

# О применимости модели монодисперсной среды при численных исследованиях течений в пузырьковых колоннах

© А.С. Чернышев, А.А. Шмидт

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alexander.tchernyshev@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 1 мая 2025 г.

В окончательной редакции 12 августа 2025 г.

Принято к публикации 17 августа 2025 г.

Проведено сравнение результатов численного исследования течения в пузырьковой колонне в рамках моделей монодисперсной и полидисперсной рабочей среды. Оценка различия полученных решений показала, что при увеличении размеров пузырей  $R_b > 1 \text{ mm}$  (что соответствует числу Рэнольдса для пузырька  $Re_b > 400$ ) обе модели эквивалентны. Это объясняется перестройкой потока в связи со сменой характера силового взаимодействия между фазами. Таким образом, для исследования потоков с крупными пузырями возможно использовать экономичные модели монодисперсной среды.

**Ключевые слова:** многофазные течения, полидисперсность, численное моделирование.

DOI: 10.61011/JTF.2025.12.61803.225-25

## Введение

Многофазные течения и, в частности, пузырьковые течения являются неотъемлемой частью многих природных и технологических процессов. Примерами могут служить всплывающие со дна моря газовые пузыри (как маркеры глубинных месторождений), спутный газ в виде пузырей при нефтедобыче и транспорте нефтегазовой смеси, химические пузырьковые реакторы [1].

Полидисперсность, как правило, играет важную роль в формировании как глобальной структуры течений, так и локальных свойств потока [2]. Учет полидисперсности при численном моделировании предъявляет повышенные требования к вычислительным системам, однако обеспечивает детальное описание течений в широком диапазоне определяющих параметров.

Несмотря на то что учет полидисперсности важен для решения большого круга задач о течении пузырьковых сред, монодисперсный подход также активно используется исследователями. Например, в работе [3] представлен расчет трехмерной пузырьковой колонны в рамках монодисперсного описания, сравнение с экспериментальными результатами показало применимость использованного подхода.

Целью настоящей работы является анализ влияния полидисперсности в интересующем диапазоне определяющих параметров, первичный анализ причин снижения влияния полидисперсности на картину течения и выделение режима, при котором возможно использование монодисперсного подхода.

## 1. Математическая модель

Модель основана на эйлеро-эйлеровском подходе к описанию многофазных течений (см., например, [4]).

В рамках этого подхода несущая (индекс  $l$ ) и дисперсная (индекс  $b$ ) фазы рассматриваются как сплошносредные, заполняющие всю расчетную область, в каждой точке которой задается объемное содержание фазы  $\alpha$ . При этом плотности  $\rho$  каждой из фаз вычисляются как  $\alpha \cdot \rho_0$ , где  $\rho_0$  — плотность вещества соответствующей фазы.

Полидисперсность учитывается в рамках модели многих групп (MUltiple SIze Group или MUSIG). В модели вводится набор классов монодисперсных пузырьков, для каждого класса  $i$  определяется свой размер пузырька,  $R_{ib}$ , объемная доля  $\alpha_{ib}$  и скорость  $V_{ib}$ , а также своя система уравнений сохранения импульса и массы (так называемая гетерогенная модель MUSIG [5]). Распределение пузырей по размерам задается кусочно-постоянной функцией, описывающей  $N$  классов (фракций) с постоянным размером пузырей [4].

Модель основана на уравнениях сохранения массы и импульса для несущей и дисперсной фаз с учетом межфазного силового взаимодействия, турбулентности и дисперсии пузырей [4]. Силовое межфазное взаимодействие включает в себя силу плавучести  $F_{iB}$ , силу Стокса  $F_{iD}$ , Сэффмана  $F_{iL}$ , силу присоединенных масс  $F_{iVM}$  и пристенную силу  $F_{iWL}$ :

$$F_{iB} = \alpha_{ib}(\rho_{ib} - \rho_l)g,$$

$$F_{iD} = \frac{3\rho_l}{8R_{ib}}\alpha_{ib}C_{iD}V_{irel}|V_{irel}|, \quad V_{irel} = V_l - V_{ib},$$

$$F_{iL} = C_{iL}\alpha_{ib}\rho_lV_{irel} \times \text{rot}V_l,$$

$$F_{iVM} = 0.5\alpha_{ib}\rho_l\left(\frac{D_bV_{ib}}{Dt} - \frac{D_lV_l}{Dt}\right),$$

$$F_{iWL} = -C_{iWL}\alpha_{ib}\rho_l|V_{irel}|(V_{irel}n_W)n_W^2n_W.$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности несущей среды,  $n_W$  — нормаль к ближайшей стенке.

