05

Теоретическое исследование влияния параметров усиливающей и поглощающей среды на динамику когерентной синхронизации мод в двухсекционном лазере

© Р.М. Архипов[1], М.В. Архипов[1], О.О. Дьячкова[1,2], А.В. Пахомов[1,2], Н.Н. Розанов[1]

[1] ФТИ им. А.Ф. Иоффе,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: arkhipovrostislav@gmail.com, mikhail.v.arkhipov@gmail.com, o.o.dyachkova@gmail.com, antpakhom@gmail.com, nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2025 г.
В окончательной редакции 28.04.2025 г.
Принята к публикации 29.04.2025 г.

Проведено теоретическое исследование влияния параметров усиливающей и поглощающей сред на динамику когерентной синхронизации мод (КСМ) в двухсекционном лазере. На основе аналитических расчетов и численного моделирования изучены условия формирования устойчивого режима КСМ при параметрах, характерных для терагерцовых квантово-каскадных лазеров (ККЛ). С использованием обобщённой теоремы площадей доказаны существование и устойчивость режима КСМ в таких системах. Численное решение нелинейных уравнений, описывающих взаимодействие излучения с активной и пассивной средами, позволило определить ключевые параметры, влияющие на динамику КСМ. Показано, что критическую роль играет соотношение времен релаксации населенностей в усиливающей и поглощающей средах. Полученные результаты важны для разработки самостартующих компактных лазерных систем, генерирующих короткие импульсы, в частности для терагерцовых ККЛ. Такие системы перспективны для применения в сверхбыстрой спектроскопии и других приложениях, требующих стабильной генерации ультракоротких импульсов

Ключевые слова: когерентная синхронизация мод, двухсекционный лазер, квантово-каскадный лазер, самоиндуцированная прозрачность, нелинейная динамика.

DOI: 10.61011/OS.2025.06.60916.7912-25

1. Введение

Когерентная синхронизация мод (КСМ), теоретически предсказанная более 30 лет назад [1], представляет собой механизм генерации коротких импульсов в двухсекционном лазере, основанный на формировании 2π-импульсов самоиндуцированной прозрачности (СИП) в поглощающей среде [2,3]. Этот тип синхронизации возникает при когерентном взаимодействии лазерного излучения со средой, когда длительность импульса становится короче времени релаксации поляризации T_2 как усилителя, так и поглотителя [4–8]. В отличие от стандартной пассивной синхронизации мод, реализуемой за счет некогерентного насыщения усиления и поглощения [9,10], режим КСМ позволяет преодолеть ограничение на длительность импульса, связанное с временем T_2, и достичь генерации импульсов длительностью вплоть до одного колебательного цикла в лазерах с ультракоротким резонатором [7].

Активные теоретические исследования режима КСМ в двухсекционных лазерах начались лишь в последние годы [4–8,11–13]. В работе [6] и последующих исследованиях [11,12] был развит аналитический подход к описанию КСМ на основе теоремы площадей МакКола и Хана. Экспериментально режим КСМ впервые был реализован в титан-сапфировом лазере с когерентным поглотителем [13]. КСМ рассматривается как перспективный механизм генерации коротких импульсов в квантово-каскадных лазерах (ККЛ) [4,8], где стандартная пассивная синхронизация мод затруднена из-за чрезвычайно быстрых времен релаксации [14–17].

Однако существующие теоретические работы, посвященные КСМ в ККЛ [4,8], используют схемы, труднодостижимые на практике, для которых невозможен самостарт генерации. В работе [18] была экспериментально продемонстрирована пассивная синхронизация мод в терагерцовом твердотельном лазере с графеновым насыщающимся поглотителем, однако этот режим также носил некогерентный характер. С практической точки зрения КСМ обладает значительным преимуществом, поскольку позволяет генерировать более короткие и мощные импульсы по сравнению со стандартной пассивной синхронизацией [19]. В работе [20] теоретически была показана возможность реализации самостартующего режима КСМ в ИК и ТГц диапазонах в лазерах с быстрыми временами релаксации при параметрах, близких к реализуемым в ККЛ. Тем не менее детальное

исследование влияния параметров системы на динамику КСМ в таких условиях до сих пор отсутствует.

В настоящей работе, являющейся логическим продолжением исследования [20], мы ставим целью систематически изучить, как параметры лазерной системы влияют на возможность реализации когерентной синхронизации мод. В частности, изучается влияние двух ключевых соотношений:

– отношения времен релаксации поляризации и разности населенностей T_2/T_1;

– отношения дипольных моментов поглотителя и усилителя d_a/d_g на характеристики выходного излучения, такие как длительность импульсов, максимальная амплитуда и тип генерации.

Для изучения зависимости основных характеристик режима КСМ от параметров лазера был также использован аналитический подход на основе теоремы площадей. В частности, были рассмотрены зависимости от таких параметров, как уровень накачки, время обхода резонатора, времена релаксации в активной среде и отношение дипольных моментов перехода в поглотителе и усилителе.

Настоящая статья организована следующим образом: в разд. 2 мы представляем теоретическую модель и обсуждаем используемые параметры, в разд. 3 было изучено влияние параметров лазерной системы на возможность реализации КСМ на основе трех различных случаев, приводящих к генерации фемтосекундных импульсов. Четвертый раздел посвящен аналитическому описанию когерентного распространения ультракоротких импульсов в резонансной среде на основе теоремы площадей; была изучена динамика изменения площади начального импульса по мере его распространения в резонаторе при изменении параметров системы. С помощью этого подхода были исследованы вопросы о существовании и устойчивости режима КСМ при изменении как параметров резонатора, так и параметров сред в обеих секциях лазера.

2. Теоретическая модель

В настоящей работе, как и в статье [20], была использована модель двухсекционного лазера, помещенного в кольцевой резонатор с однонаправленной модой генерации; схема изображена на рис. 1, *a*. Поглощающая и усиливающая среды моделировались в двухуровневом приближении, уширение перехода предполагалось равномерным. Зеркала *1, 3* и *4* не пропускали излучение, зеркало *2* имело коэффициент отражения $R_{\text{resonator}} = 0.8$.

