернуты: валентная зона  $R_6^+$  (аналог зоны  $\Gamma_6$ ) простая, а зона проводимости состоит из двух подзон  $R_6^-$  и  $R_8^-$  (аналоги подзон  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8$ ) с отрицательной величиной спин-орбитального расщепления  $\Delta$ . Абсолютная величина спин-орбитального расщепления в свинцово-галогенидных перовскитах имеет порядок 1.5 еВ, а величина запрещенной зоны может меняться от 1.0 до 3.5 еВ в зависимости от состава. Соответственно,  $g$  фактор дырки изменяется в диапазоне от  $-3$  до  $+1.5$  [24].

### 4. Электронный $g$ фактор в квантовых ямах и других двумерных системах

Впервые электронный  $g$  фактор в структуре с квантовой ямой был рассчитан в работе [57], см. также [58–60]. Расчет проводился в модели Кейна, в которой точно

учитывается  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  смешивание зон  $\Gamma_6$ ,  $\Gamma_7$  и  $\Gamma_8$ . Волновая функция электрона ищется в виде

$$\Psi = u_{\frac{1}{2}}(z) \uparrow S + u_{-\frac{1}{2}}(z) \downarrow S + \sum_{i=x,y,z} \left( v_{i,\frac{1}{2}}(z) \uparrow R_i + v_{i,-\frac{1}{2}}(z) \downarrow R_i \right), \quad (16)$$

где  $S(\mathbf{r})$  и  $R_i(\mathbf{r}) = X, Y, Z$  — орбитальные блоховские функции на дне зоны проводимости и потолке валентной зоны, рассчитанные в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием,  $\uparrow$  и  $\downarrow$  — спиновые столбцы,  $u_{\pm 1/2}$  и  $v_{i,\pm 1/2}$  — плавные огибающие. Рассматривается трехслойная гетероструктура, состоящая из слоя материала А (яма), помещенного между полубесконечными слоями барьера В, при этом ось  $z \parallel [001]$  перпендикулярна плоскости интерфейсов. Плавные огибающие, представленные в виде двухкомпонентных столбцов  $u$  и  $v$ , удовлетворяют условию нормировки

$$\int d\mathbf{r} (u^\dagger u + v^\dagger \cdot v) = 1$$

и уравнениям

$$Eu = -iP\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}, \\ \left( E + E_g + \frac{\Delta}{3} \right) \mathbf{v} = iP\hat{\mathbf{k}}u + i\frac{\Delta}{3} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{v}. \quad (18)$$

Здесь  $P = i\hbar p_{cv}/m_0 = \hbar^2 \langle S | \nabla_z | Z \rangle / m_0$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ . Параметры  $E_g$ ,  $\Delta$  и  $P$  различны для материалов А и В, энергия электрона  $E$  отсчитывается от дна зоны проводимости соответствующего материала. В отличие от объемного кристалла, для нахождения электронных состояний в гетероструктуре требуется ввести граничные условия на интерфейсах. В [57] использовались граничные условия

$$\left( u_{\pm \frac{1}{2}} \right)_{z=-0} = \left( u_{\pm \frac{1}{2}} \right)_{z=+0}, \\ \left( Pv_{z;\pm \frac{1}{2}} \right)_{z=-0} = \left( Pv_{z;\pm \frac{1}{2}} \right)_{z=+0}, \quad (19)$$

где  $z = \pm 0$  — предельные положения материалов справа и слева от интерфейса. При  $P_A = P_B$  эти условия переходят в граничные условия Суриса [61]. Это приближение соответствует малому разбросу величины энергии Кейна  $E_p = 2m_0 P^2 / \hbar^2$ .

Имеется несколько эквивалентных процедур расчета поперечного и продольного  $g$  факторов  $g_\perp$  и  $g_\parallel$ , здесь мы следуем работе [60]. Поперечный  $g$  фактор рассчитывался по формуле

$$\frac{1}{2} \mu_B \sigma_{i,ss'} g_{ij} B_j = \frac{1}{2} g_0 \mu_B \eta_{i,ss'} B_j + V_{ss'}, \quad (20)$$

где

$$V_{ss'} = -i \frac{e}{c \hbar} \int P \left[ (\mathbf{A} \mathbf{v}_s^+) u_{s'} - u_s^+ (\mathbf{A} \mathbf{v}_{s'}) \right] d\mathbf{r}, \\ \eta_{i,ss'} = \langle e1, s | \sigma_i | e1, s' \rangle, \quad (21)$$

состояния  $|e1, s\rangle$  — решения  $u_s(z)$ ,  $v_s(z)$  уравнений (18) с заданным направлением спина:  $u_s(z) \neq 0$ ,  $u_{-s}(z) \equiv 0$ .

Для нахождения компоненты  $g_\perp$  можно взять векторный потенциал  $\mathbf{A}$  в калибровке  $(0, -B_x z, 0)$  или  $(B_y z, 0, 0)$ . Формула (20) применима также для расчета  $g$  факторов в квантовых проволоках и квантовых точках. В [59] для нахождения продольного  $g$  фактора в квантовой яме ширины  $L$  рассчитывалась компонента  $g_{zz}$  в квантовой проволоке с прямоугольном сечением  $2b \times L$  с ребрами, перпендикулярными осям  $z$  и  $x$ , и в калибровке  $\mathbf{A} = (0, B_z x, 0)$ , а затем находилось предельное значение  $g_{zz}$  при  $b \rightarrow \infty$ .

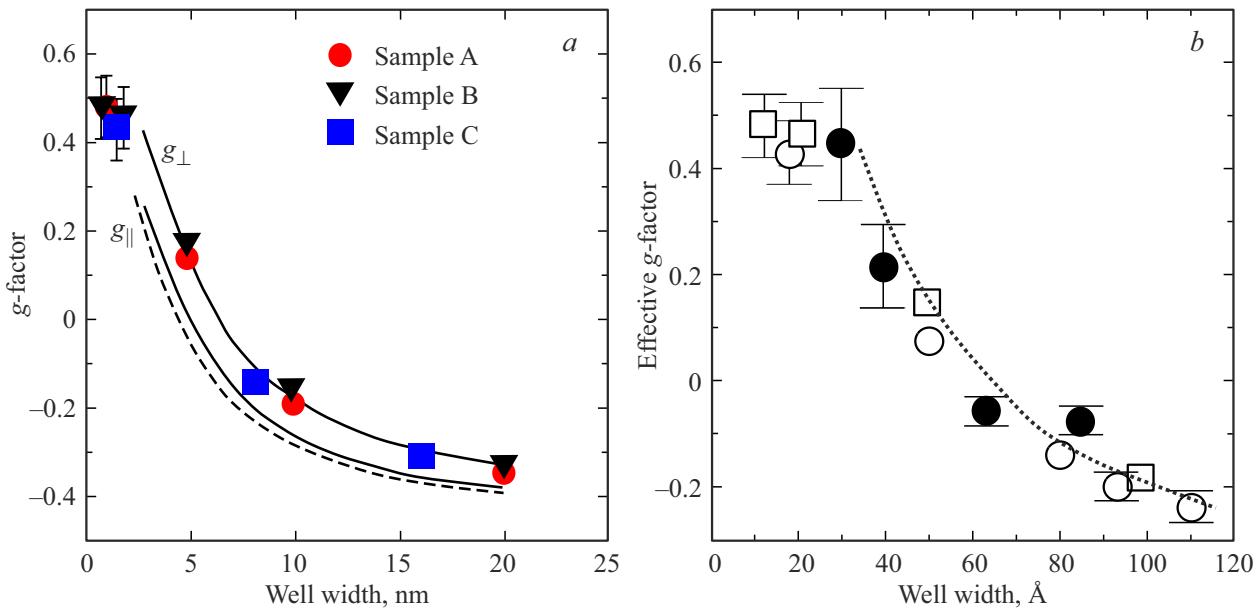
На рис. 6, *a* и *b*, представлены экспериментальные данные [62–64] по измерению поперечного  $g$  фактора электрона в структуре с квантовой ямой GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As в зависимости от ширины ямы. Кроме экспериментальных точек, авторы привели теоретические кривые, рассчитанные в работе [57]. Видно, что получено хорошее согласие между теорией и экспериментом.

В работе [57] была предсказана заметная анизотропия  $g$  факторов электрона в квантовой яме, кривые  $g_\perp$  и  $g_\parallel$  на рис. 6, *a* [62]. Эта анизотропия была экспериментально обнаружена в ряде работ, см. [39, 65, 66]. В работе [67] было теоретически показано, что продольная компонента  $g$  фактора электрона более чувствительна к приложению внешнего электрического поля, чем поперечная.

Эффект Зеемана своеобразно проявляется в монослоях дихалькогенидов переходных металлов  $MX_2$  [28, 68, 69]. В этих двумерных материалах экстремально малой толщины дно зоны проводимости и потолок валентной зоны находятся в вершинах  $\mathbf{K}_\pm$  шестиугольной зоны Брюлиэна. При этом электронные и дырочные состояния в этих точках расщеплены по спину уже в нулевом магнитном поле. Под  $g$  факторами понимаются параметры  $g_{c,v}^{|\mathbf{K}_-} = g_{c,v}^{|\mathbf{K}_+}$ , описывающие линейные по внешнему магнитному полю сдвиги энергии носителя заряда на нижнем спиновом подуровне в долинах  $\mathbf{K}_+$  и  $\mathbf{K}_-$ . Исследования показали, что основной вклад в  $g$  фактор экспитона  $g_{X^0} = g_e - g_v$  вносят удаленные зоны: верхняя зона проводимости  $c+2$  и нижняя валентная зона  $v-3$  (в обозначениях [28, 68], см. рис. 3, 4 и табл. 1 в [68]). Хорошее согласие с экспериментальными данными для монослоя WSe<sub>2</sub> получен в расчетах методом функционала плотности [69] для  $g$  фактора светлого ( $g_{DFT} = -4.0$ ,  $g_{exp} = -4.1$ ) и темного ( $g_{DFT} = 10.1$ ,  $g_{exp} = 9.4$ ) экситонов.

