

## Особенности релятивистского вращения тел Солнечной системы на примере некоторых спутников Юпитера

© В.В. Пашкевич, А.Н. Вершков

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,  
196140 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: areks@gaoran.ru

Поступило в Редакцию 23 апреля 2025 г.  
В окончательной редакции 8 августа 2025 г.  
Принято к публикации 12 августа 2025 г.

Исследованы релятивистские эффекты геодезического вращения вокруг своих осей 10 спутников Юпитера (J4, J6, J8, J11, J12, J16, J18, J46, J49, J62). Показано различие векторов угловой скорости геодезического вращения в зависимости от выбора координатной системы отсчета. В результате впервые определены наиболее существенные периодические члены геодезического вращения (геодезической нутации) этих небесных тел. Полученные аналитические величины геодезической нутации изучаемых небесных тел могут быть использованы для численного исследования вращения этих тел в релятивистском приближении.

**Ключевые слова:** геодезическая нутация, релятивистское вращение, Юпитер, регулярные и иррегулярные спутники.

DOI: 10.61011/JTF.2025.12.61778.218-25

В релятивистском вращении небесных тел вокруг своей оси наиболее существенным эффектом является эффект геодезического вращения, который состоит из двух эффектов: систематического (или векового) эффекта — геодезической прецессии [1] и периодического эффекта — геодезической нутации [2].

Как известно, формула вектора угловой скорости геодезического вращения для любых тел Солнечной системы имеет следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) \wedge \left( \frac{3}{2} \dot{\mathbf{R}}_i - 2\dot{\mathbf{R}}_j \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\mathbf{r}_{ji}|^3} \mathbf{r}_{ji} \wedge \left( 2\dot{\mathbf{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $G$  — гравитационная постоянная; индекс  $i$  соответствует исследуемому объекту Солнечной системы, а индекс  $j$  — возмущающим телам (в данной работе ими являются Солнце, Луна, Плутон и большие планеты);  $\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_j, \dot{\mathbf{R}}_j$  — барицентрические векторы положений и скоростей исследуемого тела (спутников Юпитера) и  $j$ -го возмущающего тела соответственно;  $m_j$  — масса  $j$ -го тела; символ  $\wedge$  означает векторное произведение;  $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$ ;  $\dot{\mathbf{r}}_{ji} = \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_j$ . Все величины, используемые в формуле (1), взяты из эфемериды Horizons On-Line Ephemeris System [4]. Разность векторов скоростей в правой части векторного произведения формулы (1) не является симметричной из-за разных величин коэффициентов в разности барицентрических векторов скоростей исследуемого и возмущаемого тел. Таким образом, результирующее значение вектора, вычисленного по этой формуле, будет зависеть от выбранной системы координат. Для наглядности вышесказанного сравним два исследуемых вектора угловой

скорости геодезического вращения вычисляемых в различных системах координат — относительно барицентра Солнечной системы (Solar System Barycenter — SSB)  $\sigma_{(SSB)_i}$  и относительно барицентра системы спутников Юпитера (Jovian System Barycenter — JSB)  $\sigma_{(JSB)_i}$ . В результате получаем выражение разности этих векторов:

$$\sigma_{(SSB)_i} - \sigma_{(JSB)_i} = \frac{1}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\mathbf{r}_{ji}|^3} \mathbf{r}_{ji} \wedge \dot{\mathbf{r}}_{(SSB)(JSB)}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}_{(SSB)_i}, \dot{\mathbf{R}}_{(SSB)_i}, \mathbf{R}_{(SSB)_j}, \dot{\mathbf{R}}_{(SSB)_j}, \mathbf{R}_{(JSB)_i}, \dot{\mathbf{R}}_{(JSB)_i}, \mathbf{R}_{(JSB)_j}, \dot{\mathbf{R}}_{(JSB)_j}$  — барицентрические векторы (относительно SSB и JSB) положений и скоростей  $i$ -го и  $j$ -го тел соответственно;

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{R}_{(SSB)_i} - \mathbf{R}_{(SSB)_j} = \mathbf{R}_{(JSB)_i} - \mathbf{R}_{(JSB)_j},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{ji} = \dot{\mathbf{R}}_{(SSB)_i} - \dot{\mathbf{R}}_{(SSB)_j} = \dot{\mathbf{R}}_{(JSB)_i} - \dot{\mathbf{R}}_{(JSB)_j},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{(SSB)(JSB)} = \dot{\mathbf{R}}_{(JSB)_i} - \dot{\mathbf{R}}_{(SSB)_i}$$