В работе [6] предложена корреляция для коэффициента сопротивления  $C_{iD}$ , основанная на числах Рейнольдса  $Re_{ip}$  и Этвеша  $Eo_i$ :

$$C_{iD} = \sqrt{C_D(\text{Re}_{ip})^2 + C_D(Eo_i)^2},$$

$$\text{Re}_{ip} = \rho_l R_{ib} V_{ib} / \mu_l, \quad Eo_i = 4g(\rho_l - \rho_{ib})R_{ib}^2 / \sigma,$$

$$C_D(\text{Re}_{ip}) = \frac{16}{\text{Re}_{ip}} \left( 1 + 2/(1 + 16/\text{Re}_{ip} + 3.315/\sqrt{\text{Re}_{ip}}) \right),$$

$$C_D(Eo_i) = 4Eo_i / (Eo_i + 9.5), \quad Eo_i < 5.$$

Здесь  $\mu_l$  — динамическая вязкость несущей среды,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Для коэффициента  $C_{iL}$  используется следующее выражение [7]:

$$C_{iL} = \min[0.288 \tanh(0.121\text{Re}_{ip}), f(Eo_i)], \quad Eo_i < 4,$$

$$f(Eo_i) = 0.00105Eo_i^3 - 0.0159Eo_i^2 - 0.0204Eo_i + 0.474.$$

Коэффициент  $C_{iWL}$  вычисляется по следующей формуле [4]:

$$C_{iWL} = 0.47 \max \left\{ 0, \frac{1}{6.3} \cdot \frac{[1 - y_w/(20R_{ib})]}{y_w[y_w/(20R_{ib})]^{0.7}} \right\},$$

где  $y_w$  — расстояние до ближайшей стенки.

В работе используется  $k-\omega$  SST-модель турбулентности [8] с дополнительными источниками слагаемыми, описывающими генерацию и диссиацию турбулентности из-за движения пузырьков относительно несущей среды [4]. Эффективная вязкость несущей среды вычисляется с учетом поправки Сато [9]. Дисперсия пузырьков за счет турбулентных пульсаций скорости в несущей среде учитывается при помощи дополнительного диффузационного члена в уравнениях сохранения объемной доли пузырей и их численной плотности [4].

## 2. Численный метод

Предложенная математическая модель была реализована в виде программного кода с использованием конечно-объемной аппроксимации уравнений на неструктурированных гексагональных сетках. Для получения детальной картины течения и минимизации ошибки дискретизации использовался второй порядок точности по пространственным координатам. Для расчета полей давления и скоростей фаз был применен алгоритм SIMPLE с поправкой на многофазность. Итерационный процесс был организован при помощи метода установления по псевдовремени с первым порядком точности. Модель и численный метод были детально протестированы, получено хорошее согласие с экспериментом (см. [4]).

## 3. Постановка задачи

В настоящей работе проведена серия расчетов с постоянным расходом пузырей. Число классов  $N = 1$  для случая монодисперсных пузырей. На основе анализа, проведенного в статье [4], для полидисперсного случая  $N = 10$ . Течение происходит в осесимметричной пузырьковой колонне диаметром  $D = 0.07$  м и высотой  $H = 0.65$  м за счет силы Архимеда, пузыри поступают со дна колонны и покидают ее сверху через свободную поверхность. Колонна изначально заполнена водой. Газ в виде пузырей поступает в колонну через вмонтированный в дно соосный осесимметричный аэратор диаметром  $d = 0.05$  м. Параметры газа соответствуют воздуху при нормальных условиях. Давление окружающей среды, соответствующее давлению на свободной поверхности, считается равным атмосферному, температура окружающей среды  $T = 297$  К, коэффициент поверхностного натяжения  $\Sigma = 0.072$  Н/м (вода-воздух).