## 5. Электронный $g$ фактор в квантовых точках и нанокристаллах

Размерная зависимость  $g$  фактора электрона в квантовых точках и нанокристаллах (НК) изучалась в работах [41, 58, 59, 70–76]. В работах [58, 59] формула (20) была применена также для расчета  $g$  факторов в квантовых проволоках и квантовых точках. В сферических квантовых точках компоненту зоны проводимости



**Рис. 6.** Экспериментальные результаты по измерению поперечного  $g$  фактора электрона в структуре с квантовой ямой GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As в зависимости от ширины ямы. (a) Данные для трех образцов А ( $x = 0.35$ ), В ( $x = 0.3$ ) и С ( $x = 0.27$ ) [62]. Штриховая и сплошные линии показывают результаты теоретического расчета в однозонном приближении и в модели Кейна из работы [57]. (b) Данные для  $x = 0.3$ , приведенные в статье [63] из работ [62] (открытые квадраты), [63] (черные кружки) и [64] (открытые кружки), пунктирная линия — результаты теоретического расчета из работы [57].

в огибающей волновой функции электрона в основном состоянии можно искать в виде  $u_s(\mathbf{r}) = Y_{00}f(r)c_s$ , где  $c_s$  ( $s = \pm 1/2$ ) описывает спиновые состояния,  $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$  — сферическая гармоника углового момента  $l = 0$ ,  $f(r)$  — вещественная радиальная волновая функция [59,70]. В результате  $g$  фактор электрона в квантовой точке со сферической границей между двумя материалами А и В при  $r = R$  описывается формулой

$$g - g_0 = [g_A(E) - g_0]w_A + [g_B(E) - g_0]w_B + [g_B(E) - g_A(E)]w_{\text{surf}}, \quad (22)$$

$$w_{A,B} = \int_{A,B} f^2(r)r^2 dr, \quad w_{\text{surf}} = f^2(R) \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Первые два слагаемых в правой части выражения (22) описывают объемные вклады областей А и В с учетом зависящих от энергии  $g$  факторов  $g_{A,B}(E)$  согласно

$$g(E) = g_0 - \frac{2E_p}{3} \frac{\Delta}{(E_g + E)(E_g + E + \Delta)}. \quad (23)$$

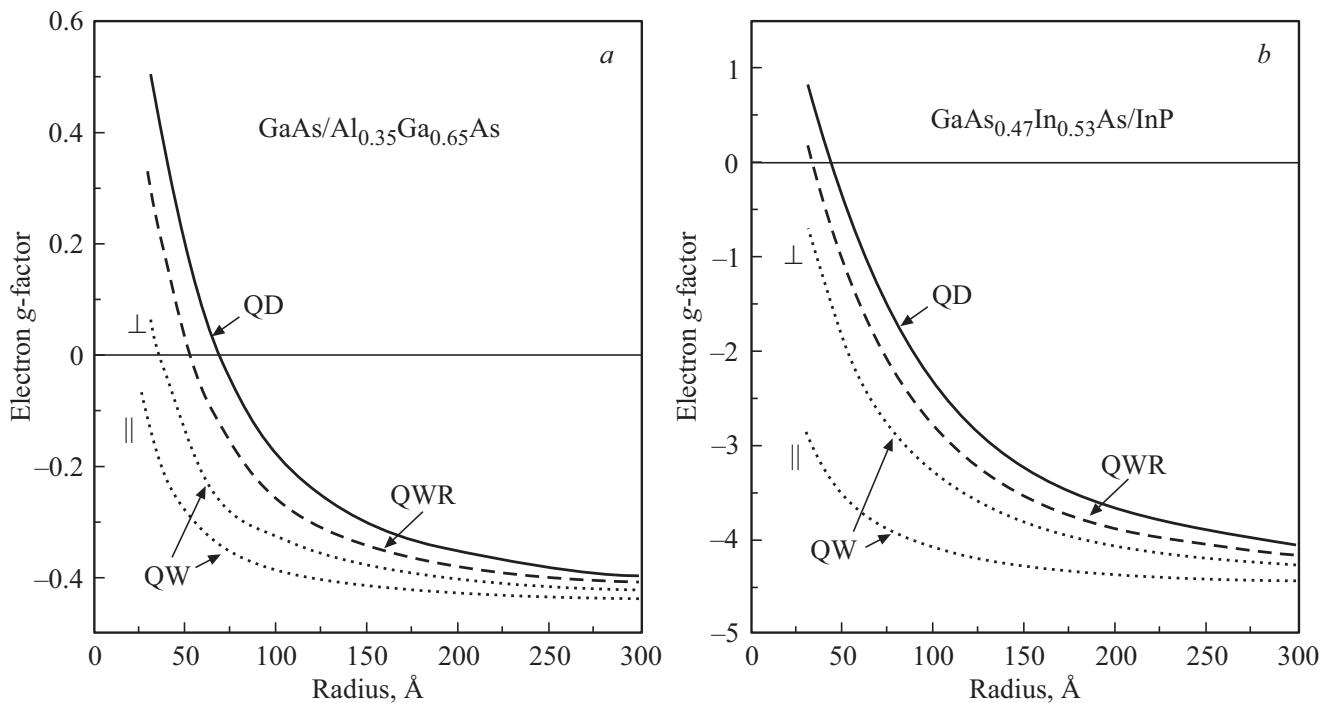
Отметим, что  $w_A + w_B < 1$  в силу условия нормировки (17). Третье слагаемое в правой части выражения (22) описывает интерфейсный вклад. Формула (22) может быть адаптирована для расчета  $g$  фактора электрона в цилиндрических квантовых проволоках, а также для расчета поперечного  $g$  фактора в квантовых ямах.

Рис. 7 показывает рассчитанные в работе [59] размерные зависимости  $g$  факторов в гетероструктурных

сферических квантовых точках, цилиндрических квантовых проволоках и квантовых ямах. В пределе больших радиусов  $R$  значения  $g$  фактора стремятся к объемному значению  $g_A$ . Для лучшего согласия к  $g$  добавлялась величина  $g_{rb}$ , соответствующая вкладу удаленных зон в объемном полупроводнике  $g_A$ .

В полупроводниковых сферических нанокристаллах, выращенных в стеклянной матрице или синтезированных в коллоидном растворе, потенциальные барьеры на поверхности часто достаточно высоки и непроницаемы для электронной плотности, что соответствует равенству нулю потока плотности вероятности  $J_\tau(R) = 0$  через сферическую границу. Формула (22) может быть применена для расчета размерной зависимости  $g$  фактора в НК из материала А, если положить в ней  $g_B(E) \equiv g_0$ .

В случае применения граничного условия  $f(R) = 0$  интерфейсный (или поверхностный) вклад в  $g$  фактор электрона исчезает. Однако условие  $f(R) = 0$  не является единственным возможным, гарантирующим  $J_\tau(R) = 0$  для непроницаемого барьера. Дело в том, что компонента валентной зоны  $v(R) \propto df/dr \neq 0$ . В работе [70] были предложены обобщенные граничные условия, гарантирующие  $J_\tau(R) = 0$  и характеризующиеся поверхностным параметром  $A_e$ . Параметр  $A_e$  имеет размерность длины и характеризует приповерхностный слой. В этом случае, поверхностный вклад  $g_{\text{surf}} \neq 0$  и его значение, как и размерная зависимость  $g$  фактора в целом, зависит от значения  $A_e$ . Моделирование измеренной в [41] по сигналу фарадеевского вращения в методе накачка–зондирование



**Рис. 7.** Зависимость  $g$  фактора электрона от радиуса  $R$  в сферических квантовых точках (сплошная линия, формула (22)), цилиндрических квантовых проволоках (штриховая), и квантовых ямах (пунктирная),  $R = L_z/2$  для гетероструктур (a) GaAs/Al<sub>0.35</sub>Ga<sub>0.65</sub>As и (b) Ga<sub>0.47</sub>In<sub>0.53</sub>As/InP. Рисунок из работы [59].