— вектор скорости движения барицентров SSB и JSB друг относительно друга. Следовательно  $\sigma_{(SSB)_i} \neq \sigma_{(JSB)_i}$ . Формула разности (2) показывает зависимость отличия векторов угловой скорости геодезического вращения от величины масс возмущающих тел, расстояния между выбираемыми координатными системами и скорости их движения друг относительно друга. В результате для одного и того же исследуемого тела в двух разных координатных системах получены два разных вектора, не переходящие друг в друга путем параллельного переноса или угловых поворотов (как это происходит для векторов угловой скорости в евклидовом пространстве), а, следовательно, получены две разные величины геодезического вращения. Тем самым в нашем исследовании показана зависимость величины эффекта геодезического

Основные вековые, периодические и смешанные члены геодезического вращения Юпитера и его спутников в абсолютной величине вектора углового поворота

	Аргумент	Период гармоника	Коэффициент C при $\cos(\text{аргумент})$ , $\mu\text{as}$	Коэффициент S при $\sin(\text{аргумент})$ , $\mu\text{as}$	Спектр, $\text{Sp}''^2$
Юпитер (B5): $a = 5.2038 \text{ au}$ , $P = 11.862 \text{ yr}$ , $e = 0.049$ , $i = 1^\circ.3$ , $P_{\text{GSSB}} = 0.3117815 t$					
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-21.2545-4.5696 t$	$82.8332-0.1682 t$	$7.3 \cdot 10^{-9}$
Метида (J16): $a = 128\,000 \text{ km}$ , $P = 0.295 \text{ days}$ , $e = 0.000$ , $i = 2^\circ.2$ , $\Delta SJ = 0.2730$					
$P_{\text{GSSB}} = 26536.4280292 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 26536.1550121 t$					
SSB	$\lambda_{516}-\lambda_5$	0.29480 days	$-15.0686-111.2248 t$	$467.6472-3.6060 t$	$2.2 \cdot 10^{-7}$
	J8	5.931 yr	$228.3097-21.2154 t$	$269.5940-14.5597 t$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-39.0834-9.2480 t$	$149.3536-1.3534 t$	$2.4 \cdot 10^{-8}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-28.2690-6.0697 t$	$110.1806-0.2230 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Каллисто (J4): $a = 1882700 \text{ km}$ , $P = 16.690 \text{ days}$ , $e = 0.007$ , $i = 1^\circ.8$ , $\Delta SJ = -0.0980$					
$P_{\text{GSSB}} = 32.179034 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 32.2770074 t$					
SSB	$\lambda_{54}-\lambda_5$	16.7536 days	$-0.6246-2.6452 t$	$121.6603-0.1582 t$	$1.5 \cdot 10^{-8}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-21.3556-0.2802 t$	$83.4659-3.1708 t$	$7.4 \cdot 10^{-9}$
	$\Omega_{54}$	559.876 yr	$56.1097-4.5738 t$	$-63.7232-0.8979 t$	$7.2 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-28.2464-6.5188 t$	$110.0464-0.5296 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Фемисто (J18): $a = 7398500 \text{ km}$ , $P = 130.028 \text{ days}$ , $e = 0.340$ , $i = 43^\circ.8$ , $\Delta SJ = 0.0386$					
$P_{\text{GSSB}} = 1.5019 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 1.4633 t$					
SSB	$\Omega_{54}$	559.876 yr	$3557.9407-31993.1286 t$	$4734.0932-708.1949 t$	$3.5 \cdot 10^{-5}$
	$2J_{n518}$	210.099 yr	$-1150.8495-5341.0484 t$	$-662.6680-1473.0951 t$	$1.8 \cdot 10^{-6}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$2.6368-171.8260 t$	$89.5481-345.2842 t$	$8.0 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\Omega_{54}$	559.876 yr	$3849.9434-34759.5963 t$	$5127.8191-630.0411 t$	$4.1 \cdot 10^{-5}$
	$2J_{n518}$	210.099 yr	$-1248.7294-5789.0359 t$	$-718.7491-1601.0717 t$	$2.1 \cdot 10^{-6}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-2.3989-211.4619 t$	$114.0998-410.2903 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Гималия (J6): $a = 11440600 \text{ km}$ , $P = 250.562 \text{ days}$ , $e = 0.160$ , $i = 28^\circ.1$ , $\Delta SJ = -0.0814$					
$P_{\text{GSSB}} = 0.669283 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 0.750727 t$					
SSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-20.5955-0.2714 t$	$78.9670-11.7096 t$	$6.7 \cdot 10^{-9}$
	$\lambda_{56}-\lambda_5$	265.942 days	$-38.5984-0.0464 t$	$-14.6274-0.1644 t$	$1.7 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-27.5581-2.9352 t$	$105.8590-6.6993 t$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
	$2J_{a56}$	69.039 yr	$33.1548-23.2843 t$	$-20.6042-33.4799 t$	$1.5 \cdot 10^{-9}$
Карпо (J46): $a = 17042300 \text{ km}$ , $P = 1.2492 \text{ yr}$ , $e = 0.416$ , $i = 53^\circ.2$ , $\Delta SJ = -0.0797$					
$P_{\text{GSSB}} = 0.46071 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 0.54042 t$					
SSB	$2J_{n546}$	56.119 yr	$-23.4885-2223.8034 t$	$-223.7604-275.4034 t$	$5.1 \cdot 10^{-8}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-21.3693-32.8235 t$	$80.6539-5.6939 t$	$7.0 \cdot 10^{-9}$
JSB	$2J_{n546}$	56.119 yr	$-23.4967-2195.0117 t$	$-220.3481-273.4600 t$	$4.9 \cdot 10^{-8}$
	$\lambda_5$	11.862 yr	$-27.6233-21.6303 t$	$109.4420-0.1806 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Валетудо (J62): $a = 18694200 \text{ km}$ , $P = 1.4445 \text{ yr}$ , $e = 0.217$ , $i = 34^\circ.5$ , $\Delta SJ = -0.0967$					
$P_{\text{GSSB}} = 0.41123 t$ , $P_{\text{GJSB}} = 0.50797 t$					
SSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-22.2789-4.0809 t$	$81.5033-4.7185 t$	$7.1 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-29.4513-5.2190 t$	$109.3150-4.6221 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$

