

# Обобщенный критерий фон Неймана для течений с импульсным энерговыделением и изменением химического состава газовой смеси на маховском скачке уплотнения

© М.В. Чернышов, М.М. Лаптинская

Балтийский государственный технический университет „ВОЕНМЕХ“ им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: chernyshov\_mv@voenmeh.ru

Поступило в Редакцию 8 июля 2025 г.  
В окончательной редакции 29 августа 2025 г.  
Принято к публикации 29 августа 2025 г.

Аналитически выведен и численно исследован аналог критерия фон Неймана для смены типа (регулярного или маховского) отражения косого скачка уплотнения, если при маховском отражении присутствует импульсное выделение или поглощение энергии, а также изменение состава газовой смеси на сильном главном скачке. Оценено влияние перечисленных факторов на смещение полученного обобщенного критерия по сравнению с общеизвестным случаем течения без химических реакций и эффектов реального газа.

**Ключевые слова:** регулярное и маховское отражение, критерий фон Неймана, детонация.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.01.61913.20437

Переход от маховского отражения косых скачков уплотнения (например, скачка  $j_1$ , показанного на рис. 1, *a*) в установившемся газовом течении к регулярному отражению, как правило, описывается критерием фон Неймана, полученным еще в 1940-х годах [1]. При выполнении критерия фон Неймана падающий ( $j_1$ ), отраженный ( $j_2$ ) и главный, или маховский ( $j_3$ ), скачки составляют в тройной точке ( $T$ ) так называемую стационарную маховскую конфигурацию (СМК). Маховский скачок  $j_3$  в тройной точке СМК является прямым (нормальным к набегающему потоку), а его интенсивность  $J_3$  (отношение статических давлений за скачком и перед ним) описывается соотношением

$$J_3 = J_m(M) = p_3/p = (1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon. \quad (1)$$

Здесь  $M$  и  $p$  — число Маха и статическое давление набегающего потока,  $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты газа. Далее  $p_i$  и  $T_i$  — статическое давление и температура газа за скачком  $j_i$ , а  $J_i$  — интенсивность  $i$ -го скачка (отношение статических давлений за скачком и перед ним). Интенсивность  $J_1 = p_1/p$  падающего скачка, удовлетворяющего критерию фон Неймана, традиционно определяется из уравнения [2,3]:

$$\sum_{n=0}^3 A_n J_1^n = 0, \quad (2)$$

где

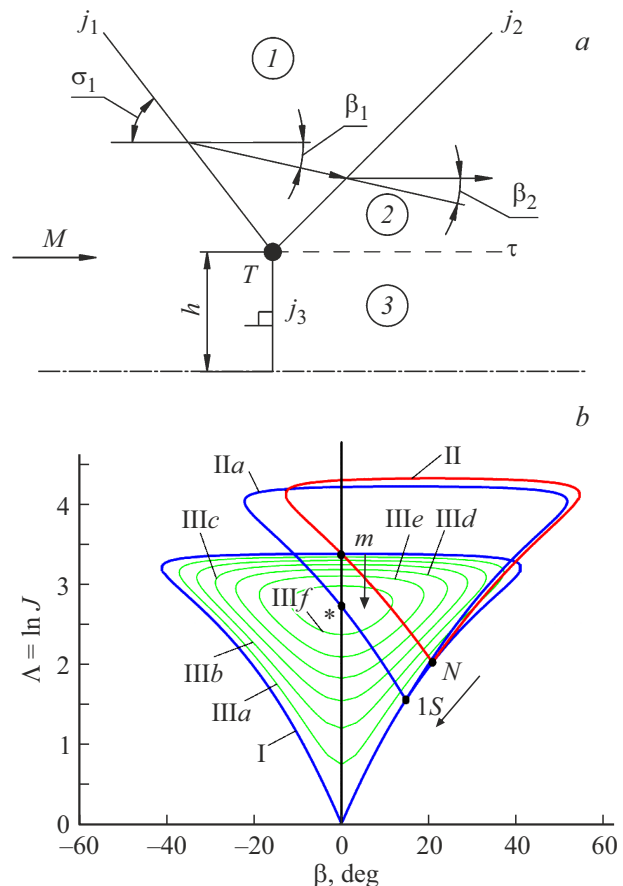
$$A_0 = 1 - \varepsilon,$$

$$A_2 = -[(1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3)M^2 + (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon + \varepsilon^2)],$$