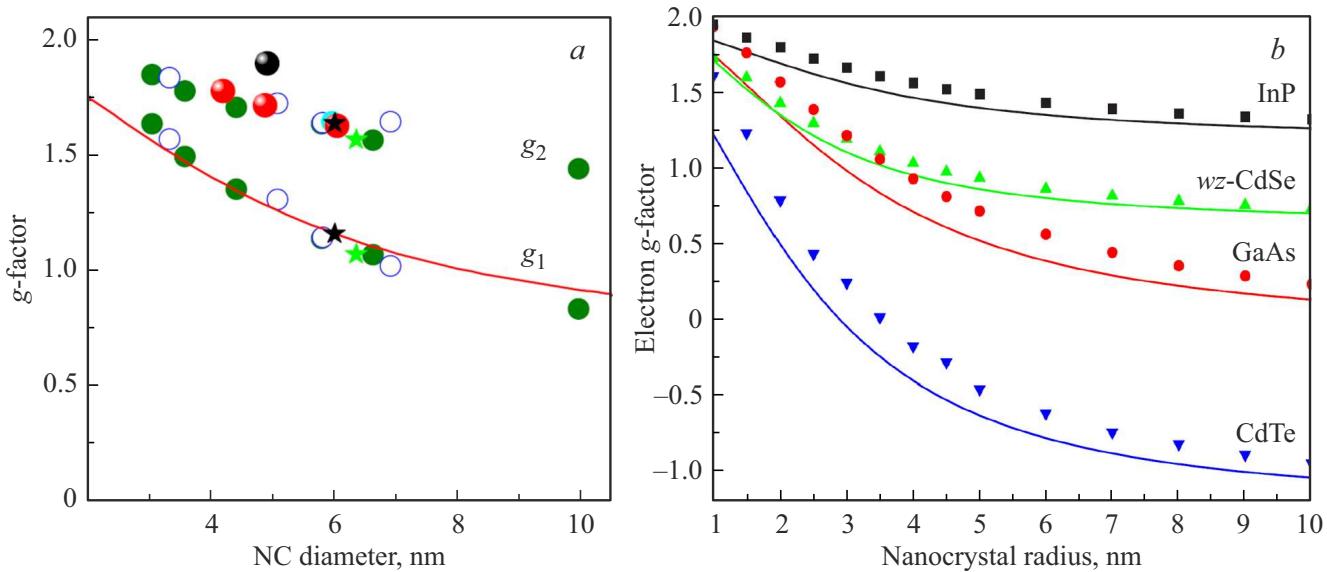
зависимости  $g$  фактора электрона на нижнем уровне размерного квантования от радиуса коллоидных нанокристаллов CdSe позволило определить оптимальное значение поверхностного параметра  $A_e = -0.06 \text{ nm}$  [41,70]. При этом наличие поверхностного вклада в магнитный момент электрона обусловлено дополнительным спинорбитальным взаимодействием в зоне проводимости, индуцированным подмешиванием состояний валентной зоны и наличием сферической границы.

Определенное в [41,70] значение  $A_e$  является дополнительным к использованному набору объемных параметров CdSe:  $E_p$ ,  $E_g$ ,  $\Delta$ ,  $g_{\text{surf}}$ . Позже были проведены дополнительные исследования размерной зависимости  $g$  фактора электрона в НК CdSe. Результаты измерений из различных работ собраны в работе [77] и показаны символами на рис. 8, a. Видно, что  $g$  фактор  $g_1$  электрона на нижнем уровне размерного квантования хорошо описывается формулой (22) с  $g_{\text{surf}} = 0$  для параметров CdSe [75]. Природа второго экспериментально наблюдавшегося в методе накачка–зондирование  $g$  фактора  $g_2$  с большей величиной точно неизвестна. С момента первого наблюдения в [41] выдвигались и проверялись различные гипотезы. В том числе было экспериментально [78] и теоретически [77] показано, что  $g_2$  нельзя отнести к  $g$  фактору экситона. Кроме того, теоретически показано [40], что даже при наличии анизотропии,  $g_{\parallel} \neq g_{\perp}$ , в вюрцитных или сфероидальных НК, при их произвольной ориентации в ансамбле наблюдаемая частота ларморовой прецессии всегда определяется

поперечным  $g$  фактором  $g_{\perp}$ . В настоящее время предполагается, что значение  $g_2$  соответствует электрону, дополнительно локализованному у поверхности [77,78]. Природа такой локализации, однако, не выяснена. Интересно отметить, что в то время как в коллоидных НК CdSe наблюдались оба электронных  $g$  фактора,  $g_1$  и  $g_2$ , в НК CdSe в стеклянной матрице наблюдался только  $g_2$ , как в методе накачка–зондирование [77], так и в методе неупругого рассеяния света с переворотом спина в недавней работе [79].

На рис. 8, b показано сравнение зависимостей  $g$  фактора электрона на нижнем уровне размерного квантования от радиуса НК, рассчитанных в методе сильной связи в работе [72] и по формуле (22) для разных материалов при одинаковых зонных параметрах и  $g_{\text{surf}} = 0$  [75]. Видно, что расчет в методе восьмизонной  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  модели хорошо согласуется с результатами атомистических расчетов.

Недавно в работе [76] было предложено расширение формулы Рота для расчета зависимости  $g$  фактора электрона от радиуса НК в рамках второго порядка теории возмущений с учетом взаимодействия электрона в основном состоянии с квантово-размерными состояниями дырок в валентных подзонах  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$ . Взаимодействие не только с основным, но и возбужденными состояниями дырок становится возможным благодаря учету сложной структуры валентной зоны в рамках шестизонного гамильтониана Латтинжера [80]. Расчеты в [76] были проведены для НК CuCl, в которых



**Рис. 8.** Зависимость  $g$  фактора электрона от диаметра (а) или радиуса (б) сферического нанокристалла. (а) Символы показывают собранные в [77] экспериментально измеренные значения в нанокристаллах CdSe из различных работ, включая [41] (открытые кружки) и [78] (зеленые кружки) для коллоидных CdSe и [77] (красные и черные кружки) для CdSe в стекле. Сплошная линия показывает результат теоретического расчета по формуле (22) для параметров CdSe из [75]. (б) Сравнение результатов расчета по формуле (22) с результатами расчета в модели сильной связи [72] для разных материалов при одинаковых зонных параметрах [75].

$\Delta < 0$ , однако развитое обобщение применимо и для  $\Delta > 0$ .

Интересно, что несмотря на более чем сорок лет исследований НК CuCl в стеклянной матрице, с которых и началась история квантовых точек [81], до последнего времени не была изучена размерная зависимость  $g$  фактора электрона. В недавних магнитооптических исследованиях НК CuCl в стеклянной матрице была измерена зависимость ларморовой частоты (по сигналу эллиптичности в методе накачка–зондирование) и энергии стоксова сдвига в методе комбинационного рассеяния света с переворотом спина в магнитном поле от энергии возбуждения и, таким образом, от радиуса НК [76]. При этом неизвестно,  $g$  фактору какого резидентного носителя заряда (электрона или дырки) или экситона соответствует наблюдаемая зависимость. Нанокристаллы CuCl не были намеренно легированы, и резидентные носители обоих типов могли создаваться в процессе фотозарядки. По порядку величины измеренный  $g$  фактор близок к  $g$  фактору электрона в объемном CuCl, величина которого  $2.03 > 2$  обусловлена отрицательной величиной спин-орбитального расщепления валентной зоны  $\Delta < 0$ . Вклад валентной зоны в  $g$  фактор электрона параметрически мал в силу большой величины  $E_g$  и убывает с ростом энергии размерного квантования электрона. Таким образом, как формула Рот, так и уточненная теория предсказывают уменьшение  $g$  фактора электрона с уменьшением радиуса НК, тогда как в эксперименте наблюдается увеличение  $g$  фактора с ростом энергии [76].

## 6. Дырочный $g$ фактор

Валентная зона элементарных полупроводников Si, Ge (структуря алмаза, симметрия  $O_h$ ) и полупроводников групп  $A_3B_5$  и  $A_2B_6$  (структуря цинковой обманки, кубическая симметрии  $T_d$ ) образована из атомных  $p$ -орбиталей и характеризуется орбитальным моментом  $I = 1$ . Спин-орбитальное взаимодействие приводит к расщеплению сложной валентной зоны на верхнюю зону  $\Gamma_8^+$  (или  $\Gamma_8$  в случае симметрии  $T_d$ ) и спин-орбитально отщепленную зону  $\Gamma_7^+$  (или  $\Gamma_7$ ).

Состояние дырки в вершине валентной зоны  $\Gamma_8^+$  или  $\Gamma_8$  четырехкратно вырождено, и эффективный дырочный гамильтониан имеет вид матрицы размерности  $4 \times 4$ . Зеемановский гамильтониан для дырок в такой зоне, впервые предложенный Х.М. Латтинжером (J.M. Luttinger) в 1956 г. [80], характеризуется двумя константами и имеет вид [82,83]

$$\hat{H}_Z^{(\Gamma_8)} = 2\mu_B [\kappa \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} + q (J_x^3 B_x + J_y^3 B_y + J_z^3 B_z)], \quad (24)$$

где  $J_i$  ( $i = x, y, z$ ) — матрицы углового момента  $J = 3/2$ . Следуя работе [80], часто в литературе используются константы с противоположными знаками  $\kappa = -\kappa$  и  $q = -q$ .

Безразмерный параметр  $\kappa$  и параметры Латтинжера  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  рассчитывались в рамках  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  теории возмущений в работах [10,84]. Каждый из них был выражен в виде линейной комбинации четырех параметров  $F, G, H_1, H_2$ , вклады в которые вносят соответственно зоны  $\Gamma_2^-, \Gamma_{12}^-, \Gamma_{15}^-, \Gamma_{25}^-$  в группе  $O_h$  или  $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_4$  в

группе  $T_d$ . Так как даже в 30-зонной  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  модели зона  $\Gamma_{25}^-$  или  $\Gamma_4$  отсутствует [84,85], то параметр  $H_2$  можно положить равным нулю. Обратив связь между параметрами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  и  $F, G, H_1$ , можно выразить коэффициент  $\chi$  через параметры Латтинжера [86]:

$$\chi = -\kappa = -\frac{1}{3}(2 + \gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3). \quad (25)$$

Заметим, что учет в  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  методе только зон симметрии  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_5$  приводит к соотношению  $\gamma_1 = 3\gamma_3 - \gamma_2 - 1$  и упрощению выражения (25):  $\chi = \gamma_2 - \frac{1}{3}$ .

