11,12

Модифицированный метод Монте-Карло с алгоритмом термостата для модельных ортоникелатов

© В.С. Рюмшин[1], Ю.Д. Панов[1], В.А. Улитко[1], А.С. Москвин[1,2]

[1] Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет,
Екатеринбург, Россия
[2] Институт физики металлов УрО РАН,
Екатеринбург, Россия

E-mail: vitaliy.riumshin@urfu.ru

Поступила в Редакцию 6 марта 2025 г.
В окончательной редакции 6 марта 2025 г.
Принята к публикации 5 мая 2025 г.

Приведены результаты численного моделирования в рамках модифицированного метода Монте-Карло с алгоритмом термостата для псевдоспиновой модели редкоземельных ортоникелатов. Построены температурные фазовые диаграммы для различных степеней заполнения и при различных параметрах модели, исследовано влияние локальных корреляций на критические температуры модельного никелата. Показана возможность детектирования фазово неоднородных состояний. Результаты численного моделирования показывают хорошее качественное согласие с аналитическими результатами в методе среднего поля.

Ключевые слова: редкоземельные ортоникелаты, метод Монте-Карло, приближение среднего поля.

DOI: 10.61011/FTT.2025.07.61199.28HH-25

1. Введение

Ортоникелаты $RNiO_3$ (R — редкоземельный элемент или Y) демонстрируют многообразие физических свойств, таких как переход металл-изолятор, необычное поведение проводимости, неколлинеарные магнитные структуры и т.д. Эти соединения представляют большой интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения и являются объектом интенсивных экспериментальных и теоретических исследований уже много лет [1–4]. Никелаты принадлежат к большому семейству ян-теллеровских магнетиков, однако снятие орбитального вырождения в них происходит за счет анти-ян-теллеровского диспропорционирования, что является экспериментально доказанным фактом [5,6]. Этот же механизм связывают с переходом металл-изолятор, который также сопровождается структурным фазовым переходом в никелатах за исключением $LaNiO_3$, который остается металлическим.

Ранее в рамках приближения среднего поля, а также классического метода Монте-Карло (МК) с кинематическим учетом постоянства концентрации бозонов, нами был исследован двумерный аналог зарядово диспропорционированной фазы редкоземельных никелатов $RNiO_3$ с локальным базисом в виде квартета состояний, состоящим из синглета Ni^{4+} и триплета Ni^{2+} [7,8]. В настоящей работе обсуждаются результаты моделирования с помощью алгоритма термостата в рамках метода МК для трехмерного модельного ортоникелата с локальным базисом из октета состояний различных зарядовых состояний октаэдра NiO_6. В частности, мы исследуем влияние локальных зарядовых корреляций на поведение чистых фаз, для которых отличен от нуля только один параметр порядка. Кроме того, как и в приближении среднего поля и моделировании классическим МК, наблюдается тенденция к фазовому расслоению, а также наличие областей неустойчивости фазы антиферромагнитного изолятора и бозонной сверхтекучей жидкости.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко сформулирована используемая модель и приведены некоторые основные результаты приближения среднего поля. В разделе 3 описан модифицированный алгоритм термостата метода МК, и в разделе 4 приводятся результаты численного моделирования и их сравнение с результатами среднего поля. Краткие выводы сформулированы в разделе 5.

2. Модель и приближение среднего поля

В работах [9,10] для описания электронной структуры и фазовых диаграмм ортоникелатов предложена обобщенная модель эффективных зарядовых триплетов, в которой низкоэнергетическое состояние неискаженных октаэдров NiO_6 образовано зарядовым триплетом $[NiO_6]^{10-,9-,8-}$ (номинально $Ni^{2+,3+,4+}$) с различными спиновыми и орбитальными основными состояниями. Волновую функцию октаэдра обозначим $|\Sigma M; \Gamma\gamma; Sm\rangle$ где ΣM — зарядовый псевдоспин и его проекция, $\Gamma\gamma$ — орбитальное состояние (Γ — неприводимое представление точечной группы O_h и его строка), Sm — величина и проекция обычного спина. Состояние $[NiO_6]^{8-}$ — синглет $|11; A_{1g}1; 00\rangle$, $[NiO_6]^{9-}$ — спин-орбитальный

квартет $|10; E_g 0; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$, $|10; E_g 2; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$, $[NiO_6]^{10-}$ — спиновый триплет $|1-1; A_{2g} 1; 10\rangle$, $|1-1; A_{2g} 1; 1 \pm 1\rangle$.