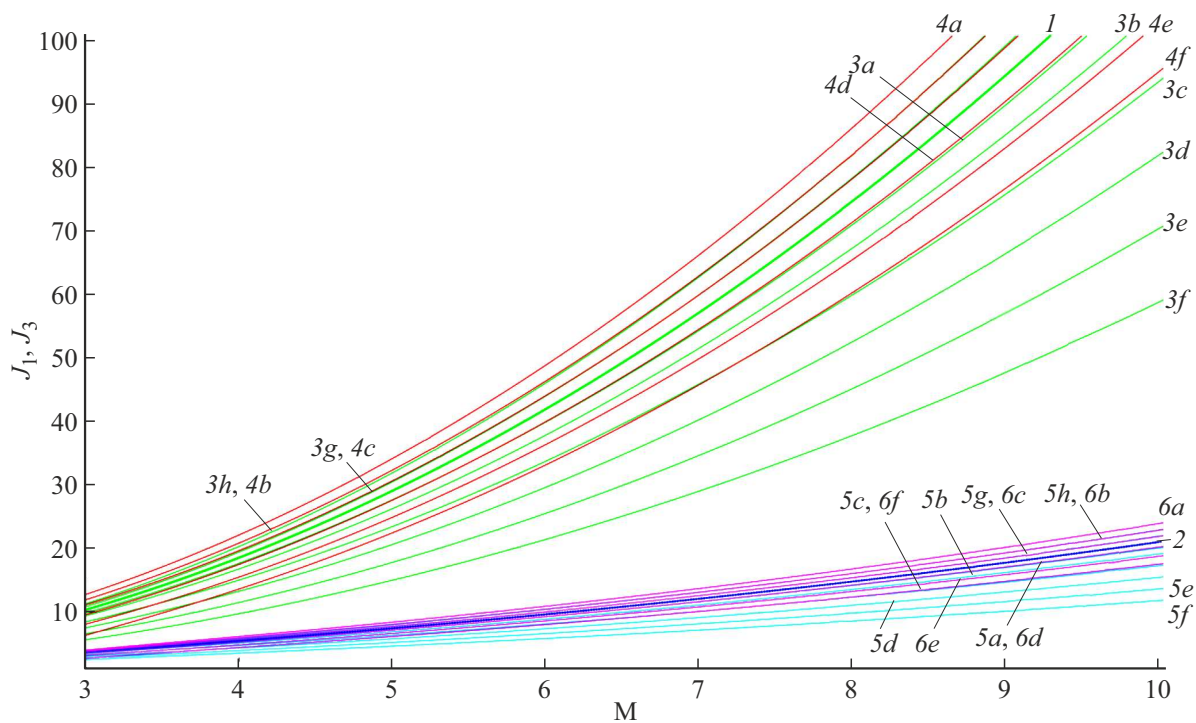
$$A_1 = \varepsilon[(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon][(1 - \varepsilon)M^2 - 2 + \varepsilon],$$

$$A_3 = (1 - \varepsilon)(M^2 - 1)((1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon).$$

Соотношение (2) выводится в [2,3] из системы уравнений, выражающих условия равенства давлений и



**Рис. 1.** Графическое описание стационарной маховской конфигурации. *a* — схема течения в окрестности тройной точки; *b* — решение задачи на плоскости ударных полях (число Маха набегающего потока  $M = 5$ ). Пояснение в тексте.



**Рис. 2.** Интенсивности главных (маховских) и падающих скачков при  $\gamma = 1.4$ . Кривые 1 и 2 — главный и падающий скачки в нереагирующем газе; 3a–3f — главный скачок при энерговыделении, составляющем 0,1, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0 критической величины соответственно; 3g и 3h — главный скачок при энергопоглощении, составляющем 0,1 и 0,2 критической величины; 4a–4f — главный скачок при отсутствии выделения или поглощения энергии и  $\gamma_3 = 1,1, 1,2, 1,3, 1,5, 1,7, 1,9$  соответственно; 5a–5f — падающий скачок при энерговыделении, составляющем 0,1, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,0 критической величины соответственно; 5g и 5h — падающий скачок при энергопоглощении, составляющем 0,1 и 0,2 критической величины; 6a–6f — падающий скачок при отсутствии выделения или поглощения энергии и  $\gamma_3 = 1,1, 1,2, 1,3, 1,5, 1,7, 1,9$  соответственно.