Второй магнитный параметр Латтинжера  $q = -\mathbf{q}$  описывает анизотропию эффекта Зеемана, допускаемую кубической симметрией точечных групп  $O_h$  или  $T_d$ . В  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  теории он возникает только за счет спин-орбитального подмешивания состояний из далеких зон к состояниям валентной зоны  $\Gamma_8$ , и обычно им можно пренебречь [87,88]. В этом случае зеемановское расщепление дырки не зависит от направления магнитного поля и может быть описано изотропным эффективным гамильтонианом

$$\hat{H}_Z^{(\Gamma_8)} = -2\chi\mu_B \mathbf{J}\mathbf{B}. \quad (26)$$

Состояния дырки, размерно-квантованной вnanoструктуре, существенно отличаются от объемных. В случае сферически симметричных структур и в приближении изотропного гамильтониана Латтинжера ( $\gamma_2 = \gamma_3 \equiv \gamma$ ) хорошим квантовым числом становится полный момент дырки  $\mathfrak{J} = \mathbf{J} + \mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{k}$  — безразмерный орбитальный момент дырки;  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{k}$  — радиус-вектор и волновой вектор дырки, соответственно. При этом зеемановское расщепление дырки также не зависит от направления магнитного поля и может быть описано изотропным эффективным гамильтонианом [89,90]

$$\hat{H}_Z^{\text{sph}} = -g_h^{\text{sph}}\mu_B \mathfrak{J} \mathbf{B}. \quad (27)$$

При локализации дырки в структурах с одноосной симметрией хорошим квантовым числом остается только проекция  $\mathfrak{J}$  на выделенную ось  $z$ . В этом случае для направления магнитного поля вдоль или поперек оси  $z$ , зеемановское расщепление  $\Delta E_M = E_M - E_{-M}$  тяжелых ( $M \equiv \mathcal{J}_z = \pm 3/2$ ) и легких ( $M = \pm 1/2$ ) дырок описывается эффективными  $g$  факторами, зависящими от  $|M|$ . В частности, продольный  $g$  фактор (для магнитного поля вдоль оси  $z$ ) определен как

$$g_{|M|}^{\parallel} = -\frac{\Delta E_M}{2M\mu_B B}. \quad (28)$$

Определения дырочного  $g$  фактора согласно (27) и (28) часто используются в физике коллоидных нанокристаллов [75,86,89,90]. Отметим, однако, что часто применяется определение для  $g$  фактора дырки с противоположным знаком, см., например, [87,91–93]. Более того, для структур с сильным расщеплением легких и тяжелых дырок, например, квантовых ям, зеемановское

расщепление тяжелых дырок часто определяется как  $\Delta E_{3/2} = E_{+3/2} - E_{-3/2} = g_{hh}\mu_B B_z$ , где  $g_{hh} = -3g_{3/2}^{\parallel}$  [91]. Перечисленные определения дырочного  $g$  фактора используются для описания одной и той же зависимости зеемановского расщепления дырки от магнитного поля, однако нужно проявлять внимательность при сравнении величин  $g$  факторов дырки, приведенных в различных источниках.

При локализации дырки в nanoструктуре происходит смешивание состояний с разными проекциями углового момента на направление магнитного поля, что ведет к существенной перенормировке зеемановского вклада (26) в  $g$  фактор локализованной дырки. Кроме того, для локализованных дырок возникает еще один, орбитальный, вклад в гамильтониан во внешнем магнитном поле. Описывающее его возмущение может быть получено заменой волнового вектора дырки  $\mathbf{k}$  в гамильтониане Латтинжера для кинетической энергии дырки на  $\mathbf{k} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля, и выделением линейных по полу членов. В явном виде это возмущение приведено в работах [75,86]. Итоговое зеемановское расщепление локализованной дырки существенным образом зависит от формы nanoструктуры.

В сферически- или кубически-симметричной системе основное состояние дырки из валентной подзоны  $\Gamma_8$  в нулевом магнитном поле четырехкратно вырождено. В рамках изотропного приближения волновая функция нижнего по энергии четного состояния дырки с полным моментом  $\mathcal{J} = 3/2$ , которое в большинстве случаев является основным, имеет вид [94,95]

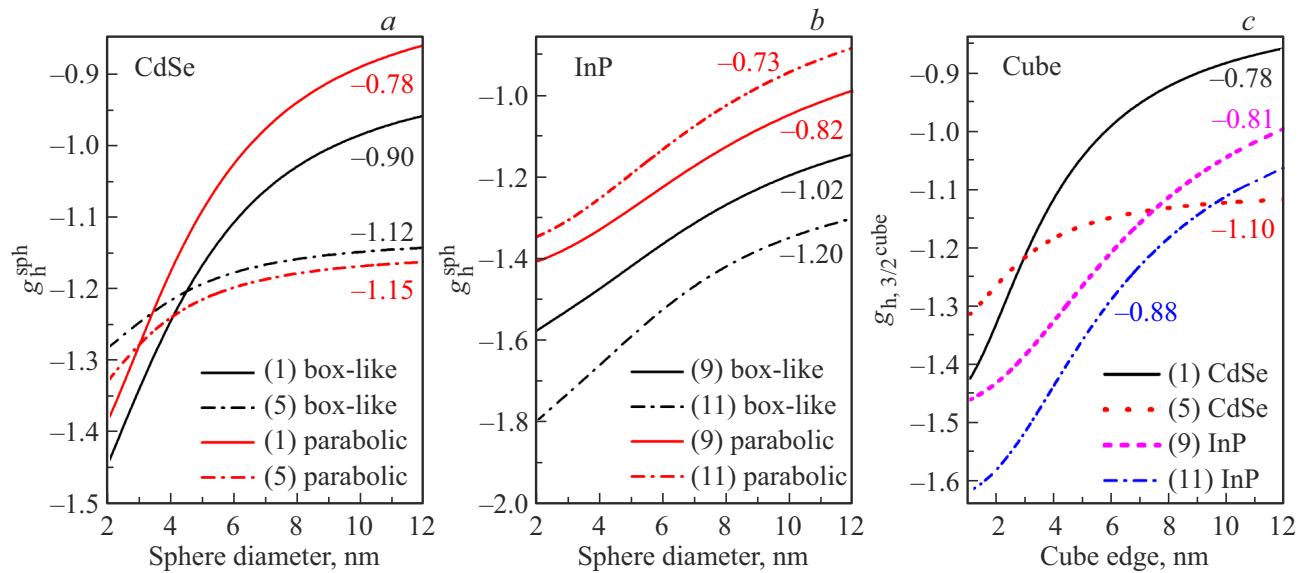
$$\Psi_M = 2 \sum_{l=0,2} (-1)^{l-3/2+M} (i)^l R_l(r) \times \sum_{m+\mu=M} \begin{pmatrix} l & 3/2 & \mathcal{J} \\ m & \mu & -M \end{pmatrix} Y_{l,m} u_\mu. \quad (29)$$

Здесь  $Y_{l,m}$  — сферические функции [96,97],  $\begin{pmatrix} i & k & l \\ m & n & p \end{pmatrix}$  —  $3j$  символы Вигнера,  $u_\mu$  — блоховские функции в валентной зоне  $\Gamma_8$  с проекцией спина  $\mu$  на ось  $z$  [82],  $R_l(r)$  — радиальные функции, конкретный вид которых зависит от вида локализующего потенциала и параметров зонной структуры. В работе [98] было получено выражение для  $g$  фактора основного состояния дырки, локализованной на мелком акцепторе. Мы приводим это выражение в виде, справедливом для дырки, локализованной в любом сферически-симметричном потенциале, в том числе в сферических гетероструктурах типа ядро/оболочка [75].

$$g_h^{\text{sph}} = 2\chi + \frac{4}{5}I_1^g + \frac{4}{5}I_2^g(\gamma_1 - 2\gamma - 2\chi), \quad (30)$$

$$I_1^g = \frac{1}{2} \int r^3 dr \left( R_2 \frac{dR_0}{dr} - R_0 \frac{dR_2}{dr} - \frac{3}{r} R_0 R_2 \right),$$

$$I_2^g = \int r^2 dr R_2^2.$$



**Рис. 9.** Зависимость  $g$  фактора дырки от линейного размера сферического нанокристалла (*a, b*) с жестким потенциалом (сплошные кривые) и плавным параболическим потенциалом (штрих-пунктирные кривые), а также нанокристалла кубической формы (*c*) с жестким потенциалом. Числа в скобках указывают строки в таблице I работы [75], в которой даны параметры шестизонного гамильтониана для CdSe и InP. Числа при кривых указывают асимптотические значения  $g$  фактора дырки в нанокристаллах большого размера, которые могут быть рассчитаны в рамках четырехзонного гамильтониана Латтинжера. Рисунок из работы [75].

Здесь  $\gamma = (2\gamma_2 + 3\gamma_3)/5$  соответствует изотропному приближению гамильтониана Латтинжера. Выражение (30) позволяет вычислить изотропный  $g$  фактор дырки после нахождения радиальных волновых функций в заданном сферически-симметричном потенциале. При этом  $g$  фактор  $g_h^{\text{sph}}$ , вычисленный по формуле (30), не зависит от размера области локализации. Это общее свойство четырехзонной модели Латтинжера: вычисленный с ее помощью дырочный  $g$  фактор зависит только от симметрии и типа локализующего потенциала, но не от линейных размеров области локализации [99].