Оставляя только локальные (U) и нелокальные (V) зарядовые корреляции, парный перенос (t) и билинейный изотропный сверхобмен (J) и ограничиваясь взаимодействием с ближайшими соседями, запишем упрощенный гамильтониан модели:

$$\widehat{H} = \frac{U}{2} \sum_i \widehat{\Sigma}^2_{z,i} - t \sum_{\langle ij \rangle m} (\widehat{B}^+_{m,i} \widehat{B}_{m,j} + \widehat{B}^+_{m,j} \widehat{B}_{m,i}) + V \sum_{\langle ij \rangle} \widehat{\Sigma}_{z,i} \widehat{\Sigma}_{z,j} + J \sum_{\langle ij \rangle} \widehat{\mathbf{S}}_i \widehat{\mathbf{S}}_j. \quad (1)$$

В гамильтонаине (1) $\widehat{\Sigma}_z$ — оператор псевдоспина, $\widehat{\mathbf{S}}$ — оператор спина $S = 1$, а операторы рождения и уничтожения спин-триплетного бозона, $\widehat{B}^+_{m,i}$ и $\widehat{B}_{m,i}$ соответственно, являются аналогом операторов рождения и уничтожения в модели локальных (hard-core) бозонов [11]. Далее удобно перейти к декартовым компонентам для операторов $\widehat{B}^+_{m,i}$ и $\widehat{B}_{m,i}$ с помощью соотношений $\widehat{B}^+_{m,i} = \widehat{B}^m_{xi} + i\widehat{B}^m_{yi}$, и тогда соответствующее слагаемое примет вид

$$\widehat{B}^+_{m,i} \widehat{B}_{m,j} + \widehat{B}^+_{m,j} \widehat{B}_{m,i} = 2(\widehat{B}^m_{xi} \widehat{B}^m_{xj} + \widehat{B}^m_{yi} \widehat{B}^m_{yj}) = 2\widehat{\mathbf{B}}^m_i \widehat{\mathbf{B}}^m_j. \quad (2)$$

Воспользуемся неравенством Боголюбова для оценки большого термодинамического потенциала:

$$\Omega \le \widetilde{\Omega} = \Psi_0 + \langle \widehat{H} - \widehat{H}_0 - \mu \sum_i \widehat{\Sigma}_{z,i} \rangle_0, \quad (3)$$

где Ψ_0 — свободная энергия идеальной системы и статистическое усреднение во втором слагаемом также проводится по состояниям идеальной системы. Слагаемое с химическим потенциалом μ позволяет учесть условие сохранения числа e_g-электронов в системе, которое мы запишем виде

$$-\Delta n = \frac{1}{N} \sum_i \langle \widehat{\Sigma}_{z,i} \rangle. \quad (4)$$

Величина $\Delta n = 0$ при однородном заполнении решетки e_g-электронами соответствует состояниям узлов Ni^{3+}, а $\Delta n = -1$ и $+1$ — состояниям Ni^{4+} и Ni^{2+}.

Введем подрешетки A и B по типу шахматной доски, и выберем гамильтониан идеальной системы $\widehat{H}_0$, в котором взаимодействие кластера с окружением описывается с помощью молекулярных полей, действующих на этот кластер, в следующем виде:

$$\widehat{H}_0 = \sum_i \widehat{H}_{0,i}, \quad (5)$$

$$\widehat{H}_{0,i} = \frac{U}{2} \sum_i \widehat{\Sigma}^2_{z,i} - \varphi_{\lambda(i)} \widehat{\Sigma}_{zi} - \sum_m \mathbf{f}^m_{\lambda(i)} - \widehat{\mathbf{B}}_{m,i} - \mathbf{g}_{\lambda(i)} \widehat{\mathbf{S}}_i. \quad (6)$$