Таблица (продолжение)

Ананке (J12): $a = 21034500$ km, $P = 1.7243$ yr, $e = 0.237$ , $i = 147^\circ.6$ , $\Delta SJ = -0.0792$					
$P_{GSSB} = 0.27421 t$ , $P_{GJSB} = 0.35337 t$					
SSB	$\Omega_{54}$ $\lambda_5$	559.876 yr 11.862 yr	$-68.1193-407.1962 t$ $-11.4085-43.3038 t$	$-84.0840-189.6849 t$ $76.4858-271.2264 t$	$1.2 \cdot 10^{-8}$ $6.0 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-25.7977-29.0915 t$	$109.0988-77.7144 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$
Карме (J11): $a = 23144400$ km, $P = 2.0101$ yr, $e = 0.256$ , $i = 164^\circ.6$ , $\Delta SJ = -0.0959$					
$P_{GSSB} = 0.26117 t$ , $P_{GJSB} = 0.35704 t$					
SSB	$\Omega_{54}$ $\lambda_5$	559.876 yr 11.862 yr	$-59.4380-229.7027 t$ $-42.9788-1.2298 t$	$-68.7652-272.3038 t$ $77.4253-173.9092 t$	$8.3 \cdot 10^{-9}$ $7.8 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-42.2075-4.5571 t$	$110.5616-84.5666 t$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
Пасифе (J8): $a = 23468200$ km, $P = 2.0359$ yr, $e = 0.412$ , $i = 148^\circ.4$ , $\Delta SJ = -0.0748$					
$P_{GSSB} = 0.29046 t$ , $P_{GJSB} = 0.36529 t$					
SSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-58.6039-1.4186 t$	$18.0760-16.7520 t$	$3.8 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-44.1149-3.5013 t$	$82.7846-2.0733 t$	$8.8 \cdot 10^{-9}$
Коре (J49): $a = 24205200$ km, $P = 2.1267$ yr, $e = 0.328$ , $i = 141^\circ.5$ , $\Delta SJ = -0.0838$					
$P_{GSSB} = 0.29053 t$ , $P_{GJSB} = 0.37433 t$					
SSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-19.4835-230.1387 t$	$80.0491-21.2041 t$	$6.8 \cdot 10^{-9}$
JSB	$\lambda_5$	11.862 yr	$-28.4329-95.7619 t$	$109.2469-12.3620 t$	$1.3 \cdot 10^{-8}$

вращения от выбора координатной системы из вида самой формулы. Таким образом, наше исследование проводилось относительно этих двух барицентров. Величина этого эффекта

$$\Delta SJ = \int (|\sigma_{(SSB),i}| - |\sigma_{(JSB),i}|) dt = P_{GSSB} - P_{GJSB}$$

(см. таблицу) для исследуемых спутников варьируется от  $0.2730$  arcsec/tju (угловых секунд в юлианское тысячелетие) для спутника J16 до  $-0.0980$  arcsec/tju для спутника J4.