Численные расчеты проводились на основе решения системы уравнений Максвелла-Блоха для медленно меняющейся амплитуды электрического поля $A(z,t)$ и медленной амплитуды поляризации — мнимой части недиагонального элемента матрицы плотности двухуровневой среды $P_s(z,t)$ и разности населенностей двухуровневой среды. Эта система уравнений имеет следующий вид [2,20]:

$$\frac{\partial}{\partial t}A_{a,g}(z,t) + \frac{\partial}{\partial z}A_{a,g}(z,t) = 4\pi\omega_0 d_{12_{a,g}} N_{0_{a,g}} P_{s_{a,g}}(z,t), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}P_{s_{a,g}} = -\frac{P_{s_{a,g}}(z,t)}{T_{2_{a,g}}} + \frac{d_{12_{a,g}}}{2\hbar}\, n_{a,g}(z,t) A_{s_{a,g}}(z,t), \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}n_{a,g}(z,t) = -\frac{n_{a,g}(z,t) - n_{0_{a,g}}}{T_{1_{a,g}}} - \frac{2d_{12_{a,g}}}{\hbar} A_{s_{a,g}}(z,t) P_{s_{a,g}}(z,t). \tag{3}$$

В численных расчетах генерация в режиме КСМ стартовала с постоянной напряженности электрического поля в резонаторе, величина которой равна 10^{-13} ед. СГСЭ. Все зеркала *1, 3, 4* не пропускали излучение, зеркало *2* имело коэффициент отражения R. Поляризация $P_{s_{a,g}}(z,0) = 0$ в начальный момент времени во всех средах, начальные занчения инверсии $n_{0a} = 1$, $n_{0g} = -1$.

Здесь и далее индексы a и g относятся к поглощающей (absorber) и усиливающей (gain) средам соответственно, T_1 — время релаксации разности населенностей, T_2 — время релаксации поляризации, d_{12} — дипольный момент перехода, n_0 — равновесное значение разности населенностей ($n_{0a} = 1$, $n_{0g} = -1$), N_0 — концентрация частиц, ω_0 — частота резонансного перехода как в усилителе, так и в поглотителе. Мы рассматриваем случай с нулевой расстройкой ($\Delta\omega = 0$) и предполагаем однородно уширенный резонансный переход. Параметры, используемые в численном расчете, приведены в таблице. Как для усилителя, так и для поглотителя все параметры были одинаковыми за исключением длины среды (соотношение длин секций поглотителя L_a и усилителя L_g было задано как 1:3) и дипольного момента перехода. Как показывают результаты экспериментальных исследований, в ККЛ реализуемо когерентное распространение импульсов и Раби-осцилляции, и эти явления могут быть описаны с помощью малоуровневых моделей среды, системой уравнений Максвелла-Блоха типа (1)–(3) [21].

3. Результаты численного моделирования

Для того чтобы исследовать зависимость генерации импульсов от параметров сред в резонаторе, для каждого набора значений было проведено численное решение системы уравнений Максвелла-Блоха (1)–(3). После большого числа обходов резонатора было или установлено отсутствие генерации, или измерялись параметры генерируемых импульсов: временной ширины на полувысоте ($FWHM$, fs), максимальное значение электрического поля $|A(z)|^2$ (Pulse amplitude, arb. units) и расстояние между соседними импульсами Δ; все эти данные усреднялись для большого количества импульсов ($N \sim 200$).

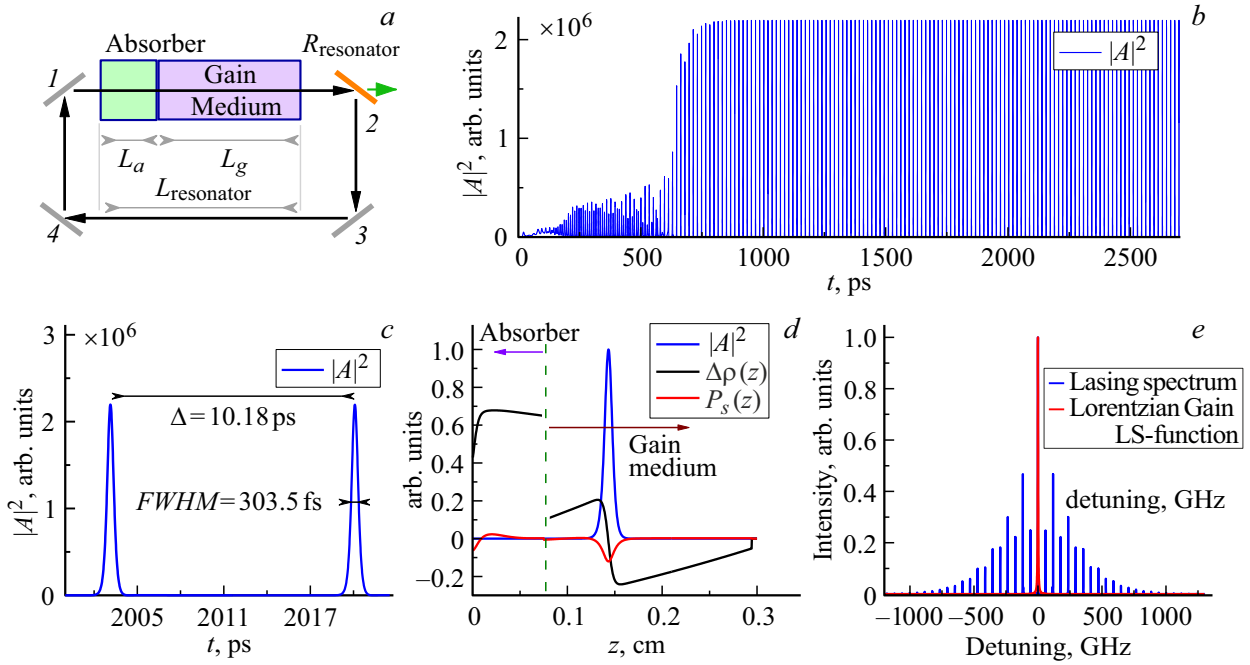


Рис. 1. (*a*) Схема двухсекционного лазера с кольцевым резонатором, содержащим усиливающую и поглощающую среду; *1, 2, 3, 4* — зеркала резонатора. (*b*) Зависимость квадрата амплитуды электрического поля $|A(z)|^2$ (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора, (*c*) два одиночных импульса генерации и некоторые их параметры; (*d*) распределение амплитуды электрического поля $|A(z)|^2$ в резонаторе (синяя линия), разности населенностей $\Delta\rho(z)$ (черная линия) и $P_s(z)$ (красная линия) при проходе импульса в секции усилителя. (*e*) Спектр генерации (синяя линия) и лоренцев контур линии усиления (красная линия).