Здесь индекс $\lambda(i) = A$ или B, если узел i принадлежит подрешетке A или B. Молекулярные поля φ_λ, $\mathbf{f}^m_\lambda$, $\mathbf{g}_\lambda$ являются вариационными параметрами для минимизации оценки большого термодинамического потенциала:

$$\frac{2\widetilde{\Omega}}{N} = \sum_\lambda \psi_{0\lambda} - 2zt \sum_m \mathbf{B}^m_A \mathbf{B}^m_B + zV\Sigma_A\Sigma_B + zJ\mathbf{S}_A\mathbf{S}_B + \sum_\lambda (\psi_\lambda - \mu)\Sigma_\lambda + \sum_{\lambda,m} \mathbf{f}^m_\lambda \mathbf{B}^m_\lambda + \sum_\lambda \mathbf{g}^m_\lambda \mathbf{S}_\lambda. \quad (7)$$

Здесь z — координационное число (для простой кубической решетки $z = 6$),

$$\psi_{0\lambda(i)} = -\frac{1}{\beta} \ln(\mathrm{e}^{-\beta \widehat{H}_{0,i}}), \quad (8)$$

$$\Sigma_\lambda = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \psi_\lambda}, \quad \mathbf{B}^m_\lambda = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \mathbf{f}^m_\lambda}, \quad \mathbf{S}_\lambda = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \mathbf{g}_\lambda}, \quad (9)$$

где $\beta = 1/(k_B T)$, и мы полагаем $k_B = 1$.

Необходимое условие минимума для $\widetilde{\Omega}$ приводит к уравнениям для молекулярных полей:

$$\varphi_\lambda = \mu - zV\Sigma_{\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{f}^m_\lambda = 2zt\mathbf{B}^m_{\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{g}_\lambda = -J\mathbf{S}_{\bar{\lambda}}, \quad (10)$$

где $\bar{\lambda}$ — означает подрешетку, дополнительную к λ. Для получения зависимостей термодинамических параметров от Δn необходимо исключить химический потенциал с помощью уравнения

$$\Sigma_A + \Sigma_B = -2\Delta n. \quad (11)$$

Для высокотемпературной неупорядоченной (NO) фазы минимум $\widetilde{\Omega}$ достигается при $\varphi_\lambda =$, $\mathbf{f}^m_\lambda =$, $\mathbf{g}_\lambda = 0$. Условие потери устойчивости минимума NO фазы позволяет найти критическую температуру фазового перехода 2-го рода.

Явные аналитические выражения для величин в формуле (9) возможно получить в некоторых частных случаях. Зарядово-упорядоченную (CO) фазу с параметром порядка $l = (\Sigma_A - \Sigma_B)/2$ определяет частное решение вида

$$\varphi_A \ne \varphi_B, \quad \mathbf{f}^m_\lambda = 0, \quad \mathbf{g}_\lambda = 0. \quad (12)$$

В этом случае

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln[4 + \mathrm{e}^{-\beta U/2}(\mathrm{e}^{\beta\varphi_\lambda} + 3\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi_\lambda})], \quad (13)$$

$$\Sigma_\lambda(\varphi_\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\beta\varphi_\lambda} - 3\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi_\lambda}}{4\,\mathrm{e}^{\beta U/2} + \mathrm{e}^{\beta\varphi_\lambda} + 3\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi_\lambda}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^m_\lambda = 0, \quad \mathbf{S}_\lambda = 0. \quad (15)$$

Уравнение для критической температуры T_{CO}

$$zV\Sigma'_\lambda(\varphi) = 1 \quad (16)$$

при условии $\Sigma_\lambda(\varphi) = -\Delta n$ позволяет построить зависимость $T_{CO}(\Delta n)$.

Для антиферромагнитной (AFM) фазы с параметром порядка $L = (S_{z,A} - S_{z,B})/2$ рассмотрим частное решение

$$\varphi_\lambda = \varphi, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = 0, \quad \mathbf{g}_\lambda = (0, 0, g_\lambda). \tag{17}$$