В результате впервые определены наиболее существенные периодические члены геодезического вращения (геодезической нутации) исследуемых спутников Юпитера в абсолютной величине вектора углового поворота

$$|\Lambda| = \left| \int \sigma dt \right|$$

относительно SSB и JSB (см. таблицу). Распределение вклада этих гармоник геодезической нутации определяется спектром мощности  $S_p$ . В таблице:  $t$  — является динамическим барицентрическим временем (TDB), которое измеряется в юлианских тысячелетиях (tju) ( $365250$  jd (юлианских дней)) от эпохи J2000.0;  $P$  — сидерический период обращения (Юпитера вокруг SSB, спутников вокруг JSB);  $a$  — большая полуось орбиты исследуемого тела;  $i$  — наклон средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0 к эклиптике;  $e$  — эксцентриситет орбиты исследуемого тела (Юпитера вокруг SSB,

спутников вокруг JSB);  $P_{GSSB}$ ,  $P_{GJSB}$  — вековые члены геодезического вращения (геодезической прецессии) исследуемых небесных тел в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно SSB и JSB соответственно (их величины взяты из нашего предыдущего исследования [5]);  $S_p = C^2 + S^2$  — гармоника спектра мощности (при  $t = 0$ );  $P_{5j}$  — сидерический период  $j$ -го спутника Юпитера,  $Pa_{5j}$  и  $Pn_{5j}$  — периоды прецессий аргумента перицентра и долготы восходящего узла  $j$ -го спутника Юпитера соответственно (их величины для иррегулярных спутников Юпитера взяты из эфемериды Horizons On-Line Ephemeris System [4]);  $\lambda_{5j}$  — средние юпитероцентрические долготы спутников Юпитера;

$$\lambda_{5j} = (360 \cdot 365.25 \cdot 100 / P_{5j}) T,$$

$$Ja_{5j} = (360 \cdot 100 / Pa_{5j}) T,$$

$$Jn_{5j} = (360 \cdot 100 / Pn_{5j}) T$$

(здесь и далее  $T$  — динамическое барицентрическое время (TDB) измеряется в юлианских столетиях (sjy) ( $36525$  jd) от эпохи J2000.0);  $\Omega_{54}$  — долгота восходящего узла орбиты Каллисто на плоскости Лапласа (средней орбиты этого спутника эпохи J2000.0);  $\lambda_5$  — средняя долгота Юпитера. Средняя долгота Юпитера взята из работы [6], средние долготы, J8 и долготы восходящих узлов регулярных спутников Юпитера взяты из статьи [7].

Масса Солнца является доминирующей в Солнечной системе, поэтому одна из частей вектора угловой