Параметр	Description	1	2	3
Absorber	Detuning, rad/s	0	0	0
	d, D (ESU, 10^{-18})	*10*	10	*14*
	T_1, ps	10	20	10
	T_2, ps	*4*	*7*	4
	n, cm^{-3}	5.00E+16	5.00E+16	5.00E+16
Gain	Detuning, rad/s	0	0	0
	d, D (ESU, 10^{-18})	5	5	7
	T_1, ps	10	20	10
	T_2, ps	*4*	*7*	4
	n, cm^{-3}	5.00E+16	5.00E+16	5.00E+16
Resonator	λ, μm	14	14	14
	$L_{resonator}$, cm	0.3	0.3	0.3
	$R_{resonator}$	0.8	0.8	0.8

Примечание. Начальные параметры, использованные в вычислениях; значения, которые изменялись, отмечены курсивом.

Для наглядной иллюстрации на рис. 1,*b*–*e* представлены результаты численного решения системы (1)–(3) для одного набора параметров: случай 2 в таблице, отношение времен релаксации поляризации и разности населенностей, $T_2/T_1 = 0.2$, $T_2 = 2$ ps. На рис. 1, *b* и 1, *e* показаны зависимость интенсивности излучения от времени и спектр сигнала. Дополнительно в устойчивом режиме показана часть зависимости интенсивности излучения в виде двух отдельных импульсов (рис. 1, *c*), а также мгновенное распределение амплитуды электрического поля $|A(z)|^2$, разности населенностей $\Delta\rho(z)$ и амплитуды поляризации $Ps(z)$ при прохождении импульса в секции усилителя (рис. 1, *d*).

Для большинства рассмотренных ниже наборов параметров, как и для случая на рис. 1, *b*, после времени стабилизации (в среднем 500 ps) генерация представляет собой последовательность одинаковых коротких импульсов, следующих друг за другом с постоянным интервалом Δ, что свидетельствует о достижении синхронизации мод. В каждом случае $FWHM$ импульса меньше

времени T_2; выполнение этого условия необходимо для того, чтобы считать синхронизацию мод когерентной. Отметим также, что, как видно на рис. 1, *e*, полученный спектр значительно шире лоренцева контура однородного уширения, что характерно исключительно для когерентной синхронизации мод.

Время прохождения импульсом резонатора (roundtrip time, T_{rt}) для данной конфигурации составляет ~ 10 ps, и если в тексте не указано иное, расстояние между импульсами было $\Delta = T_{\mathrm{rt}}$, что указывает на одноимпульсный режим.

3.1. Зависимость параметров генерации от отношения времен релаксации поляризации и разности населенностей T_2/T_1

Так как время релаксации поляризации T_2 зависит от рабочей температуры устройства, колебания температуры резонатора могут привести к изменению длительности импульсов или даже к сбою генерации. Поэтому нами была рассмотрена зависимость параметров генерируемых импульсов от отношения времен релаксации поляризации и разности населенностей T_2/T_1. Были рассмотрены два случая ($T_1 = 10$ ps и $T_1 = 20$ ps, см. набор значений 1 и 2 в таблице), для которых при всех остальных фиксированных параметрах изменялось время T_2 как для поглотителя, так и усилителя.

На рис. 2 представлена зависимость $FWHM$ и амплитуды импульсов от отношения T_2/T_1. Для обоих случаев в интервале $0.1 < T_2/T_1 < 0.6$ наблюдается явная гиперболическая зависимость и полуширины импульсов, и амплитуды от величины T_2; так, при увеличении времени T_2 одновременно уменьшается длина одиночного импульса и увеличивается его амплитуда.

После $T_2/T_1 > 0.6$ тип генерации излучения резко меняется — теперь генерируемые импульсы имеют разную максимальную интенсивность и полуширину. Эти случаи отмечены на рис. 2 полузакрашенными фигурами, для них отмечены максимальные и минимальные значения $FWHM$ и амплитуды. Пример генерации различных импульсов для случая $T_1 = 20$ ps, $T_2/T_1 = 1$ приведен на рис. 3, *a*. Видно, что хотя интервал между импульсами Δ сохраняется, прочие характеристики меняются от импульса к импульсу.

Зависимость расстояния между импульсами Δ от отношения T_2/T_1 представлена на рис. 4, *a*. Как и выше, случаи с генерацией разных импульсов отмечены полузакрашенными символами. Как видно на рис. 4, *a*, даже в случае генерации импульсов различной формы для $T_1 = 20$ ps режим генерации был всегда одноимпульсным ($\Delta = T_{\mathrm{rt}} \sim 10$ ps). Для $T_1 = 10$ ps режим был двухимпульсным ($\Delta = 0.5T_{\mathrm{rt}} \sim 5$ ps) для всех случаев, кроме двух: хотя среднее значение Δ было порядка $0.5T_{\mathrm{rt}}$, интервал между импульсами менялся; его максимальное и минимальное значения отмечены на графике горизонтальными чертами.

Для $T_1 = 10$ ps по сравнению с $T_1 = 20$ ps разброс между амплитудами и полуширинами гораздо больше. Также для случая $T_1 = 10$ ps генерация импульсов прекращается при $T_2/T_1 < 0.2$ и $T_2/T_1 > 0.7$, в то время как для $T_1 = 20$ ps генерация была возможна для более широкого диапазона значений ($0.1 < T_2/T_1 < 1.1$). Все это указывает на большую стабильность случая $T_1 = 20$ ps и больший диапазон потенциального применения.