Тогда $\mathbf{S}_\lambda = (0, 0, S_{z,\lambda})$, $\mathbf{B}_\lambda^m = 0$,

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln\{4 + \mathrm{e}^{-\beta U/2}[\mathrm{e}^{\beta\varphi} + (1 + 2ch(\beta g_\lambda))\mathrm{e}^{-\beta\varphi}]\}, \tag{18}$$

$$\Sigma_\lambda(\varphi, g_\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{\beta\varphi} - [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}}{4\,\mathrm{e}^{\beta U/2} + \mathrm{e}^{\beta\varphi} - [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}}, \tag{19}$$

$$S_{z,\lambda}(\varphi, g_\lambda) = \frac{2sh(\beta g_\lambda)\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}}{4\,\mathrm{e}^{\beta U/2} + \mathrm{e}^{\beta\varphi} + [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}}. \tag{20}$$

Соответствующее уравнение для критической температуры T_{AFM} имеет вид

$$zJ\,\frac{\partial S_{z,\lambda}(\varphi, 0)}{\partial g_\lambda} = 1. \tag{21}$$

Для фазы, которую по аналогии с моделью локальных (hard-core) бозонов [11] можно назвать фазой сверхтекучей бозе-жидкости (BS) с параметром порядка $\mathbf{B}_\lambda^m \neq 0$, можно рассмотреть решения

$$\varphi_\lambda = \varphi, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = (f^m, 0), \quad \mathbf{g}_\lambda = 0. \tag{22}$$

В этом случае $\mathbf{S}_\lambda = 0$, $\mathbf{B}_\lambda^m = (B_\lambda^m, 0)$,

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln\{4 + 2\,\mathrm{e}^{-\beta U/2}\left[\mathrm{e}^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)\right]\}, \tag{23}$$

где $\xi(\varphi, f) = \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{4} f^2}$, $f^2 = \Sigma_m (f^m)^2$,

$$\Sigma_\lambda(\varphi, f) = \frac{\varphi sh(\beta\xi) - \xi\,\mathrm{e}^{-\beta\varphi}}{\xi[2\,\mathrm{e}^{\beta U/2} + \mathrm{e}^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)]}, \tag{24}$$

$$B_\lambda^m(\varphi, f) = \frac{f^m sh(\beta\xi)}{4\xi[2\,\mathrm{e}^{\beta U/2} + \mathrm{e}^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)]}. \tag{25}$$

Уравнение для критической температуры T_{BS} имеет вид

$$2zt\,\frac{\partial B_\lambda^m(\varphi, 0)}{\partial f} = 1. \tag{26}$$

3. Алгоритм термостата метода Монте-Карло

Для численного моделирования мы используем алгоритм термостата метода МК [12]. По сравнению с классическим вариантом, основанном на алгоритме Метрополиса и предполагающего непрерывное изменение наблюдаемых или состояния на узлах системы [7], квантовый характер изменения состояния в элементарном шаге МК в используемом нами варианте алгоритма термостата устраняет расходимость теплоемкости при низких температурах. К недостаткам алгоритма термостата можно отнести высокую трудоемкость элементарного шага МК, связанную с необходимостью решения задачи на собственные значения для гамильтониана на узле.

Опишем кратко алгоритм термостата для модели (1). Запишем волновую функцию системы в виде произведения волновых функций на узлах:

$$|\Psi\rangle = \prod_c |\psi_c\rangle, \quad |\psi_c\rangle = \sum_{M\Gamma\gamma Sm} a^c_{M\gamma m} |1M; \Gamma\gamma; Sm\rangle. \tag{27}$$

Построим гамильтониан узла c, усредняя по состояниям всех узлов $c' \neq c$:

$$\widehat{H}_c = \langle\widetilde{\Psi}_c|\widehat{H}|\Psi_c\rangle, \quad |\Psi_c\rangle = \prod_{c' \neq c} |\psi_{c'}\rangle. \tag{28}$$

Для модели (1) получим

$$\widehat{H}_c = \frac{U}{2}\widehat{\Sigma}_z^2 - \mu\widehat{\Sigma}_z - t\sum_{c',m}\left(\langle\widehat{B}_m^+\rangle_{c'}\widehat{B}_m + \langle\widehat{B}_m\rangle_{c'}\widehat{B}_m^+\right) + V\sum_{c'}\langle\widehat{\Sigma}_z\rangle_{c'}\widehat{\Sigma}_z + J\sum_{c'}\langle\widehat{\mathbf{S}}\rangle_{c'}\widehat{\mathbf{S}}. \tag{29}$$

Здесь величины $\langle\widehat{A}\rangle_{c'} = \langle\psi_{c'}|\widehat{A}|\psi_{c'}\rangle$ выступают в роли внешних полей, действующих на узел c со стороны узла c', и предполагается суммирование по ближайшим к узлу c соседям. Также добавлено слагаемое с химическим потенциалом, которое позволяет в дальнейшем получить зависимости термодинамических функций от Δn.