Минимальным гамильтонианом, позволяющим описать размерную зависимость  $g$  фактора дырки является шестизонный гамильтониан, одновременно учитывающий состояния в валентных зонах  $\Gamma_8^+$  и  $\Gamma_7^+$  (или  $\Gamma_8$  и  $\Gamma_7$ ) [75, 82, 92]. Дело в том, что четырехзоная модель хорошо описывает только состояния с малыми волновыми векторами  $\mathbf{k}$  вблизи вершины валентной зоны  $\Gamma_8$ . Однако при уменьшении размера области локализации, например, размера нанокристалла, возрастает энергия размерного квантования  $E_h$  и значения волновых векторов  $k_h$  в волновой функции дырки. При энергиях  $E_h$ , сопоставимых с величиной спин-орбитального расщепления валентной зоны  $\Delta$ , подмешивание состояний из спин-отщепленной зоны  $\Gamma_7$  к состояниям из верхней зоны  $\Gamma_8$  становится существенным и приводит к зависимости  $g$  фактора дырки от размера. При этом сумма дырочных спин-орбитального и зеемановского гамильтонианов, учитывающих вклады обеих валентных зон, имеет

вид [80]:

$$\hat{H}_{\text{so}} + \hat{H}_Z^{(\Gamma_8 + \Gamma_7)} = -\frac{2}{3} \Delta(\mathbf{sI}) + g_0 \mu_B (\mathbf{sB}) - (1 + 3\chi) \mu_B (\mathbf{IB}). \quad (31)$$

Здесь  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ ,  $\mathbf{I} = (I_x, I_y, I_z)$ ,  $I_\alpha$  — матрицы углового момента  $I = 1$  размерности  $3 \times 3$ , первое слагаемое описывает спин-орбитальное взаимодействие, второе слагаемое есть спиновый вклад в зеемановское расщепление, аналогичный вкладу для электронов (3), третье слагаемое — вклад внутреннего орбитального момента. В работе [75] выражение (30) для  $g$  фактора, описывающее расщепление дырки с полным моментом  $\mathcal{J} = 3/2$ , где  $\mathcal{J} = \mathbf{s} + \mathbf{I} + \mathbf{l}$ , обобщено для шестизонной модели с положительным спин-орбитальным расщеплением  $\Delta > 0$ . Аналогичное выражение для  $g$  фактора дырки, описывающее расщепление двухкратновырожденного состояния дырки с  $\mathcal{J} = 1/2$  (при отрицательной величине  $\Delta < 0$ , когда подзона  $\Gamma_7$  находится в вершине валентной зоны), приведено в работе [76].

На рис. 9 показаны примеры расчета зависимости  $g$  фактора дырки от линейного размера нанокристалла сферической, панели (*a, b*), или кубической, панель (*c*), формы [75]. Для сферических нанокристаллов рассмотрены два типа локализующих потенциалов: жесткий потенциал с бесконечно высоким барьером и плавный параболический потенциал. На всех панелях рис. 9 видна существенная размерная зависимость  $g$  фактора дырки в основном состоянии, появляющаяся из разной степени подмешивания состояний спин-орбитально отщепленной зоны. При этом, чем меньше величина  $\Delta$  (например, в

InP  $\Delta \approx 0.1$  eV), тем при больших размерах нанокристаллов достигаются асимптотические значения, справедливые для состояний дырки с энергиями квантования, много меньшими  $\Delta$ . Интересно, что асимптотические значения  $g$  факторов дырки, локализованной в сферических и кубических нанокристаллах большого размера, лежат около величины  $-1$  [73, 75]. Для других наноструктур, например, квантовых проволок, а также для квантовых ям и планарных нанокристаллов зависимость  $g$  фактора от зонных параметров и типа локализующего потенциала оказывается более существенной, вплоть до смены знака [73].

Для дырки, локализованной в полупроводниковой наноструктуре, помимо изотропного вклада в  $g$  фактор, присутствует и анизотропный вклад, симметрия которого определяется симметрией системы. В общем случае эффект Зеемана можно описать тензорами второго и четвертого ранга

$$\hat{H}_Z^{\text{cube}} = -g_{\alpha\beta}^h \mathcal{J}_\alpha B_\beta - 2\mu_B Q_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{J}_\alpha \mathcal{J}_\beta \mathcal{J}_\gamma B_\delta, \quad (32)$$

где тензор  $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$  симметричен к перестановкам первых трех индексов. В максимально низкосимметричной структуре (точечная группа  $C_1$ ) он имеет 30 линейно независимых компонент. Так как сумма квадратов  $\mathcal{J}_x^2 + \mathcal{J}_y^2 + \mathcal{J}_z^2$  для состояний с заданным  $\mathcal{J}$  есть единичная матрица  $\mathcal{J}(\mathcal{J}+1)$ , остается 21 линейно независимая компонента тензора  $Q$ , при этом происходит перенормировка тензора  $\mathbf{g}^h$ . В структуре с точечной группой симметрии  $O_h$  или  $T_d$  первый тензор диагонален:  $g_{\alpha\beta}^h = g_{zz}^h \delta_{\alpha\beta}$ , а вклад тензора четвертого ранга сводится к линейной комбинации матриц  $\tilde{\mathcal{J}} \mathbf{B}$  и  $\sum_\alpha \mathcal{J}_\alpha^3 B_\alpha$ . Тогда выражение (32) приводится к виду [82, 86, 100]

$$\hat{H}_Z^{\text{cube}} = -g_h \mu_B (\tilde{\mathcal{J}} \mathbf{B}) - 2Q^{\text{eff}} \mu_B (\mathcal{J}_x^3 B_x + \mathcal{J}_y^3 B_y + \mathcal{J}_z^3 B_z). \quad (33)$$

Помимо малого кристаллографического вклада  $\propto q$ , „источником“ кубической анизотропии могут быть также кубическая анизотропия дисперсии дырки, характеризуемая параметром  $(\gamma_2 - \gamma_3)/\gamma$ , и форма наноструктуры. При этом в случае сферически-симметричной формы нанокристалла параметр  $g_h$ , описывающий изотропный вклад, отличается от параметра изотропной модели  $g_h^{\text{sph}}$  (30), так как содержит поправку, обусловленную кубическим возмущением  $\propto (\gamma_2 - \gamma_3)/\gamma$ .

В работе [86] показано, что кубически-симметричные вклады в  $g$  фактор дырки (параметр  $Q^{\text{eff}}$ ), связанные с гофрировкой валентной зоны в сферических и кубических нанокристаллах, а также связанные с формой в наноструктурах кубической формы, выращенных вдоль одной из кристаллографических осей кристалла, могут быть сравнимы с изотропной частью  $\propto g_h$ . Ранее аналогичный и сопоставимый по величине вклад в  $Q^{\text{eff}}$  за счет гофрировки валентной зоны был получен в работе [100] для дырки, локализованной на акцепторе в кубических полупроводниках.

Влияние кубической симметрии на  $g$  фактор дырки в сферических и кубических нанокристаллах CdSe иллюстрирует рис. 10 из работы [86]. На панели (a) показаны поверхности постоянной энергии объемных тяжелых и легких дырок в плоскости  $(k_x, k_y)$  при  $k_z = 0$ , где ось  $z$  направлена вдоль одной из кристаллографических осей  $\langle 100 \rangle$ , см., например, формулу (24.13а) в книге [82]. Панели (b) и (c) показывают поверхности постоянного зеемановского расщепления, см., например, формулы (39.21а) и (39.21б) в книге [82], для состояний дырок в сферических и кубических нанокристаллах с жестким потенциалом. Сплошные кривые рассчитаны с учетом гофрировки валентной зоны, пунктирные соответствуют сферическому приближению для гамильтониана Латтинжера. Видно, что в сферических нанокристаллах, панель (b), кривые, вычисленные в сферическом приближении для гамильтониана Латтинжера, имеют форму окружности, а при учете гофрировки валентной зоны проявляется кубическая анизотропия. Для нанокристаллов в форме куба, панель (c), анизотропия имеет место уже в сферическом приближении для гамильтониана Латтинжера. В работе [86] показано, что вклады в  $Q^{\text{eff}}$ , обусловленные формой нанокристалла и гофрировкой валентной зоны, могут быть сопоставимы и иметь одинаковые или противоположные знаки в зависимости от зонных параметров материала.