Как уже упоминалось, время релаксации поляризации T_2 зависит от рабочей температуры устройства. Результаты выше говорят о том, что для рассмотренных нами начальных наборов параметров (таблица) при малом изменении времени T_2 характер генерации импульсов (один период следования, одинаковая форма импульсов) не изменяется. Одновременно мы показали существование устойчивого участка $0.1 < T_2/T_1 < 0.6$, для которого при увеличении значения T_2 возможно одновременно увеличить амплитуду импульсов (порядка 30%) и сократить длительность импульсов (330 → 290 fs для случая $T_1 = 10$ ps и 305 → 260 fs для $T_1 = 20$ ps).

3.2. Зависимость параметров генерации от отношения дипольных моментов поглотителя и усилителя d_a/d_g

Рассмотрим зависимость характеристик генерируемых импульсов от отношения дипольных моментов в поглотителе и усилителе d_a/d_g. Дипольный момент излучательного перехода квантово-каскадного лазера зависит от приложенного электрического поля (или напряжения смещения), что, следовательно, открывает возможность изменения параметров генерации без смены резонаторной ячейки. Были рассмотрены два случая ($d_g = 5$ D и $d_g = 7$ D, см. набор значений 1 и 3 в таблице); при всех остальных фиксированных параметрах менялось значение дипольного момента для поглотителя d_a.

Остановимся на интервале между генерируемыми импульсами. Зависимость расстояния между импульсами Δ от отношения d_a/d_g представлена на рис. 4, *b*. Как видно, для большинства случаев расстояние между импульсами было $\Delta = 0.5T_{\mathrm{rt}}$, что указывает на двухимпульсный режим. Только в двух случаях ($d_g = 5$ D, $d_a/d_g = 3$ и $d_a/d_g = 4.6$) режим был одноимпульсный, т. е. $\Delta = T_{\mathrm{rt}} = 10$ ps. Возникали также и режимы генерации с непостоянным интервалом между импульсами: для ряда значений $d_g = 5$ D, $3 < d_a/d_g < 4.5$ разными были и интенсивности импульсов, и их полуширины (рис. 5), и интервал между ними ($\Delta \sim 0.5{-}5$ ps, $\Delta_{\mathrm{mean}} \sim 3.33$ ps $= T_{\mathrm{rt}}/3$). В двух случаях, для $d_g = 7$ D, при $d_a = 9$ D и $d_a = 10$ D, была генерация одинаковых и различных импульсов соответственно с постоянным интервалом, равным $\Delta = 3.33$ s $= T_{\mathrm{rt}}/3$. В отдельном случае, для значений $d_g = 7$ D, $d_a = 8$ D, $d_a/d_g = 1.143$, была стабильная генерация одинаковых импульсов с периодом следования $\Delta = 2.5$ ps$= T_{\mathrm{rt}}/4$.

На рис. 5 представлены зависимости $FWHM$ и амплитуды генерируемых импульсов от отношения d_a/d_g. Для

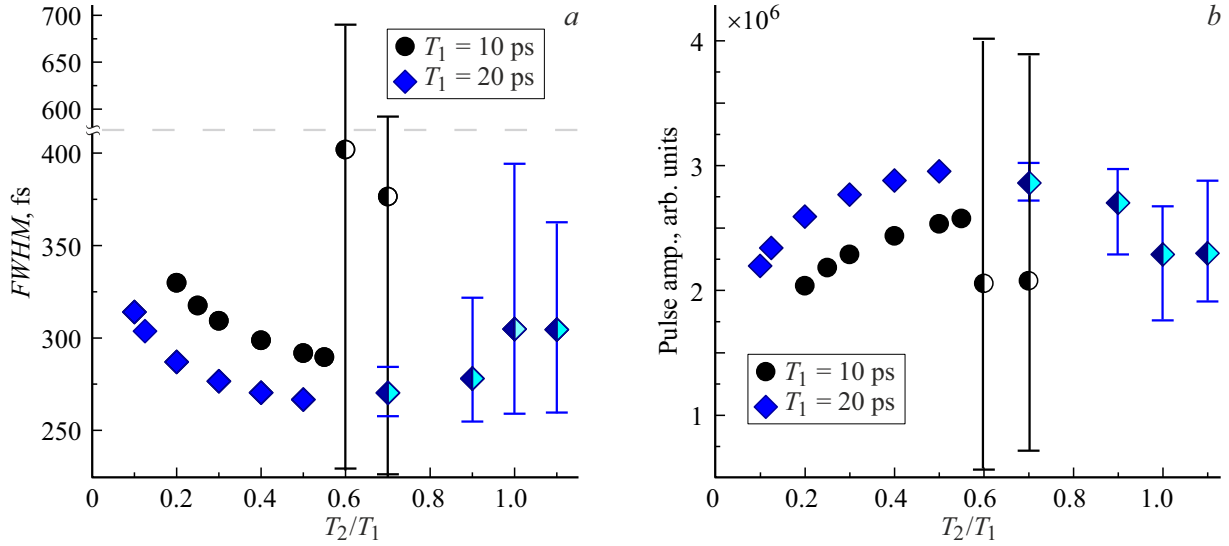


Рис. 2. Зависимость от отношения T_2/T_1 (a) ширины на полувысоте ($FWHM$) и импульсов (b) максимального значения электрического поля $|A(z)|^2$ (амплитуды) импульсов; кружки для величины $T_1 = 10$ ps, ромбы для $T_1 = 20$ ps. Случаи генерации различных по форме импульсов отмечены полузакрашенными фигурами, для них горизонтальными чертами отмечены максимальные и минимальные значения $FWHM$ и амплитуды.