Изменение состояния узла реализуем по алгоритму термостата. Для этого на узле решаем задачу на собственные значения:

$$\widehat{H}_c|\psi_{c,n}\rangle = \varepsilon_n|\psi_{c,n}\rangle, \tag{30}$$

определяем вероятности состояний и строим функцию распределения:

$$p_n = \frac{e^{-\beta\varepsilon_n}}{\Sigma_m e^{-\beta\varepsilon_m}}, \quad F(n) = \sum_{m=1}^{n} p_m, \tag{31}$$

и используя случайную равномерно распределенную на интервале (0,1) величину ξ, определяем номер нового состояния узла с из уравнения:

$$\xi = F(n). \tag{32}$$

Далее, статистику по шагам МК собираем стандартным образом.

4. Сравнение результатов численного моделирования и приближения среднего поля

На рис. 1 приведены критические температуры перехода из неупорядоченной фазы в CO, AFM и BS фазы модельного никелата. Здесь параметр локальных корреляций $U = 0$, что отличается от рассмотренной

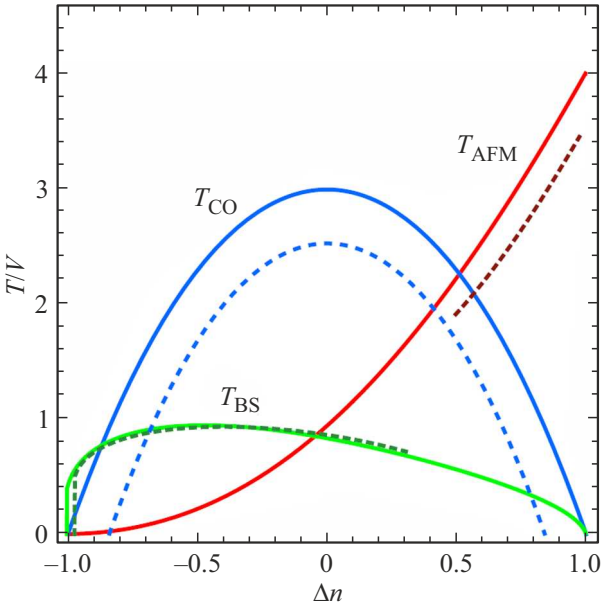

Рис. 1. Зависимости критических температур при $z = 6$, $V = 1$, $J = 1$, $t = 1$, $U = 0$. Сплошные линии — среднее поле, пунктир — моделирование МК.

ранее в работах [7,8] ситуации с $U = -\infty$. Результаты моделирования показывают характерное занижение T_{CO} по сравнению со значением в методе среднего поля. Однако, следует обратить внимание, в отличие от классического метода МК нет уменьшения значений критических температур на порядок. Это связано, по-видимому, с качественно более адекватным характером учета температурных флуктуаций в представленном алгоритме. Обрыв кривых для T_{AFM} при $\Delta n \simeq 0.5$ и T_{BS} при $\Delta n \simeq 0.3$ соответствует началу области неустойчивости этих фаз. Возможность определения границ этой области также является особенностью данного метода: определенные значения Δn оказываются недостижимы при всех заданных значениях химического потенциала μ. Устойчивость этих фаз подробнее будет рассмотрена ниже.

При $U > 0$ (рис. 2, a) T_{CO} начинает плавно уменьшаться. Последовательное увеличение U до 4 (Рис. 2, b) вызывает появление плато вблизи половинного заполнения $\Delta n = 0$, что говорит о возникновении фазового перехода первого рода. Дальнейшее увеличение U до 6 (рис. 2, c) оставляет при половинном заполнении только неупорядоченную фазу.