При наличии дополнительной одноосной анизотропии, например вдоль оси  $z$ , совпадающей с кристаллографическим направлением  $[001]$  (точечная группа  $D_{4h}$  или  $D_{2d}$ ), оси  $z$  и  $x$ ,  $y$  становятся неэквивалентными. В этом случае состояния тяжелой и легкой дырки расщепляются уже в нулевом магнитном поле. Эффективный гамильтониан (33) принимает вид

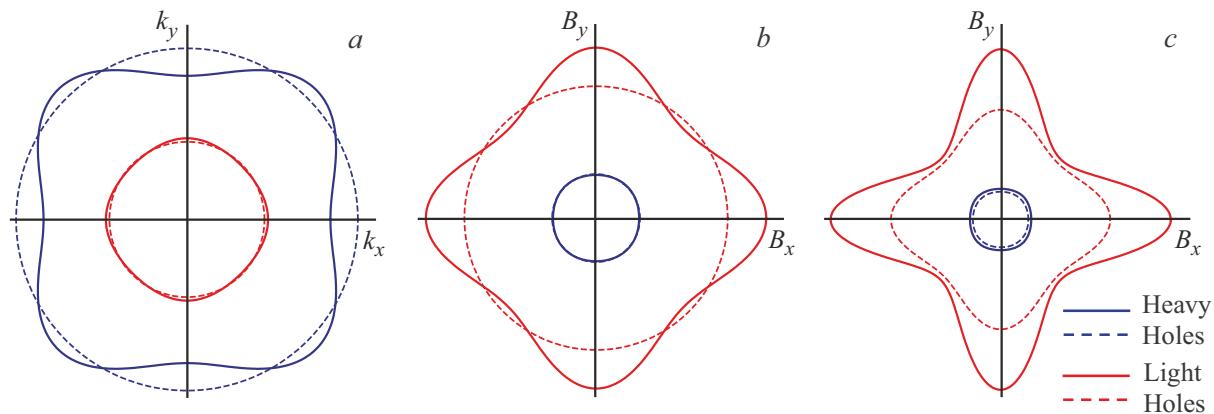
$$\begin{aligned} \hat{H}_Z^{\text{eff}} = & -\mu_B [g_\perp (\mathcal{J}_x B_x + \mathcal{J}_y B_y) + g_\parallel \mathcal{J}_z B_z] \\ & - 2\mu_B \left[ Q_\perp^{\text{eff}} (\mathcal{J}_x^3 B_x + \mathcal{J}_y^3 B_y) + Q_\parallel^{\text{eff}} \mathcal{J}_z^3 B_z \right. \\ & \left. + \tilde{Q} (B_x \{ \mathcal{J}_x, \mathcal{J}_z^2 \}_s + B_y \{ \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z^2 \}_s) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\{ \mathcal{A}, \mathcal{B} \}_s = \frac{1}{2} (\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A})$ .

Отметим, что в работе [86] последнее слагаемое с параметром  $\tilde{Q}$  было опущено. В малых магнитных полях, когда расщепление тяжелой ( $|M| = 3/2$ ) и легкой ( $|M| = 1/2$ ) дырки в нулевом поле больше чем зеемановское расщепление, вместо параметров  $g_\perp$ ,  $g_\parallel$ ,  $Q_\perp^{\text{eff}}$  и  $Q_\parallel^{\text{eff}}$  и  $\tilde{Q}$  удобно определить другие четыре параметра

$$\begin{aligned} g_{3/2}^\parallel &= g_\parallel + \frac{9}{2} Q_\parallel^{\text{eff}}, \quad g_{1/2}^\parallel = g_\parallel + \frac{1}{2} Q_\parallel^{\text{eff}}, \\ g_{3/2}^\perp &= Q_\perp^{\text{eff}}, \quad g_{1/2}^\perp = 2(g_\perp + \tilde{Q}) + 10Q_\perp^{\text{eff}}, \end{aligned} \quad (35)$$

имеющие смысл продольного и поперечного  $g$  факторов тяжелой и легкой дырки. Аналогичная ситуация реализуется в квантовых ямах или квантовых проволоках. В этом случае, если не учитывать других эффектов,



**Рис. 10.** (a) Поверхности постоянной энергии свободных тяжелых дырок (синие кривые) и легких дырок (красные кривые) в плоскости  $(k_x, k_y)$  при  $k_z = 0$  в объемном кристалле, (b) и (c) поверхности постоянного зеемановского расщепления для состояний тяжелых (синие кривые) и легких (красные кривые) дырок, вычисленные для сферических и кубических нанокристаллов с жестким потенциалом квантового ящика. Расчет выполнен для параметров CdSe:  $\gamma_1 = 2.52$ ,  $\gamma_2 = 0.65$ ,  $\gamma_3 = 0.95$ , пунктирные кривые соответствуют сферическому приближению для гамильтониана Латтинжера с  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0.83$ . Рисунок адаптирован из работы [86].

зеемановские расщепления как тяжелой, так и легкой дырки будут аксиально симметричны в плоскости структуры и зависеть только от угла  $\theta$  между направлением магнитного поля и осью структуры  $z$  [86]:

$$|\Delta E_M| = 2|M|\mu_B \sqrt{(g_{|M|}^{\parallel} B_z)^2 + (g_{|M|}^{\perp} B_{\perp})^2}, \quad (36)$$

где  $B_{\perp} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B \sin \theta$ . Из выражения (35) видно, что вклад параметров  $g_{\perp}$  и  $\tilde{Q}$  неразличим. При этом поперечный  $g$  фактор тяжелой дырки в структуре с сильным расщеплением тяжелой и легкой дырки не равен нулю лишь за счет кубического вклада  $Q_{\perp}^{\text{eff}}$ , что позволяет определить последний экспериментально или с помощью численного расчета. Например, в работе [101] экспериментально измерено значение  $Q_{\perp}^{\text{eff}}$  в цилиндрических квантовых точках InGaAs и показано, что он возникает за счет гофрировки валентной зоны. При дальнейшем понижении симметрии, например, до точечной группы  $C_{2v}$ , возможно появление дополнительных вкладов, например, интерфейсного смешивания тяжелых и легких дырок [102].

В структурах с квантовыми ямами состояния тяжелых и легких дырок сильно расщеплены в нулевом магнитном поле. В этом случае  $g$  фактор тяжелой дырки определяется подмешиванием состояний легкой дырки в меру конечной ширины квантовой ямы. Результаты последовательных расчетов в рамках восьмизонного гамильтониана, учитывающего как зону проводимости, так и всю валентную зону, для квантовых ям конечной толщины а также для сверхрешеток на основе полупроводников  $A_3B_5$  и  $A_2B_6$  представлены в работе [91]. Как уже отмечалось выше, в квантовых ямах зеемановское расщепление дырочных состояний, в отличие от сферически-симметричных структур, существенно анизотропно. Например, при направлении магнитного поля

в плоскости интерфейсов узкой квантовой ямы, в которой смешиванием тяжелых и легких дырок в нулевом поле можно пренебречь, зеемановское расщепление тяжелой дырки не равно нулю лишь за счет анизотропной части тензора  $g$  фактора.

В тонких квантовых ямах, выращенных вдоль кристаллической оси  $z$ , отличие компоненты  $g_{zz} \equiv g_{3/2}^{\parallel}$  тензора  $g$  фактора двумерной тяжелой дырки от  $g$  фактора объемной дырки  $2x$  может быть вычислено во втором порядке теории возмущений. В качестве возмущения выступает оператор, пропорциональный  $z$  компоненте оператора импульса  $\propto \hat{p}_z$  [103], обеспечивающего магнитоиндукционное смешивание основного состояния тяжелой дырки и возбужденных состояний легкой дырки. В квазидвумерных наноплателетах или сильно сплюснутых квантовых точках существенное влияние на смешивание состояний и, таким образом, на величину  $g$  фактора оказывает анизотропия размеров структуры в плоскости [75, 99]. Экспериментально влияние смешивания состояний тяжелой и легкой дырки на величину дырочного  $g$  фактора продемонстрирована в работе [104], в которой показано, что при приложении внешнего электрического поля, влияющего на форму дырочной волновой функции в структуре с нанокристаллами SiGe, возникает существенная модуляция дырочного  $g$  фактора. Влияние смешивания состояния дырок на компоненты  $g_{xx} = g_{yy} = g_{1/2}^{\perp}$  тензора  $g$  фактора легкой дырки в квантовых ямах исследовано в работе [105].

В расчетах зависимость  $g$  фактора основного состояния дырки от параметров системы оказывается плавной, чего нельзя сказать про  $g$  фактор возбужденных состояний. Это связано со смешиванием конкретного возбужденного состояния с другими состояниями и возможными резонансами при изменении параметров структуры. Этот эффект исследован в работах [106]

и [107] для  $g$  фактора легкой дырки в квантовых ямах. Показано, что в этом случае  $g$  фактор может достигать очень больших величин при сближении основной подзоны легкой дырки  $lh1$  с возбужденной подзоной тяжелой дырки  $hh2$ . Экспериментальные данные, приведенные в [107], подтверждают это теоретическое предсказание. Кроме того, для возбужденных состояний существенно возрастает роль параметризации зонной структуры и, например, эффектов смешивания состояний дырки на интерфейсах [102], возникающего при понижении симметрии.

## 7. Заключение

Фактор Ландé, или  $g$  фактор электронов, дырок и экситонов является ключевым, фундаментальным параметром в спиновой физике. В данном обзоре последовательно рассмотрены различные методы измерения электронного  $g$  фактора в объемных полупроводниках и полупроводниковых наноструктурах. В последующих разделах изложены методы расчета электронного и дырочного  $g$  факторов и указана их связь с параметрами зонной структуры полупроводников. Методы исследования эффекта Зеемана, разработанные для полупроводников со структурой алмаза, цинковой обманки и вюрцита, активно используются при изучении новых материалов, таких как полупроводниковые перовскиты, дихалькогениды переходных металлов и др. Анализ экспериментальных данных на базе развитых теоретических моделей помогает корректному определению величины  $g$  фактора, например, в неоднородных ансамблях локализованных экситонов [30,32,34]. В то же время, ряд полученных экспериментальных результатов, таких как размерные зависимости  $g$  фактора электрона в нанокристаллах CdSe [77] и CuCl [76] или  $g$  фактора дырки в нанокристаллах перовскитов [108,109] не удается объяснить с помощью развитых в настоящее время теоретических моделей. Это может стимулировать поиск новых физических неучтенных эффектов, скрывающихся за обнаруженными расхождениями.