сонаправленности потоков на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$  за СМК:

$$J_1 J_2 = J_3 = J_m(M), \quad \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

которые записываются также в виде

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3, \quad \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

допускающем графическое решение задачи на плоскости ударных поляр (рис. 1, b). Здесь  $\Lambda_i = \ln J_i$ , а  $\beta_i$  — угол поворота потока на скачке  $j_i$  (рис. 1, a), связанный с интенсивностью скачка и числом Маха  $M$  перед ним соотношением [2]:

$$\tan \beta_i = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)M^2 - \varepsilon - J_i}{J_i + \varepsilon} \frac{(1 - \varepsilon)(J_i - 1)}{(1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_i - 1)}}. \quad (3)$$

Связь (3) между интенсивностями скачков СМК и углами  $\beta_i$  поворота потока отображена на плоскости ударных поляр при  $\gamma = 1.4$  (рис. 1, b). Сердцевидная кривая I показывает эту зависимость для падающих скачков, а ее верхняя точка  $m$  соответствует главному скачку  $j_3$  в потоке нереагирующего газа. Кривые II и III выражают аналогичные зависимости для отраженных скачков при различных интенсивностях падающего

скачка (и, следовательно, параметрах течения за ним), соответствующих точкам  $N$  и  $1S$  на поляре I. Кривые IIIa–IIIf соответствуют энерговыделению на главном скачке, равному соответственно 15, 30, 45, 60, 75 и 90 % от максимальной величины  $\bar{\varphi}_{crit}$ .

Кривые 1 и 2 (рис. 2) показывают соответственные интенсивности главного и падающего скачков  $J_3 = J_m(M)$  и  $J_1(M)$ , отвечающих критерию фон Неймана для течения инертного газа, полученные из уравнения (2) при  $\gamma = 1.4$  ( $\varepsilon = 1/6$ ). Следует отметить, что СМК существуют только при  $M \geq M_a$ , где  $M_a = \sqrt{(2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)} = 1.483$ , и являются граничными для устойчивого маховского отражения при  $M \geq M_b$ , где число Маха  $M_b = 2.202$  определяется алгебраическим уравнением четвертой степени, известным из работы [3].

Согласно современным моделям сверхзвуковых течений с маховским отражением [4–7], критерий фон Неймана (образование СМК) соответствует стремящейся к нулю высоте  $h$  скачка  $j_3$  (рис. 1, a) и, следовательно, непрерывному переходу от маховского к регулярному отражению падающего скачка  $j_1$ .

Многие параметры потоков в областях 2 и 3 (рис. 1, a) за отраженным и главным скачками, разделенными тангенциальным разрывом  $\tau$ , существенно различны.

На рис. 3 показаны отношения давлений торможения  $I^{(p_0)} = p_{02}/p_{03}$  (кривая 1) и температур  $I^{(T)} = T_3/T_2$  (кривая 2) на сторонах тангенциального разрыва  $\tau$  за тройной точкой СМК в зависимости от числа Маха набегающего потока двухатомного совершенного газа. В пределе ( $M \rightarrow \infty$ ) статические давления и температуры за главным и отраженным скачками СМК отличаются многократно [3]:

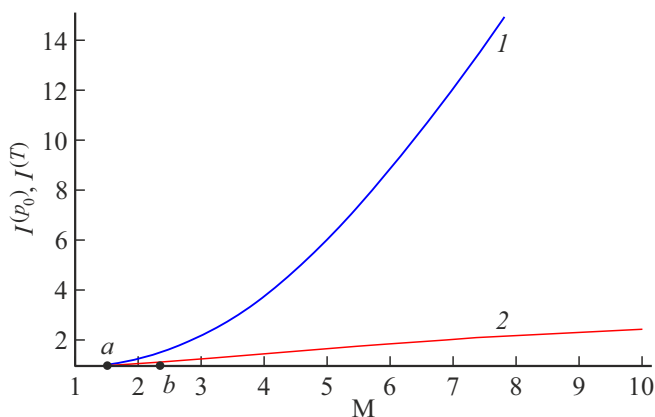
$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_{p_0} = \left[ \frac{1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2\varepsilon(2 - \varepsilon)} \right]^{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}} = 69.72,$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_T = \frac{1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + (1 - \varepsilon)D}{2\varepsilon(2 - \varepsilon)} = 3.363,$$

$$D = \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon(1 - \varepsilon)[2(1 + \varepsilon)(2 - \varepsilon) - \varepsilon^3(1 - \varepsilon)]}.$$

Существенные различия параметров течения за тройной точкой могут быть использованы, например, в реактивном двигателестроении [8,9]. Относительно малые потери полного давления позволяют использовать поток, заторможенный в системе косых скачков, по схеме классического воздушно-реактивного двигателя. На сильном маховском скачке потери полного давления очень высоки, но многократно больший рост температуры может инициировать детонацию реакционноспособной смеси, благодаря чему возможно применение этой части течения по схеме проточного детонационного двигателя.

Эффективное разделение потоков (недетонирующего — за отраженным, сдетонировавшего — за маховским скачком) требует установить (численно или аналитически) высоту тройной точки, форму исходящего тангенциального разрыва, а также условия перехода от маховского отражения к регулярному. Первые опыты расчета и применения приближенно-аналитических моделей при наличии скачков с энерговыделением [10] показывают, что импульсное энерговыделение на поверхности главного скачка не только увеличивает его высоту, но и приводит к смещению критерия фон Неймана в сторону более слабых падающих скачков.