На рис. 3 представлена зависимость T_{CO} при $\Delta n = 0$ в переменных $T - V$. Результаты вычислений в рамках метода среднего поля, уравнение (16), предсказывают линейную зависимость $T_{CO}(V)$, в то время как моделирование МК дает ожидаемо заниженный результат. Как и в среднем поле, фазовый переход второго рода наблюдается при $V/U > 0.5$, а фазовый переход первого рода в диапазоне $0.25 < V/U < 0.4$.

На рис. 4 показано постепенное уменьшение T_{BS} при увеличении U до 4, при котором происходит существенное подавление BS фазы. Пунктирными линиями показаны границы областей термодинамической устойчивости, которые сходятся при $\Delta n \simeq 0.6$ при понижении температуры для ситуаций с $U = 0$, 1 и 2. В случае $U = 2$ BS фаза разбивается на 2 части, каждая из которых, в свою очередь, имеет области неустойчивости. При $U = 4$ остается лишь небольшой островок BS фазы в интервале $-1 < \Delta n < 0.7$. Далее BS фаза становится неустойчивой, что означает появление неупорядоченной фазы либо области фазового расслоения. Аналогичная ситуация наблюдается и для AFM фазы (рис. 5) ее существование возможно в интервале $0.5 < \Delta n < 1$. Эти результаты согласуются с тем, что было получено в рамках среднего поля и моделирования классическим МК [7].

Одна из возможных фазовых диаграмм модельного никелата приведена на рис. 6. Здесь можно отчетливо наблюдать появление двух областей фазового расслоения: CO+BS в диапазоне $-0.6 < \Delta n < 0$ и CO+AFM в диапазоне $0 < \Delta n < 0.9$. Между ними последовательно

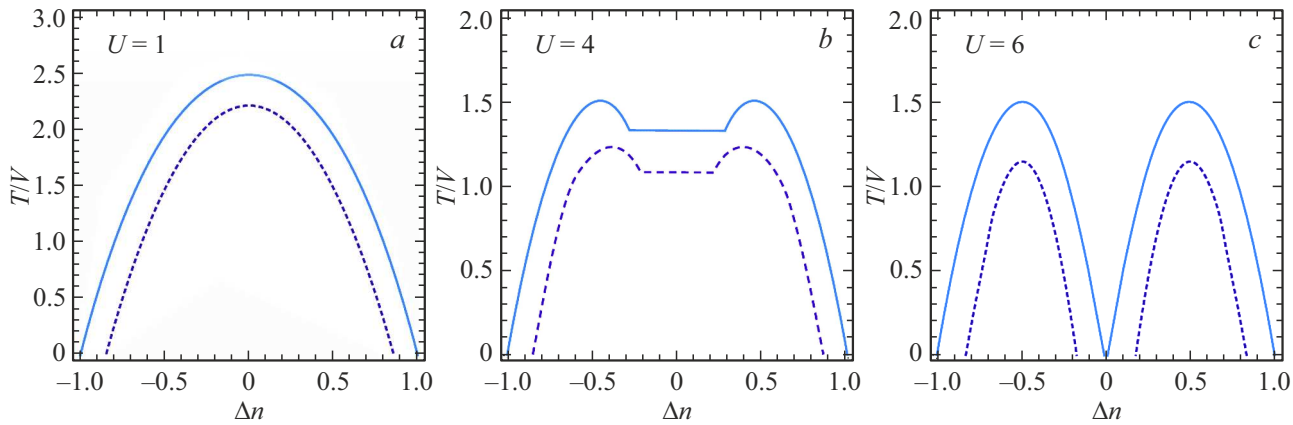

Рис. 2. Зависимости критических температур NO-CO при $V = 1$, $J = 0$, $t = 0$. Сплошные линии —- среднее поле, пунктир — моделирование МК.

расположены BS, CO и AFM фазы. Результаты показывают, что для основного состояния, также как и в приближении среднего поля, BS и AFM фазы реализуются вблизи малых и больших значений n, а CO фаза существует при конечных температурах для данных параметров модели.

Сравнение полученных фазовых диаграмм при половинном заполнении $\Delta n = 0.5$ показывает, что результаты моделирования верно предсказывают переход NO-CO на качественном уровне. Однако, при дальнейшем понижении температуры, при определенных параметрах модели, возможно лишь сохранение CO фазы, либо переход в BS фазу.