## 4. Результаты

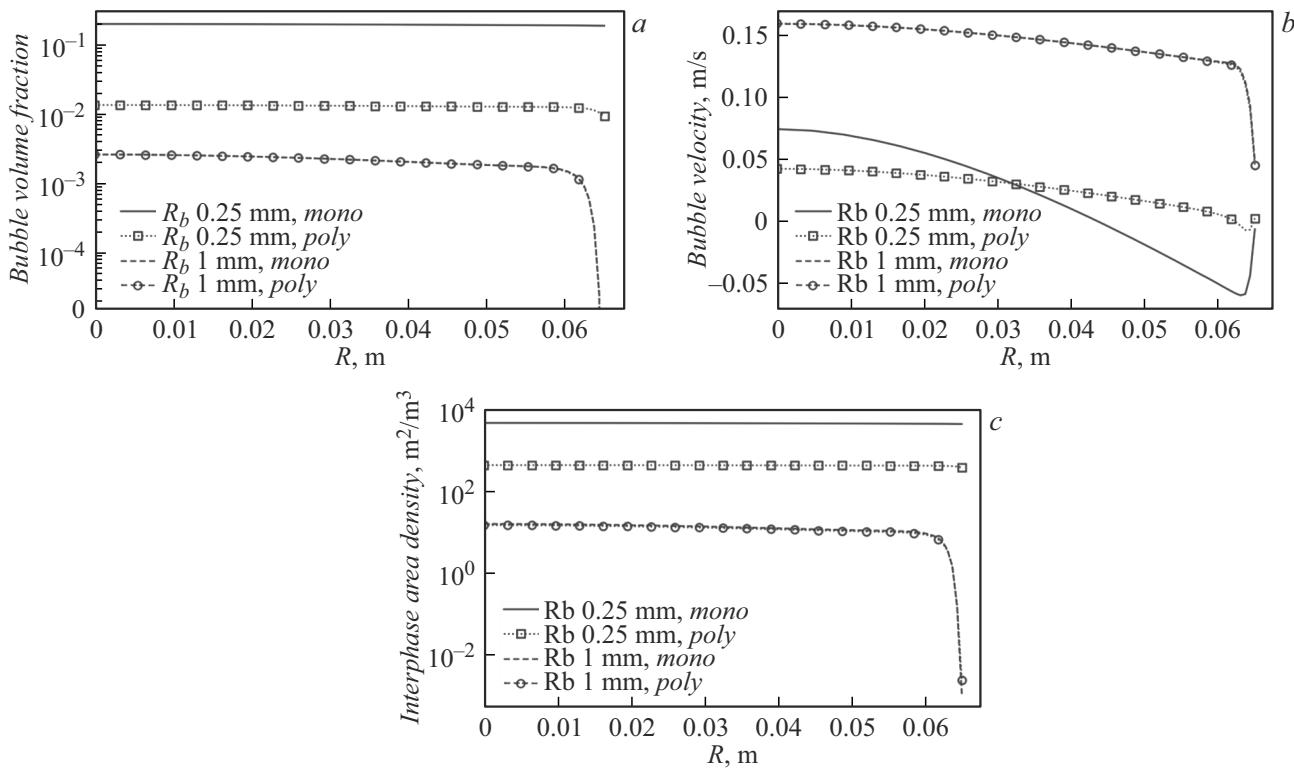
Результаты моделирования в полидисперсной и монодисперсной постановках для характерного размера пузырька  $R_b$  0.25 и 1 мм представлены на рис. 1. В качестве критерия для оценки различия решений, полученных в рамках полидисперсного и монодисперсного подходов, использовалось нормированное среднеквадратичное отклонение искомой величины, рассчитанное по всей области течения. Видно, что для пузырьков размером 0.25 мм влияние полидисперсности существенно (величина критерия составляет 10% для скорости и более 60% для объемной доли и межфазной поверхности), в то время как для пузырей 1 мм величина критерия составляет менее 1%.

Расчет равновесной относительной скорости пузырей  $V_{rel}$  был проведен также с использованием аналитической нульмерной модели, основанной на уравнении баланса межфазного силового взаимодействия и силы плавучести:

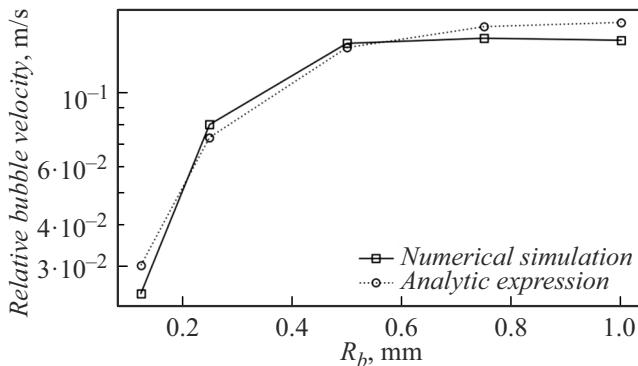
$$\alpha_{ib}(\rho_{ib} - \rho_l)g = \frac{3\rho_l}{8R_{ib}} \alpha_{ib} C_{iD} V_{irel} |V_{irel}|.$$

Замыкающие соотношения взяты из полной математической модели. Расчеты показали хорошее согласие с численными экспериментами (рис. 2) и возможность применимости аналитического выражения для анализа течения.