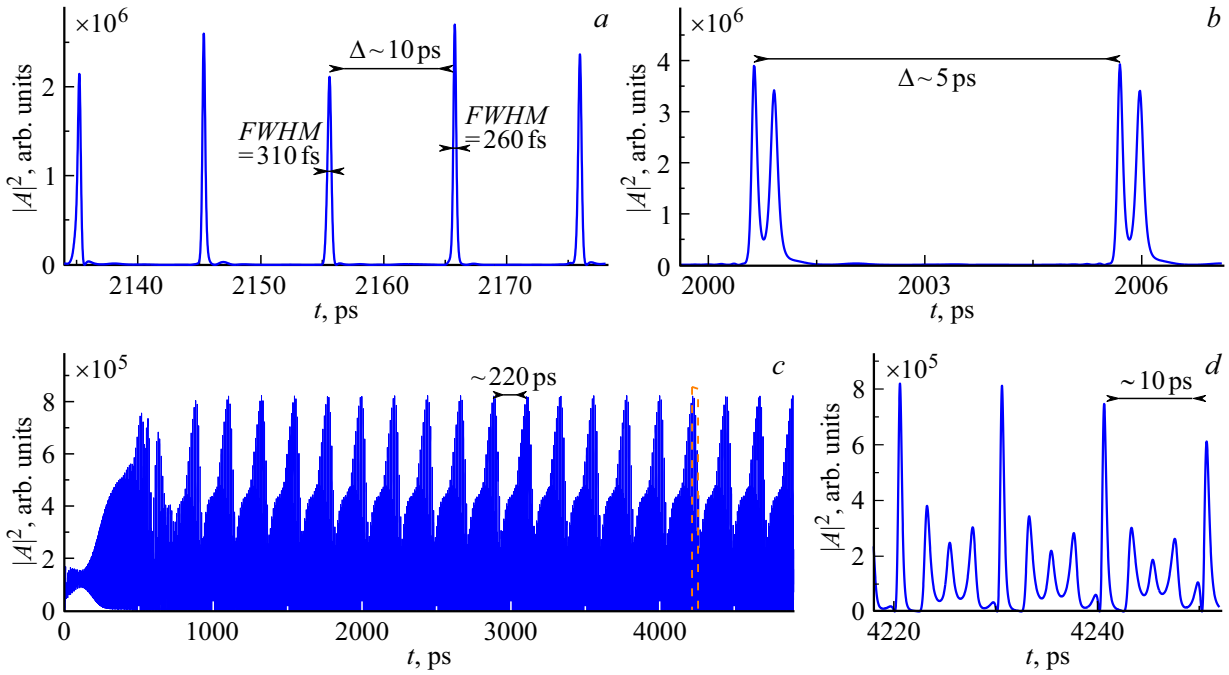


Рис. 3. (a) Несколько одиночных импульсов генерации и некоторые их параметры для случая 2, $T_1 = T_2 = 20$ ps. (b) Два одиночных импульса генерации для случая 1, $d_a = 5D$, $d_a/d_g = 4.8$. (c) Зависимость квадрата амплитуды электрического поля $|A(z)|^2$ от времени на выходе из резонатора для случая 3, $d_a = 7D$, $d_a d_g = 1$, и увеличенная вставка (оранжевыми штрихами) — (d) несколько одиночных импульсов генерации и некоторые их параметры.

обоих случаев опять же наблюдается гиперболическая зависимость и полуширины импульсов, и амплитуды от величины d_a. А именно при увеличении d_a одновременно уменьшается длина одиночного импульса и увеличивается его амплитуда. Для случая $d_g = 5$ D диапазон генерации составил $1.2 < d_a/d_g < 5$, хотя после значения $d_a/d_g > 3$ характер генерации менялся. Так, значения, для которых старт когерентной генерации начинался с большой задержкой (более 5 ns, или 500 проходов резонатора) отмечены на рис. 5, a зелеными прямоугольниками со штриховкой. Дополнительно импульсы для случаев $d_a/d_g > 4.5$ (отмечены серым

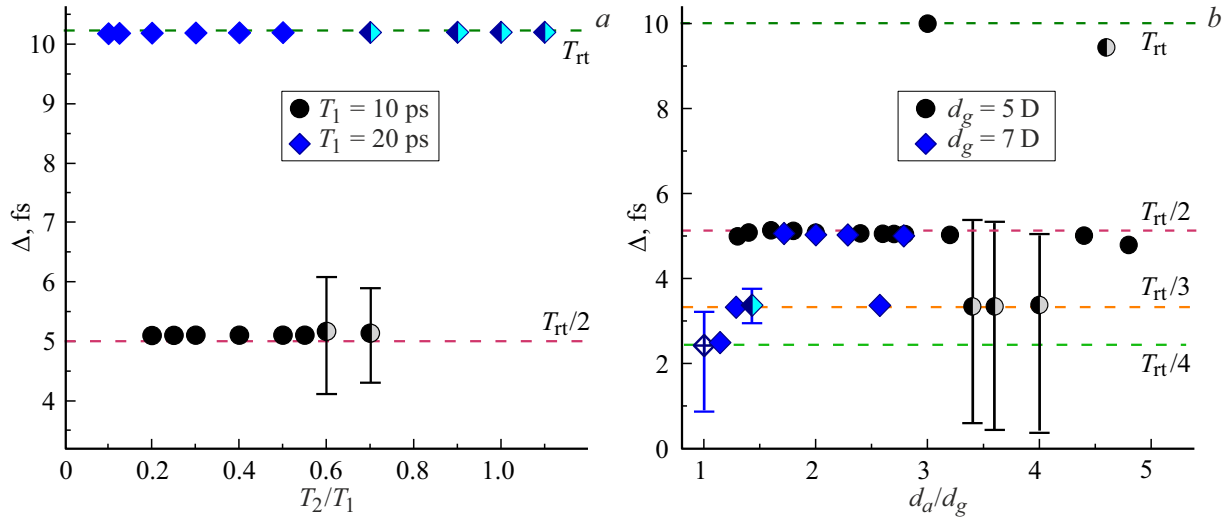


Рис. 4. Зависимость интервала между импульсами $\Delta(a)$ от отношения T_2/T_1 (b) от отношения d_a/d_g. Случаи генерации различных по форме импульсов отмечены полузакрашенными фигурами, для них горизонтальными чертами отмечены максимальные и минимальные значения.