**Рис. 3.** Отношения давлений торможения (кривая 1) и температур потоков (кривая 2) на тангенциальном разрыве за тройной точкой.

Возникает маховское отражение скачков, которые в течениях без энерговыделения отражаются только регулярно. Обратное (в сторону более сильных падающих скачков) смещение критерия фон Неймана способствует энергопоглощению на главном скачке (при затратах на возбуждение колебательных степеней свободы или диссоциацию молекул). Изменение показателя адиабаты смеси также смещает условия смены типа отражения.

Помимо применения в перспективных детонационных устройствах установление критерия фон Неймана для высокоскоростных течений реагирующих газовых смесей позволит более корректно избежать маховского отражения с сопутствующим ростом аэродинамического сопротивления, потерями полного давления в воздухозаборниках и падением тяги воздушно-реактивного двигателя. Кроме того, управление параметрами регулярного и маховского отражения сильных ударных волн способствует оптимизации механического действия взрыва, трансляционного воздействия спутного потока на переносимые им объекты, которое существенно различно на сторонах возникающих тангенциальных и контактных разрывов [11].

Согласно [12] и [13], применение модели Чепмена–Жуге к прямому или косому скачку, рассматриваемому как стационарная детонационная волна, приводит к следующей зависимости между интенсивностью  $J$  этого скачка и углом  $\beta$  поворота потока на его поверхности:

$$|\beta| = \text{arctg} \left[ \frac{(J - 1)\sqrt{F - 1}}{\gamma M^2 - (J - 1)} \right],$$

$$F = \frac{2\gamma M^2[(\gamma - \gamma_3) + (\gamma - 1)((J - 1) - (\gamma_3 - 1)\bar{\varphi})]}{(\gamma - 1)(J - 1)[(\gamma_3 + 1)(J - 1) + 2\gamma_3]}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты газовой смеси перед скачком,  $\gamma_3$  — за ним. Импульсное энерговыделение  $\varphi$ , отнесенное к единице массы смеси, характеризуется безразмерной величиной  $\bar{\varphi} = \varphi/(p/\rho) = \gamma\varphi/[(\gamma - 1)c_p T]$ , которая конечна, определяется химическим составом газовой смеси и не зависит явно от числа Маха потока.

Соотношение (4) является следствием условий Чепмена–Жуге в форме [13]:

$$[\rho V_n] = 0, \quad [V_\tau] = 0, \quad [\rho V_n^2 + p] = 0, \quad [h_0] = \varphi,$$

примененной к скачку  $j_3$  как к стационарной детонационной волне, и применимо только в условиях адекватности этой модели детонации происходящим на скачке процессам. Здесь  $\rho$ ,  $p$  и  $h_0$  — плотность, давление и полная энтальпия на сторонах скачка,  $V_n$  и  $V_\tau$  — нормальная и тангенциальная по отношению к скачку составляющие скорости потока,  $\varphi$  — импульсное энерговыделение, отнесенное к единице массы газовой смеси, а квадратными скобками обозначена разность соответствующих величин на поверхности перед скачком и за ним.

Применение формулы (4) к прямому скачку  $j_3$  с энерговыделением, инициированным высокой температурой

за ним, определяет его интенсивность:

$$aJ_3^2 + bJ_3 + c = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon(1 - \varepsilon), \quad b = -\varepsilon(1 - \varepsilon_3)[(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon], \\ c &= \varepsilon_3[(1 - \varepsilon^2)M^2 - \varepsilon(1 - \varepsilon) + 2\varepsilon(1 + \varepsilon)\bar{\varphi}M^2], \\ \varepsilon_3 &= (\gamma_3 - 1)/(\gamma_3 + 1). \end{aligned}$$

Физически обоснованное решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{(1 - \varepsilon_3)[(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon]}{2(1 - \varepsilon)} + \frac{\sqrt{\varepsilon h - 8\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)\varepsilon_3 M^2 \bar{\varphi}}}{2\varepsilon(1 - \varepsilon)}, \\ h &= \varepsilon[(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon_3)M^2 + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon_3)]^2 \\ &\quad - 4\varepsilon_3 M^2(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношение (6) наглядно показывает уменьшение интенсивности скачка  $j_3$  при  $\bar{\varphi} > 0$ . Вместе с ней монотонно уменьшается интенсивность скачка  $j_1$  — происходит смещение критерия фон Неймана в сторону более слабых падающих скачков.