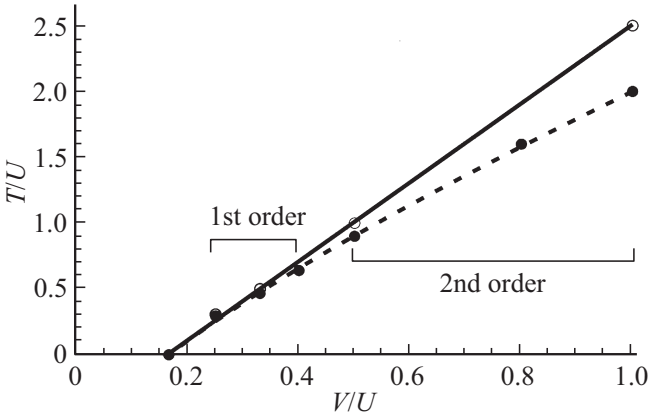

Рис. 3. Зависимость температуры перехода NO-CO от параметра нелокальных корреляций. Сплошная линия — среднее поле, пунктир — моделирование МК.

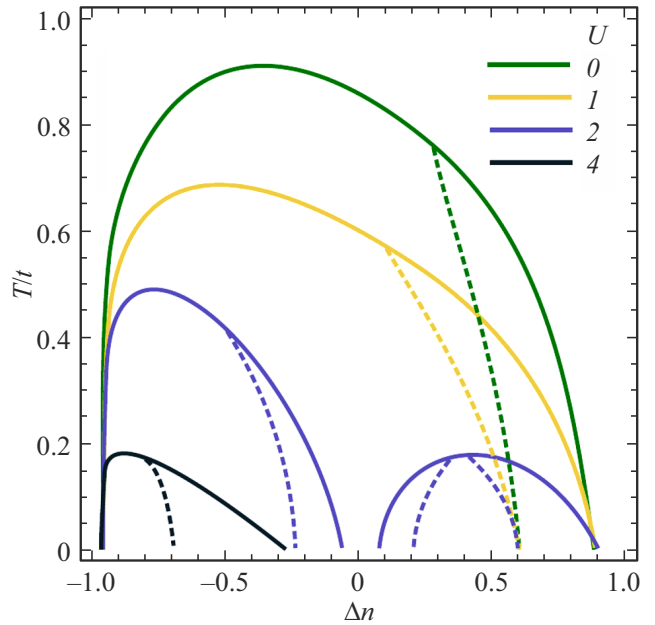

Рис. 4. Зависимости критических температур NO-BS. Пунктирные линии показывают границы устойчивости однородной фазы.

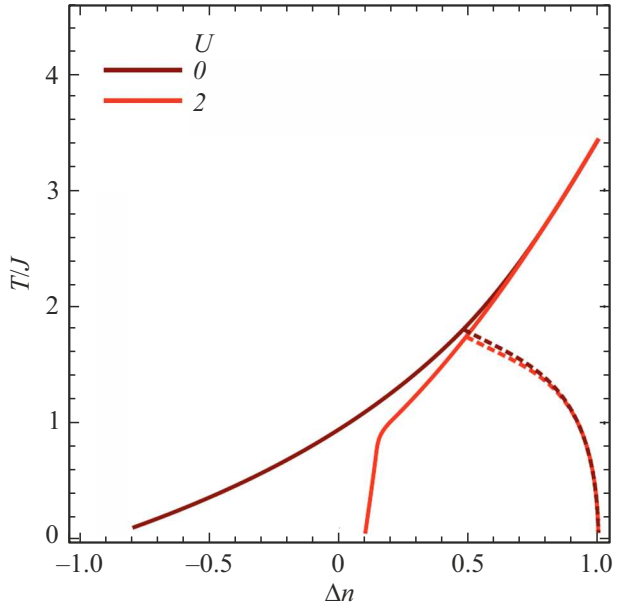

Рис. 5. Зависимости критических температур NO-AFM. Пунктирные линии показывают границы устойчивости однородной фазы.