## Благодарности

Авторы благодарны Д.Р. Яковлеву за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

## Финансирование работы

Работа А.В.Р. и М.А.С. по теории  $g$  фактора в нанокристаллах поддержана Российским научным фондом в рамках проекта № 23-12-00300. Работа Е.Л.И. по методам измерения и теории  $g$  фактора поддержана Российским научным фондом в рамках проекта № 23-12-00142.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] G.E. Uhlenbeck, S. Goudsmit. Nature **117**, 264 (1926).
- [2] P. Kusch, H.M. Foley. Phys. Rev. **74**, 250 (1948).
- [3] W.H. Louisell, R.W. Pidd, H.R. Crane. Phys. Rev. **90**, 7 (1954).
- [4] H.R. Crane. Scientific American **218**, 72 (1968) [русский перевод: УФН **96**, 153 (1968)].
- [5] Ph. Ekstrom, D. Wineland. Scientific American **243**, 90 (1980) [русский перевод: УФН **134**, 711 (1981)].
- [6] J.M. Brown, R.J. Buenker, A. Carrington, C. di Lauro, R.N. Dixon, R.W. Field, J.T. Hougen, W. Hüttner, K. Kuchitsu, M. Mehring, A.J. Merer, T.A. Miller, M. Quack, D.A. Ramsay, L. Veseth, R.N. Zare. Molecular Physics **98**, 1597 (2000).
- [7] Е.К. Завойский. J. Phys. USSR **9**, 245 (1945); ЖЭТФ **15**, 347 (1945); УФН **93**, 523 (1967).
- [8] G. Bemski. Phys. Rev. Lett. **4**, 62 (1960).
- [9] R.A. Isaacson. Phys. Rev. **169**, 312 (1968).
- [10] L.M. Roth, B. Lax, S. Zwerdling. Phys. Rev. **114**, 90 (1959).
- [11] B. Kowalski, H. Linke, P. Omling. Phys. Rev. B **54**, 8551 (1996).
- [12] H.W. van Kesteren, E.C. Cosman, F.J.A.M. Greidanus, P. Dawson, K.J. Moore, C.T. Foxon. Phys. Rev. Lett. **61**, 129 (1988).
- [13] N.G. Romanov, P.G. Baranov, I.V. Mashkov, P. Lavallard, R. Planell. Solid-State Electronics **37**, 911 (1994).
- [14] П.Г. Баранов, Н.Г. Романов, И.В. Машков, С. Гурдон, Р. Lavallard, R. Planell. Письма в ЖЭТФ **60**, 429 (1994).
- [15] Y. Yafet. Phys. Rev. **152**, 858 (1966).
- [16] R.E. Slusher, C.K.N. Patel, P.A. Fleury. Phys. Rev. Lett. **18**, 77 (1967).
- [17] D.G. Thomas, J.J. Hopfield. Phys. Rev. **175**, 1021 (1968).
- [18] J.F. Scott, T.C. Damen. Phys. Rev. Lett. **29**, 107 (1972).
- [19] E.N. Economou, J. Ruvalds, K.L. Ngai. Phys. Rev. Lett. **29**, 110 (1972).
- [20] Y. Oka, M. Cardona. Phys. Rev. B **23**, (1981).
- [21] D. Kudlacik, V.F. Sapega, D.R. Yakovlev, I.V. Kalitukha, E.V. Shornikova, A.V. Rodina, E.L. Ivchenko, G.S. Dimitriev, M. Nasilowski, B. Dubertret, M. Bayer. Nano Lett. **20**, 517 (2020).
- [22] A.V. Rodina, E.L. Ivchenko. Phys. Rev. B **102**, 235432 (2020).
- [23] S.R. Meliakov, V.V. Belykh, I.V. Kalitukha, A.A. Golovatenko, A.D. Giacomo, I. Moreels, A.V. Rodina, D.R. Yakovlev. Nanomaterials **13**, 3077 (2023).
- [24] E. Kirstein, D.R. Yakovlev, M.M. Glazov, E.A. Zhukov, D. Kudlacik, I.V. Kalitukha, V.F. Sapega, G.S. Dimitriev, M.A. Semina, M.O. Nestoklon, E.L. Ivchenko, N.E. Kopteva, D.N. Dirin, O. Nazarenko, M.V. Kovalenko, A. Baumann, J. Höcker, V. Dyakonov, M. Bayer. Nat. Commun. **13**, 3062 (2022).
- [25] A.V. Rodina, E.L. Ivchenko. Phys. Rev. B **106**, 245202 (2022).
- [26] A.V. Rodina, E.L. Ivchenko. J. Lumin. **272**, 120640 (2024).
- [27] A.V. Komarov, S.M. Ryabchenko, O.V. Terletskii. Phys. Stat. Sol. B **102**, 603 (1980).