Степень ослабления главного скачка, соответствующего критерию фон Неймана, при положительном импульсном энерговыделении показана кривыми  $3a-3f$ , а степень его усиления при теоретически возможном энергопоглощении — кривыми  $3g$  и  $3h$  на рис. 2 (в сравнении с кривой  $1$ , построенной для инертного газа). Если положить, что  $\gamma = \gamma_3$ , то соотношение (6) преобразуется к виду, еще более наглядно показывающему смещение критерия фон Неймана при энерговыделении в сторону более слабых скачков:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon}{2} + \frac{(1 + \varepsilon)(M^2 - 1)}{2} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \frac{8\varepsilon M^2 \bar{\varphi}}{(1 - \varepsilon^2)(M^2 - 1)^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Кривые  $3a-3f$  показывают изменение интенсивности главного скачка при  $\gamma = \gamma_3 = 1.4$  и удельном энерговыделении  $\bar{\varphi}$ , составляющем определенную часть критической величины

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{crit} &= [\varepsilon(1 + \varepsilon)^2(1 - \varepsilon_3)^2 M^4 + 2(1 - \varepsilon^2) \\ &\quad \times (\varepsilon - 2\varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3^2)M^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon)^2(1 + \varepsilon_3)^2] \\ &\quad \times [8\varepsilon\varepsilon_3(1 - \varepsilon^2)M^2]^{-1}. \end{aligned}$$

Значение  $\bar{\varphi}_{crit}$  — максимальное безразмерное энерговыделение за стационарной детонационной волной при данном числе Маха  $M$  набегающего течения. Если  $\bar{\varphi} > \bar{\varphi}_{crit}$ , детонационная волна  $j_3$  начинает движение вверх по потоку, обусловленное слишком большим

импульсным энерговыделением за ее поверхностью [14]. Энерговыделение при детонации реакционноспособных смесей обычно сопоставимо с критическим. Увеличение скорости полета (числа Маха набегающего потока) увеличивает критическое энерговыделение, допустимое для существования стационарных волн.

При  $\gamma = \gamma_3$  максимальное энерговыделение выражается зависимостью  $\bar{\varphi}_{crit} = [(1 - \varepsilon^2)(M^2 - 1)^2]/8\varepsilon M^2$ . Интенсивность главного скачка описывается соотношениями

$$J_3 = J_{crit} = \frac{(1 - \varepsilon_3)[(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon]}{2(1 - \varepsilon)} = \frac{1 - \varepsilon_3}{1 - \varepsilon} \frac{J_m(M) + 1}{2},$$

$$J_3 = J_{crit} = [(1 + \varepsilon)M^2 + 1 - \varepsilon]/2$$

при изменении или сохранении показателя адиабаты соответственно (последний случай отображен кривой  $3f$  на рис. 2). Изменение интенсивности  $J_3$  при отрицательном энерговыделении (энергопоглощении), равно  $-0.1\bar{\varphi}_{crit}$  и  $-0.2\bar{\varphi}_{crit}$ , показано на рис. 2 кривыми  $3g$  и  $3h$ .

Вывод об уменьшении главного скачка при наличии импульсного энергоподвода и увеличении показателя адиабаты полностью соответствует решению задачи на плоскости ударных поляр (рис. 1,  $b$ ). В частности, кривые  $IIIa-III f$ , соответствующие условию (4) при  $\gamma = \gamma_3$  и энерговыделении, составляющем определенную часть максимальной величины  $\bar{\varphi}_{crit}$ , имеют верхние точки, соответствующие прямым скачкам с энерговыделением и расположенные существенно ниже точки  $m$  на „обычной“ поляре I. Аналогичная картина наблюдается при  $\gamma_3 > \gamma$ . При  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{crit}$  детонационная поляра вырождается в точку (\*), после чего исчезает.

Согласно (7), при больших числах Маха интенсивность главного скачка как при наличии, так и при отсутствии энерговыделения описывается соотношением  $\lim_{M \rightarrow \infty} (J_3/M^2) = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon_3)/(1 - \varepsilon)$ , отражающим влияние изменения показателя адиабаты газовой смеси.