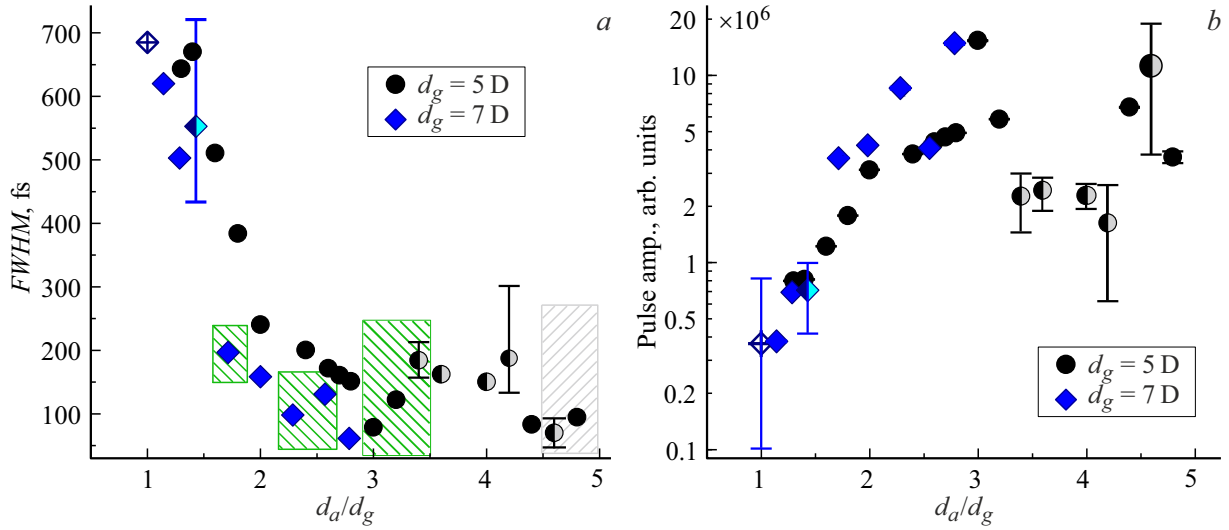


Рис. 5. Зависимость от отношения d_a/d_g (a) ширины на полувысоте $(FWHM)$ импульсов и (b) максимального значения электрического поля $|A(z)|^2$ (амплитуды) импульсов; черными кружками для величины $d_g = 5$ D, синими ромбами для $d_g = 7$ D. Случаи генерации различных по форме импульсов отмечены полузакрашенными фигурами, для них горизонтальными чертами отмечены максимальные и минимальные значения $FWHM$ и амплитуды.

прямоугольником на рис. 5, a) представляли собой один сдвоенный пик; пример двух таких отдельных импульсов для $d_a = 5$ D, $d_a/d_g = 4.8$ вынесен на рис. 3, c. Режим генерации был двухимпульсным ($\Delta = 0.5T_{rt} \sim 5$ ps), и если рассматривать каждый пик по отдельности, то, как видно на рис. 5, a, они обладают наименьшей полушириной ($FWHM \sim 100-60$ fs) для этого значения дипольного момента. Если рассматривать группу из 2 импульсов вместе, то ее полуширина составит ~ 350 fs.

Для одного набора параметров, $d_g = 7$ D, $d_a/d_g = 1$ (отмечен на рис. 5 ромбом с крестом), наблюдалась генерация в „импульсном“ режиме, его зависимость квадрата амплитуды электрического поля $|A(z)|^2$ от времени на выходе из резонатора и увеличенная с несколькими одиночными импульсами представлены соответственно на рис. 3, c и 3, d. Как видно, для этого случая наблюдается большой период огибающей $|A(z)|^2$ порядка 220 ps, а также малый период повтора порядка $T_{rt} \sim 10$ ps. Импульсы сильно разнятся и по амплитуде, и по полуширине, однако относительно большого периода генерация стабильна.

Для случая $d_g = 7$ D диапазон генерации был значительно меньше, $1 < d_a./_g < 2.8$. Отметим случай

$d_a = 19.5\,\mathrm{D}$, $d_a/d_g \cong 2.79$, где достигается генерация самых больших по амплитуде ($|A(z)|^2_{\max} \sim 1.5 \cdot 10^7\,\mathrm{ESU}$) и одновременно самых малых по длительности ($FWHM = 60\,\mathrm{fs}$) импульсов.

Таким образом, мы наблюдаем существование генерации для большого диапазона значений d_a. В случае для $d_g = 7\,\mathrm{D}$, хотя мы наблюдаем явную зависимость параметров генерации от отношения дипольных моментов d_a/d_g, сложно сказать о существовании устойчивых участков. Как видно на рис. 4, *b* и рис. 5, при увеличении d_a изменяется режим генерации — возможен не только двухимпульсный, но и трех- и четырехимпульсные режимы.

Для $d_g = 5\,\mathrm{D}$ мы можем указать на существование устойчивого участка $1.2 < d_a/d_g < 3$, для которого при увеличении значения d_a возможно одновременно значительно увеличить амплитуду импульсов ($\sim$ в 3 раза) и сократить длительность импульсов (670→160 fs), при этом генерация остается устойчивой, с постоянным периодом следования ($\Delta = 0.5T_{\mathrm{rt}}$) и одинаковой формой импульсов.

4. Анализ КСМ с помощью теоремы площадей

Прямое численное моделирование динамики лазера позволяет наглядно проследить процесс установления стационарного режима генерации при заданных значениях параметров лазерной системы. В то же время исследование зависимостей лазерной генерации от различных параметров среды или резонатора оказывается достаточно сложным вследствие необходимости решать систему уравнений в частных производных для каждого набора параметров. Поэтому для таких задач более удобным является использование аналитических моделей описания нелинейной динамики лазера.

Наиболее подходящий метод аналитического описания когерентного распространения ультракоротких импульсов в резонансной среде основан на так называемой теореме площадей [2,3]. В рамках данного подхода вместо решения уравнений для электрического поля $E(z,t)$ исследуется изменение такой величины, как площадь импульса, определяемой как

$$\Phi(z) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E(z,t)dt, \tag{4}$$

где d_{12} — дипольный момент резонансного перехода в среде, $\hbar$ — приведённая постоянная Планка. Изменение площади импульса $\Phi(z)$ в пространстве по мере распространения ультракороткого импульса описывается в случае резонансной среды с сильно неоднородным уширением линии с помощью простого дифференциального уравнения, называемого теоремой площадей:

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \alpha n_0 \sin\Phi(z), \tag{5}$$

где α — коэффициент усиления, зависящий от свойств среды, n_0 — инверсия населённостей в среде. Теорема площадей (2) допускает явное аналитическое решение:

$$\operatorname{tg}\frac{\Phi(z)}{2} = e^{\alpha n_0 z} \operatorname{tg}\frac{\Phi_0}{2}. \tag{6}$$

Хотя теорема площадей (5), (6) не позволяет исследовать динамику непосредственно электрического поля в системе, подход на основе теоремы площадей в силу доступности аналитических решений очень удобен для исследования зависимостей основных характеристик лазерной динамики от различных параметров.