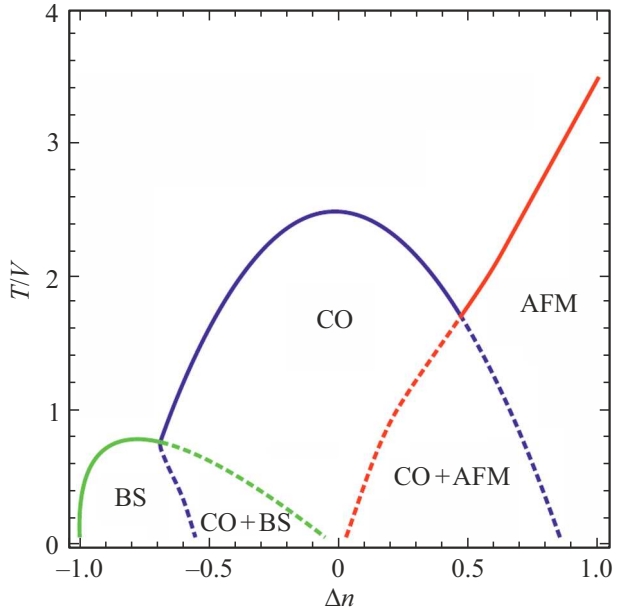

Рис. 6. Фазовая диаграмма модельного никелата при $V = 1$, $J = 1$, $t = 1$, $U = 0$. Пунктир — границы областей фазового расслоения CO+BS и CO+AFM.

5. Заключение

Результаты численного моделирования в рамках модифицированного метода Монте-Карло с алгоритмом термостата показывают хорошее качественное согласие с результатами среднего поля для тех простых решений, когда могут быть получены аналитические выражения. Это позволяет использовать данный численный ме-

тод для анализа свойств фазовых состояний в более сложных ситуациях, когда аналитическое решение недоступно. В работе построены температурные фазовые диаграммы для псевдоспиновой модели редкоземельных ортоникелатов при различных значениях параметра локальных зарядовых корреляций. Показано, что модель предсказывает разнообразные типы фазовых переходов, а также существование неоднородных фазовых состояний при различных значениях параметров.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00196.

Конфликт интересов

Авторы сообщают об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

[1] D.J. Gawryluk, Y.M. Klein, T. Shang, D. Sheptyakov, L. Keller, N. Casati, P. Lacorre, M.T. Fernandiez-Diaz, J. Rodriguez-Carvajal, M. Medarde. Physical Review B **100**, *20*, 205137 (2019).
[2] S. Catalano, M. Gibert, J. Fowlie, J. Íñiguez, J.M. Triscone, and J. Kreisel. Reports on Progress in Physics **81**, *4*, 046501 (2018).
[3] M.L. Medarde. J. Phys. Condens. Matter **9**, *8*, 1679 (1997).
[4] Y.M. Klein, M. Kozlowski, A. Linden, Ph. Lacorre, M. Medarde, D.J. Gawryluk. Crystal Growth & Design **21**, *7*, 4230 (2021).
[5] J.A. Alonso, J.L. García-Muñoz, M.T. Fernández-Díaz, M.A.G. Aranda, M.J. Martánez-Lope, M.T. Casais. Physical Review Letters **82**, *19*, 3871 (1999).
[6] J.A. Alonso, M.J. Martínez-Lope, M.T. Casais, J.L. Garcıa-Muñoz, M.T. Fernández-Díaz. Physical Review B **61**, *3*, 1756 (2000).
[7] Ю.Д. Панов, С.В. Нужин, В.С. Рюмшин, А.С. Москвин. Физика твердого тела **66**, *7*, 1221 (2024).
[8] В.С. Рюмшин, С.В. Нужин, Ю.Д. Панов, А.С. Москвин. Физика твердого тела **66**, *7*, 1047 (2024).
[9] A.S. Moskvin. Magnetochemistry **9**, *11*, 1 (2023).
[10] А.С. Москвин. Журнал Экспериментальной и теоретической физики **167**, *3*, 412 (2025).
[11] R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz. Rev. Mod. Phys. **62**, *1*, 113 (1990).
[12] Y. Miyatake, M. Yamamoto, J.J. Kim, M. Toyonaga, O. Nagai. Journal of Physics C: Solid State Physics **19**, *14*, 2539 (1986).

Редактор Т.Н. Василевская