- [28] G. Wang, L. Bouet, M.M. Glazov, T. Amand, E.L. Ivchenko, E. Palleau, X. Marie, B. Urbaszek. *2D Mater.* **2**, 034002 (2015).
- [29] Е.Л. Ивченко. *ФТТ* **60**, 8, 1503 (2018).
- [30] Л.В. Котова, В.П. Кочерешко. *ЖЭТФ* **165**, 818 (2024).
- [31] E. Johnston-Halperin, D.D. Awschalom, S.A. Crooker, A.I.L. Efros, M. Rosen, X. Peng, A.P. Alivisatos. *Phys. Rev. B* **63**, 205309 (2001).
- [32] G. Qiang, A.A. Golovatenko, E.V. Shornikova, D.R. Yakovlev, A.V. Rodina, E.A. Zhukov, I.V. Kalitukha, V.F. Sapega, V.Kh. Kaibyshev, M.A. Prosnikov, P.C.M. Christianen, A.A. Onushchenko, M. Bayer. *Nanoscale* **13**, 790 (2021).
- [33] F. Liu, L. Biadala, A.V. Rodina, D.R. Yakovlev, D. Dunker, C. Javaux, J.P. Hermier, A.I.L. Efros, B. Dubertret, M. Bayer. *Phys. Rev. B* **88**, 035302 (2013).
- [34] E.V. Shornikova, A.A. Golovatenko, D.R. Yakovlev, A.V. Rodina, L. Biadala, G. Qiang, A. Kuntzmann, M. Nasilowski, B. Dubertret, A. Polovitsyn, I. Moreels, M. Bayer. *Nat. Nanotechnol.* **15**, 277 (2020).
- [35] R.I. Dzhioev, B.P. Zakharchenya, V.L. Korenev, D. Gammon, D.S. Katzer. Письма в *ЖЭТФ* **74**, 200 (2001).
- [36] В.К. Калевич, Е.Л. Ивченко, М.М. Афанасьев, А.Ю. Ширяев, А.Ю. Егоров, В.М. Устинов, Б. Пал, Я. Масумото. Письма в *ЖЭТФ* **82**, 509 (2005).
- [37] М.М. Глазов. *ФТТ* **54**, 3 (2012).
- [38] D.R. Yakovlev, A.V. Rodina, E.V. Shornikova, A.A. Golovatenko, M. Bayer. In: *Photonic Quantum Technologies* / Ed. M. Benyoucef, Wiley-VCH GmbH. (2023). Ch. 15. P. 349.
- [39] I.A. Yugova, A. Greilich, D.R. Yakovlev, A.A. Kiselev, M. Bayer, V.V. Petrov, Yu.K. Dolgikh, D. Reuter, A.D. Wieck. *Phys. Rev. B* **75**, 245302 (2007).
- [40] A.A. Golovatenko, A.V. Rodina. *Phys. Rev. B* **111**, 205410 (2025).
- [41] J.A. Gupta, D.D. Awschalom, A.I.L. Efros, A.V. Rodina. *Phys. Rev. B* **66**, 125307 (2002).
- [42] Е.Л. Ивченко, А.Ю. Каминский. *ФТТ* **37**, 1418 (1995).
- [43] М.М. Глазов, Е.Л. Ивченко. *Phys. Rev. B* **86**, 115308 (2012).
- [44] J. Hübner, F. Berski, R. Dahbashi, M. Oestreich. *Phys. Stat. Sol. B* **251**, 1824 (2014).
- [45] Д.С. Смирнов, М.М. Глазов, Е.Л. Ивченко. *ФТТ* **56**, 254 (2014).
- [46] Е.Б. Александров, М.С. Запасский. *ЖЭТФ* **81**, 132 (1981).
- [47] M. Oestreich, M. Römer, R.J. Haug, D. Hägele. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 216603 (2005).
- [48] S.A. Crooker, L. Cheng, D.L. Smith. *Phys. Rev. B* **79**, 035208 (2009).
- [49] S.V. Poltavtsev, I.I. Ryzhov, M.M. Glazov, G.G. Kozlov, V.S. Zapasskii, A.V. Kavokin, P.G. Lagoudakis, D.S. Smirnov, E.L. Ivchenko. *Phys. Rev. B* **89**, 081304 (2014).
- [50] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика, Наука, М. (1976). 584 стр. Ч. 1. § 124.
- [51] М.М. Глазов, В.С. Запасский. *Optics Express* **23**, 11713 (2015).
- [52] C. Hermann, C. Weisbuch. *Phys. Rev. B* **15**, 816 (1977).
- [53] C. Hermann, C. Weisbuch. *Phys. Rev. B* **15**, 823 (1977).
- [54] C. Hermann, C. Weisbuch. In: *Optical Orientation* / Eds. F. Meier, B.P. Zakharchenya. North-Holland, Amsterdam (1984). Ch. 11. P. 463.
- [55] R.L. Aggarwal. In: *Semiconductors and Semimetals* / Eds. R.K. Willardson, A.C. Beer. Academic Press, New York (1972). Vol. 9. P. 151.
- [56] P. Lawaetz. *Phys. Rev. B* **4**, 3460 (1971).
- [57] Е.Л. Ивченко, А.А. Киселев. *ФТП* **26**, 1471 (1992).
- [58] Е.Л. Ивченко, А.А. Киселев. Письма *ЖЭТФ* **67**, 41 (1998).
- [59] A.A. Kiselev, E.L. Ivchenko, U. Rössler. *Phys. Rev. B* **58**, 16353 (1998).
- [60] A.A. Kiselev, K.W. Kim, E.L. Ivchenko. *Phys. Stat. Sol. B* **215**, 235 (1999).
- [61] P.A. Сурис. *ФТП* **20**, 2008 (1986).
- [62] R.M. Hannak, M. Oestreich, A.P. Heberle, W.W. Rühle, K. Köhler. *Solid State Commun.* **93**, 313 (1995).
- [63] L. Gravier, M. Potemski, M.D. Martin, E. Perez, L. Vina, K. Ploog, A. Fisher. *Proc. Int. Conf. Phys. Semicond. Berlin, Germany (1996)* / Eds. M. Scheffler, R. Zimmermann. World Scientific, Singapore (1996). P. 2431.
- [64] M.J. Snelling, E. Blackwood, C.J. McDonagh, R.T. Harley, C.T.B. Foxon. *Phys. Rev. B* **45**, 3922 (1992).
- [65] E.L. Ivchenko, V.P. Kochereshko, I.N. Uraltsev, D.R. Yakovlev. In: *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics* / Ed. G. Landwehr. Springer Series in Solid-State Sci. Springer, Berlin, Heidelberg (1992). Vol. 110, P. 533.
- [66] B. Kowalski, P. Omling, B.K. Meyer, D.M. Hofmann, C. Wetzel, V. Härlé, F. Scholz, P. Sobkowicz. *Phys. Rev. B* **49**, 14786 (1994).
- [67] E.L. Ivchenko, A.A. Kiselev, M. Willander. *Solid State Commun.* **102**, 375 (1997).
- [68] М.В. Дурнев, М.М. Глазов. *УФН* **188**, 913 (2018).
- [69] J. Förste, N.V. Tepliakov, S.Y. Kruchinin, J. Lindlau, V. Funk, M. Först, K. Watanabe, T. Taniguchi, A.S. Baimuratov, A. Högele. *Nat Commun* **11**, 4539 (2020).
- [70] A.V. Rodina, A.I.L. Efros, A.Yu. Alekseev. *Phys. Rev.* **67**, 155312 (2003).
- [71] S.J. Prado, C. Trallero-Giner, A.M. Alcalde, V. López-Richard, G.E. Marques. *Phys. Rev. B* **69**, 201310 (2004).
- [72] A. Tadjine, Y.-M. Niquet, C. Delerue. *Phys. Rev. B* **95**, 235437 (2017).
- [73] M.A. Semina, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina. arXiv:2011.11041v1 [cond-mat.mes-hall] 22 Nov 2020.
- [74] K. Gawarecki, M. Zieliński. *Scientific Reports* **10**, 22001 (2020).
- [75] M.A. Semina, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina. *Phys. Rev. B* **104**, 205423 (2021).
- [76] D. Kudlacik, E.A. Zhukov, D.R. Yakovlev, G. Qiang, M.A. Semina, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina, A.I.L. Efros, A.I. Ekimov, M. Bayer. *Phys. Rev. B* **111**, 085423 (2025).
- [77] G. Qiang, E.A. Zhukov, E. Evers, D.R. Yakovlev, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina, A.A. Onushchenko, M. Bayer. *ACS Nano* **16**, 18838 (2022).
- [78] R.R. Hu, D.R. Yakovlev, P. Liang, G. Qiang, C. Chen, T. Jia, Z. Sun, M. Bayer, D. Feng. *J. Phys. Chem. Lett.* **10**, 3681 (2019).
- [79] I.V. Kalitukha, D. Kudlacik, G.S. Dimitriev, V.F. Sapega, A.A. Golovatenko, A.V. Myasoedov, D.A. Kirilenko, A.A. Sitnikova, S.V. Goupalov, D.R. Yakovlev, A.A. Onushchenko, M. Bayer. *Phys. Rev. B* **112**, 035304 (2025).
- [80] J.M. Luttinger. *Phys. Rev.* **102**, 1030 (1956).
- [81] А.И. Екимов, А.А. Онущенко. Письма в *ЖЭТФ* **34**, 363 (1981).
- [82] Г.Л. Бир, Г.Е. Пикус. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. Наука, М. (1972). 584 с.

- [83] E.L. Ivchenko, G.E. Pikus. Superlattices and Other Heterostructures, Symmetry and Optical Phenomena. Springer, Berlin (1995). 385 p.
- [84] G. Dresselhaus, A.F. Kip, C. Kittel. Phys. Rev. **98**, 368 (1955).
- [85] S. Richard, F. Aniel, G. Fishman. Phys. Rev. B **70**, 235204 (2004).
- [86] M.A. Semina, A.A. Golovatenko, A.V. Rodina. Phys. Rev. B **108**, 235310 (2023).
- [87] X. Marie, T. Amand, P. LeJeune, M. Paillard, P. Renucci, L.E. Golub, V.D. Dymnikov, E.L. Ivchenko. Phys. Rev. B **60**, 5811 (1999).
- [88] R. Winkler. Spin-orbit coupling effects in two dimensional electron and hole systems. Springer, Berlin (2003). 194 p.
- [89] A.I.L. Efros, M. Rosen, M. Kuno, M. Nirmal, D.J. Norris, M. Bawendi. Phys. Rev. B **54**, 4843 (1996).
- [90] A.I.L. Efros. In: Semiconductor and Metal Nanocrystals: Synthesis and Electronic and Optical Properties / Eds. VI. Klimov, M. Dekker, New York (2003). Ch. 3. P. 103.
- [91] А.А. Киселев, Л.В. Моисеев. ФТТ **38**, 1574 (1996).
- [92] A.V. Rodina, M. Dietrich, A. Göldner, L. Eckey, A. Hoffmann, A.I.L. Efros, M. Rosen, B.K. Meyer. Phys. Rev. B **64**, 115204 (2001).
- [93] H.W. van Kesteren, E.C. Cosman, W.A.J.A. van der Poel, C.T. Foxon. Phys. Rev. B **41**, 5283 (1990).
- [94] Б.Л. Гельмонт, М.И. Дьяконов. ФТП **5**, 2191 (1971).
- [95] A.I. Ekimov, F. Hache, M.C. Schanne-Klein, D. Ricard, Ch. Flytzanis, I.A. Kudryavtsev, T.V. Yazeva, A.V. Rodina, A.I.L. Efros. JOSA B **10**, 100 (1993).
- [96] A.R. Edmonds. Angular momentum in Quantum mechanics. Princeton University Press, Princeton. (1957). 146 p.
- [97] Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. Наука, Л. (1975). 436 с.
- [98] Б.Л. Гельмонт, М.И. Дьяконов. ФТП **7**, 2013 (1973).
- [99] М.А. Семина, Р.А. Сурис. ФТП **49**, 817 (2015).
- [100] A.V. Malyshev. Physics of the Solid State **42**, 29 (2000).
- [101] A.V. Trifonov, I.A. Akimov, L.E. Golub, E.L. Ivchenko, I.A. Yugova, A.N. Kosarev, S.E. Scholz, C. Sgroi, A. Ludwig, A.D. Wieck, D.R. Yakovlev, M. Bayer. Phys. Rev. B **104**, L161405 (2021).
- [102] E. Ivchenko, A. Kaminski, U. Rössler. Phys. Rev. B **54**, 5852 (1996).
- [103] Th. Wimbauer, K. Oettinger, A.I.L. Efros, B.K. Meyer, H. Brugger. Phys. Rev. B **50**, 8889 (1994).
- [104] N. Ares, V.N. Golovach, G. Katsaros, M. Stoffel, F. Fournel, L.I. Glazman, O.G. Schmidt, S. De Franceschi. Phys. Rev. Lett. **110**, 046602 (2013).
- [105] A.A. Kiselev, K.W. Kim, E. Yablonovitch. Phys. Rev. B **64**, 125303 (2001).
- [106] M.V. Durnev, M.M. Glazov, E.L. Ivchenko. Physica E **44**, 797 (2012).
- [107] М.В. Дурнев. ФТТ **56**, 1364 (2014).
- [108] M.O. Nestoklon, E. Kirstein, D.R. Yakovlev, E.A. Zhukov, M.M. Glazov, M.A. Semina, E.L. Ivchenko, E.V. Kolobkova, M.S. Kuznetsova, M. Bayer. Nano Letters **23**, 8218 (2023).
- [109] S.R. Meliakov, E.A. Zhukov, V.V. Belykh, M.O. Nestoklon, E.V. Kolobkova, M.S. Kuznetsova, M. Bayer, D.R. Yakovlev. Nanoscale **17**, 6522 (2025).

Редактор В.В. Емцев