Стандартная теорема площадей в виде (5) была выведена для случая однократного прохождения ультракороткого импульса через среду. В то же время в лазере импульс распространяется внутри резонатора, и поэтому он каждый раз вновь возвращается в среду после полного обхода резонатора. Для такого случая стандартная теорема площадей (5) становится уже неприменима. Соответствующее обобщение теоремы площадей (5), учитывающее распространение импульса в среде, помещённой в кольцевой резонатор, было недавно получено в работах [11,12] и имеет вид:

$$\frac{d\Phi_{k+1}(z)}{dz} = \alpha\left(n_k(z)\sin\Phi_{k+1}(z) - \frac{P_k(z)}{d_{12}}\sin^2\frac{\Phi_{k+1}(z)}{2}\right), \quad 0 \le z \le L, \tag{7}$$

$$n_{k+1}(z) = \left(n_k(z)\cos\Phi_{k+1}(z) - \frac{P_k(z)}{d_{12}}\sin\Phi_{k+1}(z)\right)e^{-T_{\mathrm{rt}}/T_1} + n_0(1 - e^{-T_{\mathrm{rt}}/T_1}),$$

$$P_{k+1}(z) = (P_k(z)\cos\Phi_{k+1}(z) + d_{12}n_k(z)\sin\Phi_{k+1}(z))e^{-T_{\mathrm{rt}}/T_2},$$

где функция $\Phi k(z)$ определяет площадь импульса (4) на k-й итерации обхода резонатора, $n_k(z)$ и $P_k(z)$ представляют собой инверсию населённостей и наведённую поляризацию резонансной среды в точке с координатой z соответственно после k полных обходов резонатора, L — протяжённость слоя среды. Пространственная координата z измеряется в направлении распространения импульса вдоль оси резонатора по всей толщине слоя резонансной среды. Граничные условия для связи между значениями площади на двух последовательных циклах обхода резонатора определяются отражением импульса на выходном зеркале с амплитудным коэффициентом отражения r:

$$\Phi_{k+1}(z=0) = r\Phi_k(z=L).$$

В случае двухсекционного лазера система уравнений (7) должна решаться на каждой итерации обхода резонатора

отдельно для распространения импульса в секции усилителя и отдельно — для секции поглотителя. В этом случае значения всех параметров для обеих сред будут в общем случае различны. Ниже для простоты мы будем использовать одинаковые значения времён релаксации T_1 и T_2 для обеих сред. В то же время дипольные моменты переходов d_{12} и значения коэффициентов α мы будем варьировать независимо для обеих сред. Как и выше, значения параметров среды, относящиеся к усиливающей и поглощающей средам, обозначены нижним индексом g или a соответственно.

Для начала рассмотрим оптимальный случай, когда дипольный момент резонансного перехода в поглотителе в 2 раза больше, чем в усилителе. В этом случае устойчивый 2π-импульс в поглотителе в то же самое время будет представлять собой устойчивый π-импульс в усилителе. Динамика изменения площади начального импульса по мере его распространения в резонаторе исследовалась с помощью системы уравнений (7). Количество итераций обхода резонатора в системе уравнений (7) подбиралось так, чтобы система успела выйти на стационарный режим. Расчёты показали, что во всей рассматривавшейся области изменения параметров система (7) описывает выход всех величин на их устойчивые стационарные значения при использовании в качестве начальных условий нулевых значений для наведённой поляризации среды, равновесных значений $n_{0,g}$ и $n_{0,a}$ для инверсии населённостей и малого затравочного значения для начальной площади импульса $\Phi_1(0) \ll \pi$. В то же время никаких режимов периодической или более сложной непериодической динамики системы (7) не было обнаружено. Таким образом, можно сделать вывод о существовании и устойчивости режима когерентной синхронизации мод в рассматриваемой лазерной системе.

На рис. 6, *a, b* показаны результаты расчётов с помощью обобщённой теоремы площадей (7) для отношения дипольных моментов $m_d = d_a/d_g = 2$ и значений остальных параметров из предыдущего раздела. В качестве варьируемых параметров использовались отношение времён T_{rt}/T_1 и безразмерный уровень накачки в усилителе $\alpha_g n_{0,g} L_g$. На рис. 6, *a* построены стационарные значения для площади импульса на выходе из секции поглотителя, а на рис. 6, *b* — установившееся значение площади импульса на выходе из секции усилителя. Из рис. 6, *a, b* видно, что при накачке выше определённого порога генерации в лазерной системе устанавливается устойчивый режим КСМ со значениями площади импульса, меньшей соответствующих устойчивых значений в неограниченной среде, а именно площади π в усилителе и площади 2π в поглотителе. В то же время полученные значения площади импульса на рис. 6, *a, b* стремятся к значениям π в усилителе и 2π в поглотителе в пределе большого превышения накачки над пороговым значением и очень быстрой релаксации инверсии населённостей, $T_{\text{rt}}/T_1 \gg 1$.

На рис. 7, *a* и 7, *b* показаны соответствующие значения инверсии населённостей в обеих секциях лазера в установившемся режиме генерации для тех же диапазонов изменения параметров, как и на рис. 6, *a* и 6, *b*. Хорошо видно, что инверсия населённостей приближается к своим равновесным значениям в случае очень быстрой релаксации инверсии населённостей $T_{\text{rt}}/T_1 \gg 1$. В противоположном же случае достаточно медленной релаксации инверсии населённостей стремятся по абсолютной величине к нулю. Данный результат объясняется тем, что при очень медленной релаксации инверсии населённостей по сравнению со временем полного обхода резонатора стационарный режим динамики возможен лишь при малом изменении инверсии под действием генерируемого импульса, что в двухсекционной геометрии лазера неизбежно влечёт за собой малые осцилляции инверсии населённостей вблизи нуля.