Исследование изменения характера силового взаимодействия было проведено с использованием аналитической модели, результаты представлены на рис. 3. Видно, что с увеличением размеров пузырьков меняется влияние отдельных составляющих силы межфазного трения. При малых размерах пузырька доминирует вязкое трение на поверхности пузырька, при увеличении размера форма пузырька становится отличной от сферической,



**Рис. 1.** Распределения объемной доли пузырей (*a*), скорости пузырей (*b*) и плотности площади межфазной поверхности (*c*) в поперечном сечении, отстоящем от дна на 0.45 м, с использованием монодисперсного и полидисперсного подходов.

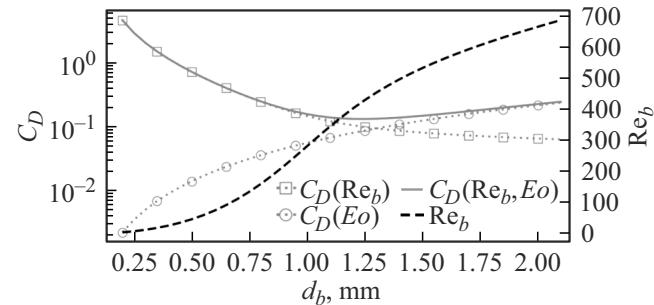


**Рис. 2.** Сравнение результатов вычисления относительной скорости пузырей при помощи численного моделирования и с использованием аналитического выражения.

и основной вклад в силу трения вносит составляющая, отвечающая за деформацию пузырька.

## Заключение

Анализ силового взаимодействия показал, что при размерах пузырька  $R_b$  порядка 1 mm происходит перестройка потока, в частности, меняется характер силы трения (Стокса). Для малых пузырей основной вклад в силу Стокса вносит вязкое трение на границе раз-



**Рис. 3.** Изменение полного коэффициента силы Стокса  $C_D(\text{Re}_b, Eo)$  в зависимости от размера пузырька  $d_b = 2R_b$ ; приведены отдельные составляющие, описывающие зависимость от вязкого трения  $C_D(\text{Re}_b)$ , и от формы пузырька  $C_D(Eo)$ . Приведена кривая изменения числа Рэнольдса пузырька  $\text{Re}_b$  от размера пузырька.

дела фаз, а для больших пузырей сила Стокса определяется деформацией пузырька. Результаты численного моделирования хорошо согласуются с предсказаниями предложенной аналитической модели для определения равновесной скорости пузырей, основанной на балансе межфазного силового взаимодействия. Изменение характера силового взаимодействия фаз при увеличении размера пузырька приводит к уменьшению влияния полидисперсности пузырьковой фазы на структуру течений в пузырьковых реакторах колонного типа, что

позволяет использовать экономичные модели монодисперсной среды.

### Благодарности

Статья выполнена в рамках Государственного задания, номер темы FFUG-2024-0005.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] F. Wang, N.D. Jin, D.Y. Wang, Y.F. Han, D.Y. Liu. Experimental Thermal and Fluid Science, **88**, 361 (2017). DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2017.06.017
- [2] М.А. Пахомов, В.И. Терехов. ЖТФ, **85**(9), 8 (2015). [M.A. Pakhomov, V.I. Terekhov. Tech. Phys., **60**(9), 1268 (2015). DOI: 10.1134/S1063784215090157]
- [3] M. Raković, D. Radenković, A. Čočić, M. Lečić. Advances in Mechanical Engineering, **14**(4), 1 (2022). DOI: 10.1177/16878132221094909
- [4] A. Chernyshev, A. Schmidt, V. Chernysheva. Water, **15**, 778 (2023). DOI: 10.3390/w15040778
- [5] E. Krepper, D. Lucas, T. Frank, H.-M. Prasser, P.J. Zwart. Nucl. Eng. Des., **238**, 1690 (2008). DOI: 10.1016/j.nucengdes.2008.01.004
- [6] I. Roghair, Y.M. Lau, N.G. Deen, H.M. Slagter, M.W. Baltussen, M. Van Sint Annaland, J.A.M. Kuipers. Chem. Eng. Sci., **66**, 3204 (2011). DOI: 10.1016/j.ces.2011.02.030
- [7] A. Tomiyama, H. Tamai, I. Zun, S. Hosokawa. Chem. Eng. Sci., **57**, 1849 (2002). DOI: 10.1016/S0009-2509(02)00085-4
- [8] F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry. Heat Mass Transf., **4**, 625 (2003).
- [9] Y. Sato, K. Sekoguchi. Int. J. Multiphase Flow, **10**, 79 (1975). DOI: 10.1016/0301-9322(75)90030-0