Степень влияния отклонения показателя адиабаты газовой смеси от начального значения  $\gamma = 1.4$  на интенсивность  $J_3$  главного скачка при  $\bar{\varphi} = 0$  показана на рис. 2 соответственно кривыми  $4a-4c$  и кривыми  $4d-4f$ . Из рис. 2 видно, что уменьшение показателя адиабаты (сопутствующее экзотермическим реакциям при детонации) несколько смещает зависимость  $J_3(M)$  в сторону более высоких интенсивностей (кривые  $4a-4c$ ), что отчасти (но не полностью) компенсирует детонационное энерговыделение. Уменьшение показателя адиабаты при  $\bar{\varphi} = 0$  не только смещает зависимость  $J_3(M)$  вниз (кривые  $4d-4f$ ), но и приводит к отсутствию решения при малых числах Маха: решение для  $J_3(M)$  существует лишь при  $M > M_{crit}$ , где числа Маха  $M_{crit}$  определяются

зависимостью

$$M_{\min} =$$

$$\sqrt{[2\varepsilon_3 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_3^2 + 2\sqrt{\varepsilon_3(\varepsilon_3 - \varepsilon)(1 - \varepsilon\varepsilon_3)}] / [\gamma\varepsilon(1 - \varepsilon_3)^2]}$$

при  $\bar{\varphi} = 0$  или из уравнения

$$\varepsilon\gamma^2(1 - \varepsilon_3)^2 M_{\min}^4 - 2\gamma(2\varepsilon_3 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon_3^2 + 4\varepsilon\varepsilon_3\bar{\varphi})M_{\min}^2 + \varepsilon(1 + \varepsilon_3)^2 = 0$$

при ненулевом энерговыделении. Таким образом, на интенсивность главного и отраженного скачков воздействуют два противоположно направленных фактора. Уменьшение интенсивности  $J_3$  при  $\bar{\varphi} > 0$  (детонация) отчасти компенсируется ее ростом из-за сопутствующего уменьшения показателя адиабаты газовой смеси. Напротив, высокотемпературные явления с  $\bar{\varphi} < 0$  нередко сопровождаются увеличением показателя адиабаты (диссоциация многоатомных молекул).

Интенсивность  $J_1$  падающего скачка, соответствующая образованию СМК, является монотонной функцией интенсивности  $J_3$  (увеличивается или уменьшается вместе с ней). Обобщенный критерий фон Неймана определяется в виде зависимости  $J_1(M)$  путем совместного решения уравнения (5) относительно  $J_3 = J_1J_2$  и уравнения

$$\sum_{n=0}^3 C_n J_2^n = 0, \quad (8)$$

где

$$C_3 = [(1 + \varepsilon J_1)J_1 M]^2, \quad C_2 = -J_1(1 + \varepsilon J_1)x_2,$$

$$C_1 = (1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)(1 + (1 + 2\varepsilon)J_1^2)M^4 - x_1 M^2 + (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)(J_1 + 1)(J_1 - 1)^3,$$

$$C_0 = -(1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)((1 + 2\varepsilon)J_1 - \varepsilon)M^4$$

$$+ x_0 M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)^2(J_1 - 1)^2,$$

$$x_2 = (1 + \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)M^4 + (\varepsilon(2 - \varepsilon)J_1^2 - \varepsilon(1 - 2\varepsilon)J_1$$

$$+ 2(1 - \varepsilon^2))M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1 + \varepsilon)(J_1 - 1)^2,$$

$$x_1 = 2(1 + \varepsilon(1 - \varepsilon))J_1^4 - 2(1 - 2\varepsilon^2)J_1^3 - \varepsilon(4 - \varepsilon - 2\varepsilon^2)J_1^2$$

$$+ 2\varepsilon(1 - \varepsilon)J_1 - (1 - 2\varepsilon^2),$$

$$x_0 = 2(1 + \varepsilon - \varepsilon^2)J_1^3 - (2 - 6\varepsilon^2 + \varepsilon^3)J_1^2$$

$$- 2\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)J_1 + \varepsilon(1 - 2\varepsilon^2),$$

связывающего интенсивности падающего и отраженного скачков [15]. Соотношение (8) является следствием условия нулевого суммарного угла поворота потока на падающем и отраженном скачках СМК

$$\beta_1 - \beta_2 = 0,$$

в котором углы поворота потока на скачках связаны с их интенсивностями соотношениями вида (3), а число

Маха  $M_1$  потока перед вторым скачком определяется согласно [2,3]:

$$M_1 = \sqrt{[(J_1 + \varepsilon)M^2 - (1 - \varepsilon)(J_1^2 - 1)] / [J_1(1 + \varepsilon J_1)]}.$$

Результант (определитель матрицы Сильвестра) системы (5), (8), полученный исключением величины  $J_2$ , приводит к алгебраическому уравнению вида

$$f(M^2, J_1, \varepsilon, \varepsilon_3, \bar{\varphi}) = 0 \quad (9)$$

десятой степени относительно  $J_1$  и пятой степени относительно  $M^2$ . При  $\gamma_3 = \gamma$  и  $\bar{\varphi} = 0$  уравнение (9) сводится к виду (2), определяющему „классический“ критерий фон Неймана.