скорости геодезического вращения  $\sigma$  для спутников планет является результатом их орбитального движения вокруг SSB. Юпитер и его спутники находятся в среднем на одном расстоянии от Солнца и движутся относительно него в среднем с одной скоростью. Вследствие этого величины их геодезического вращения, вызванного влиянием Солнца, должны быть достаточно близки между собой. Подтверждения этого можно увидеть в значениях величин вкладов гармоник периодических членов геодезической нутации с аргументом  $\lambda_5$  в спектре мощности  $Sp$  (см. таблицу), которые тоже достаточно близки друг другу. Преобладающей по величине — основной гармоникой геодезической нутации Юпитера — является гармоника с аргументом средней долготы Юпитера  $\lambda_5$  (см. таблицу). Она отражает его обращение вокруг SSB, поскольку его спутники (по сравнению с Юпитером) обладают малой массой и оказывают на его геодезическое вращение малое влияние. Поэтому основным для геодезического вращения Юпитера является влияние от Солнца. Геодезическое вращение спутников Юпитера определяется не только Солнцем, но и Юпитером. Поэтому другая часть вектора угловой скорости геодезического вращения относительно SSB  $\sigma$  для планет, имеющих спутники, и их спутников является результатом их орбитального движения вокруг барицентра спутниковой системы планеты. Таким образом, величины геодезической нутации спутников значительно превосходят аналогичную величину геодезической нутации Юпитера (см. таблицу). Это связано с тем, что из-за близкого к ним расстояния Юпитер оказывает большее влияние на их геодезическое вращение, чем Солнце на Юпитер. Обращение спутников Юпитера вокруг двух барицентров JSB и SSB отражается в появлении для каждого регулярного спутника двух доминирующих гармоник геодезической нутации с аргументом  $\lambda_{5j}-\lambda_5$  и следующей за ней по величине гармоники с аргументом  $\lambda_5$  (см. таблицу). Из-за близости регулярных спутников к Юпитеру, для вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно SSB вклад гармоник геодезической нутации с аргументом  $\lambda_{5j}-\lambda_5$  является наибольшим (см. таблицу). Для вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно JSB вклад гармоник периодических членов геодезической нутации с аргументом  $\lambda_{5j}-\lambda_5$  в спектре мощности  $Sp$  гораздо меньше вкладов других гармоник (см. таблицу). В таблице показано, что в периодических членах геодезического вращения исследуемого тела относительно JSB преобладающим является возмущение от Солнца (в них доминирует гармоника с аргументом  $\lambda_5$ ), а в периодических членах геодезического вращения исследуемого тела относительно SSB для регулярных спутников на первом месте становится возмущение от Юпитера, а затем от Солнца. Следует отметить, что наибольшая величина геодезической нутации (из рассматриваемых спутников Юпитера) у спутника J18 одного порядка и сопоставима с величиной геодезической нутации Меркурия ближайшей от Солнца планеты ( $Sp = 3.5 \cdot 10^{-5}$ ).

На примере тел Солнечной системы показано, что величина геодезического вращения может быть существенной не только у объектов, которые вращаются вокруг сверхмассивных релятивистских центральных тел, но и у тел с малым расстоянием до менее массивного центрального тела. В Солнечной системе одними из таких объектов являются регулярные спутники Юпитера (для которых Юпитер является менее массивным возмущающим центральным телом, чем Солнце). В частности, в нашем предыдущем исследовании [5] было показано, что величина геодезической прецессии самого близкого из внутренних спутников Юпитера — J16 составляет  $-26536 \text{ arcsec/tj}$ , что в 90 000 раз больше, чем у Юпитера ( $-0.3 \text{ arcsec/tj}$ ), вращающегося вокруг своего более массивного центрального тела (Солнца), и в 100 раз больше, чем у Меркурия ( $-214 \text{ arcsec/tj}$ ) ближайшей от Солнца планеты. Величина геодезической прецессии самого дальнего из галилеевых спутников Юпитера — J4 составляет  $-32.2 \text{ arcsec/tj}$ , что в 100 раз больше, чем у Юпитера.

Отметим, что дальнейшее изучение эффектов геодезического вращения и других релятивистских эффектов может быть полезным при изучении влияния внутренних физических процессов изучаемых тел на их вращения, которые могут быть сравнимыми с ними по величине. А именно, чтобы отделить их друг от друга.

### Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 125021201995-7 „Космометрия“).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] W. De Sitter. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **77**, 155 (1916). DOI: 10.1093/mnras/77.2.155
- [2] T. Fukushima. *Astronomy and Astrophysics*, **244**(1), L11 (1991).
- [3] G.I. Eroshkin, V.V. Pashkevich. *Artificial Satellites*, **42**(1), 59 (2007). DOI: 10.2478/v10018-007-0017-1
- [4] J.D. Giorgini, P.W. Chodas, D.K. Yeomans. *Orbit Uncertainty and Close-Approach Analysis Capabilities of the Horizons On-Line Ephemeris System*. 33rd AAS/DPS meeting in (New Orleans. LA. Nov 26. 2001 — Dec 01. 2001)
- [5] В.В. Пашкевич, А.Н. Вершков. *Издания Пулковской обсерватории*, **235**, 51 (2024). DOI: 10.31725/0367-7966-2024-235-51-68
- [6] V.A. Brumberg, P. Bretagnon. in *Proc. IAU Colloq. 180*. (U.S. Naval Observatory, 2000), p. 293–302.
- [7] B.A. Archinal, C.H. Acton, M.F. A’Hearn, A. Conrad, G.J. Consolmagno, T. Duxbury, D. Hestroffer, J.L. Hilton, R.L. Kirk, S.A. Klioner, D. McCarthy, K. Meech, J. Oberst, J. Ping, P.K. Seidelmann, D.J. Tholen, P.C. Thomas, I.P. Williams. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **130**(22), 21 (2018). DOI: 10.1007/s10569-017-9805-5