На рис. 2 представлены кривые  $5a-5h$ , отображающие решения уравнения (9): интенсивности  $J_1$  падающих скачков при  $\gamma_3 = \gamma = 1.4$  и различных значениях импульсного энерговыделения ( $\bar{\varphi} > 0$ , кривые  $5a-5f$ ) или энергопоглощения ( $\bar{\varphi} < 0$ , кривые  $5g$  и  $5h$ ). Их сравнение с кривой 2, построенной для течения нерезагрирующего газа, подтверждает, что при положительном энерговыделении критерий фон Неймана существенно смещается в сторону более слабых, а при отрицательном — в сторону более сильных падающих скачков.

Кривые  $6a-6f$  на рис. 2 демонстрируют решения (9) при отсутствии импульсного энерговыделения ( $\bar{\varphi} = 0$ ), но при наличии уменьшения (кривые  $6a-6c$ ) или увеличения (кривые  $6d-6f$ ) показателя адиабаты газовой смеси по сравнению с первоначальным значением ( $\gamma = 1.4$ ). Их сравнение с „классической“ кривой 2 свидетельствует о том, что уменьшение показателя адиабаты на главном скачке при умеренных и больших числах Маха ведет к увеличению „фон-неймановских“ значений  $J_1$ , а рост значения  $\gamma_3$  — к их уменьшению. Однако смещение кривых  $6a-6f$  от кривой 2 существенно меньше, чем аналогичное смещение кривых  $5a-5h$ ; следовательно, именно импульсное энерговыделение является превалирующим фактором, влияющим на обобщенный критерий фон Неймана.

Согласно данным рис. 4, угол  $\sigma_1$  наклона падающего скачка, связанный с его интенсивностью соотношением

$$J_1 = (1 + \varepsilon)M^2 \sin^2 \sigma_1 - \varepsilon,$$

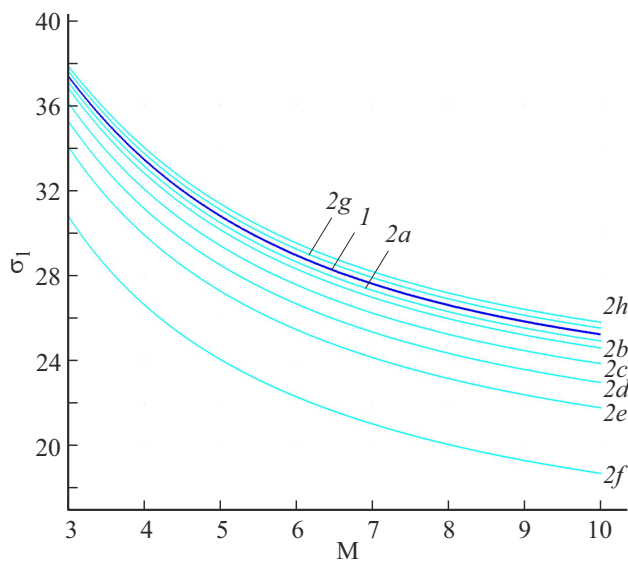
уменьшается за счет удельного энергоподвода на величину до  $6-8^\circ$ . Изменение показателя адиабаты газовой смеси смещает угол  $\sigma_1$  на величину до  $2-3^\circ$ . При больших числах Маха этот угол падения описывается асимптотой, не зависящей от величины  $\bar{\varphi}$ :

$$\sigma = \arcsin \sqrt{C/(1 + \varepsilon)},$$

$$(1 - \varepsilon)^3 C^3 - (1 - \varepsilon)(2 + \varepsilon + \varepsilon\varepsilon_3 - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^2\varepsilon_3)C^2$$

$$+ (1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon - 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2\varepsilon_3 + \varepsilon^3 - \varepsilon^3\varepsilon_3)C$$

$$- \varepsilon(1 - \varepsilon_3)(1 + \varepsilon)^2(1 - 2\varepsilon + \varepsilon\varepsilon_3) = 0,$$



**Рис. 4.** Углы наклона падающих скачков, соответствующих „классическому“ (кривая 1) и обобщенному (кривые 2a–2h) критериям фон Неймана при  $\gamma = \gamma_3 = 1.4$ . Кривые 2a–2f — падающий скачок при энерговыделении, составляющем 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 критической величины соответственно; 2g и 2h — падающий скачок при энергопоглощении, составляющем 0.1 и 0.2 критической величины.

которая при  $\gamma_3 = \gamma$  становится известной из [3] для газа без превращений

$$\sigma = \arcsin \sqrt{\frac{1 + \varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \sqrt{1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - \varepsilon^4 - 2\varepsilon^5 + \varepsilon^6}}{2(1 - \varepsilon^2)}}.$$

Аналогичные изменения претерпевает угол  $\beta_1$  поворота потока на падающем скачке в переходной конфигурации, определяемый соотношением (3) при  $J = J_1$ ,  $\bar{\varphi} = 0$  и  $\gamma_3 = \gamma$ .

Вывод об ослаблении падающих скачков, соответствующих критерию фон Неймана, за счет выделения энергии и увеличения показателя адиабаты газа на главном скачке наглядно демонстрируется на плоскости ударных поляр (например, путем смещения соответствующей точки на поляре I из положения N в „классическом“ случае в положение 1S при максимально возможном энерговыделении, см. рис. 1, b).

Подробный анализ решений (9), их возможной неустойчивости и нереализуемости, особенно при малых и умеренных числах Маха, подлежит отдельному исследованию.

Таким образом, нами получены аналитические соотношения, определяющие обобщенный критерий фон Неймана — условия существования тройной конфигурации с прямым главным скачком, если на этом скачке происходит импульсное выделение или поглощение энергии, а также изменение химического состава высокотемпературной газовой смеси или высокотемпературные эффекты реального газа, приводящие к смене

показателя адиабаты. Установлено, что энерговыделение и увеличение показателя адиабаты заметно смещают критерий фон Неймана в сторону более слабых, а обратные явления — в сторону более сильных падающих скачков по сравнению с „классическим“ случаем. Полученные соотношения качественно описывают смещение критерия фон Неймана в рамках модели стационарной детонации Чепмена–Жуге, но, возможно, подлежат численному анализу и уточнению с использованием более современных моделей газовой детонации.

### Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWF-2024-0003).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] G. Ben-Dor, *Shock wave reflection phenomena* (Springer, Berlin–Heidelberg–N.Y., 2007).
- [2] А.Л. Адрианов, А.Л. Старых, В.Н. Усков, *Интерференция стационарных газодинамических разрывов* (Наука, Новосибирск, 1995).
- [3] В.Н. Усков, М.В. Чернышов, *Прикладная механика и техническая физика*, **47** (4), 39 (2006). [V.N. Uskov, M.V. Chernyshov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **47** (4), 492 (2006). DOI: 10.1007/s10808-006-0081-5].
- [4] M. Schotz, A. Levy, G. Ben-Dor, O. Igra, *Shock Waves*, **7** (6), 363 (1997). DOI: 10.1007/s001930050091
- [5] А.В. Омельченко, В.Н. Усков, М.В. Чернышов, *Письма в ЖТФ*, **29** (6), 56 (2003). [A.V. Omel'chenko, V.N. Uskov, M.V. Chernyshev, *Tech. Phys. Lett.*, **29** (3), 243 (2003). DOI: 10.1134/1.1565647].
- [6] С.-Y. Bai, Z.-N. Wu, *J. Fluid Mech.*, **818**, 116 (2017). DOI: 10.1017/jfm.2017.139
- [7] S.-G. Choe, *Proc. Inst. Mech. Eng. G*, **236** (1), 3 (2021). DOI: 10.1177/09544100211001518
- [8] М.С. Иванов, А.Н. Кудрявцев, А.В. Троцюк, В.М. Фомин, *Способ организации детонационного режима горения в камере сгорания сверхзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя*, патент RU 2285143 С2 (заявл. 10.12.2004, опубл. 10.10.2006).
- [9] К.Е. Savelova, М.М. Alekseeva (Laptinskaya), S.A. Matveev, M.V. Chernyshov, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **1959**, 012043 (2021). DOI: 10.1088/1742-6596/1959/1/012043
- [10] M.V. Chernyshov, K.E. Savelova, *Fluids*, **8** (4), 132 (2023). DOI: 10.3103/S1068799823010087
- [11] M.V. Chernyshov, K.E. Savelova, *Acta Astron.*, **226** (1), 876 (2025). DOI: 10.1016/j.actaastro.2024.11.017
- [12] H. Li, G. Ben-Dor, H. Grönig, *AIAA J.*, **35** (11), 1712 (1997). DOI: 10.2514/2.40
- [13] А.Е. Медведев, *Прикладная механика и техническая физика*, **42** (2), 33 (2001). [A.E. Medvedev, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **42** (2), 211 (2001). DOI: 10.1023/A:1018811516116].
- [14] A.V. Trotsyuk, A.N. Kudryavtsev, M.S. Ivanov, in *Proc. of Int. Conf. on recent advances in space technologies* (IEEE, 2003), p. 495–503. DOI: 10.1109/RAST.2003.1303966
- [15] L.F. Henderson, *ZAMM — J. Appl. Math. Mech.*, **62** (6), 258 (1982). DOI: 10.1002/zamm.19820620608