Далее рассмотрим более важный с практической точки зрения случай идентичных сред в обеих секциях лазера, что подразумевает равные дипольные моменты перехода в усилителе и в поглотителе. Действительно, подобрать разные среды для усилителя и поглотителя с заданным отношением дипольных моментов перехода, например равным двум, представляется достаточно непростой задачей. В этой связи использование одной и той же среды в каждой из секций лазера гораздо удобнее для реализации режима КСМ на практике. На рис. 8, *a* и 8, *b* построены установившиеся значения площади импульса на выходе из поглотителя и усилителя для случая идентичных сред в обеих секциях лазера. В данном случае установившиеся значения площади не превышают величины π в каждой из секций. При этом значение площади импульса в усилителе стремится к значению π в пределе большой накачки и быстрой релаксации инверсии населённостей $T_{\text{rt}}/T_1 \gg 1$. В то же время в поглотителе в данном случае площадь импульса по мере распространения монотонно убывает, и её стационарные значения остаются в несколько раз меньше π во всём диапазоне изменения параметров. Примечательно также, что зависимость стационарной площади импульса в поглотителе от уровня накачки на рис. 8, *a* оказывается немонотонной и по мере увеличения накачки сначала достигает максимума, а затем начинает постепенно убывать.

Соответствующие стационарные значения инверсии населённостей в поглотителе и усилителе для случая одной и той же среды в обеих секциях лазера построены на диаграммах на рис. 9, *a* и 9, *b*. Качественно вид данных диаграмм похож на аналогичные рис. 7, *a, b* для случая отношения дипольных моментов $m_d = 2$. В то же время в случае одинаковых сред в усилителе и поглотителе даже при очень быстрой релаксации инверсии населённостей установившиеся значения инверсии оказываются существенно ниже равновесных значений $n_{0,g}$ и $n_{0,a}$ вследствие того, что при равных дипольных моментах устойчивые значения площади импульса в усиливающей

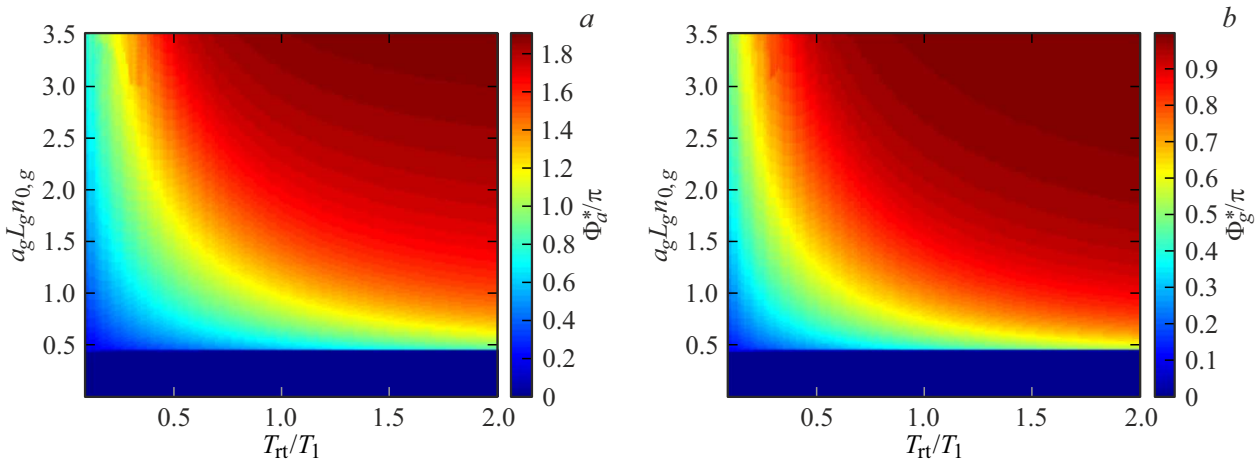


Рис. 6. Установившееся значение площади импульса на выходе из секции (a) поглотителя Φ_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя Φ_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и соотношения характерных времен T_{rt}/T_1; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{\text{rt}}/T_2 = 2.5$, $m_d = 2$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

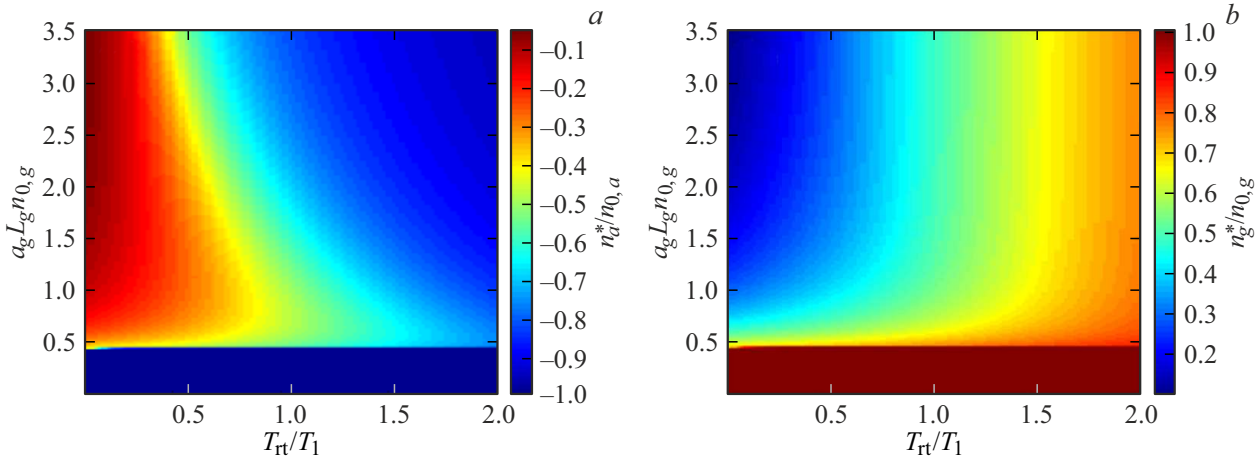


Рис. 7. Установившееся значение инверсии населённостей на выходе из секции (a) поглотителя n_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя n_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и соотношения характерных времен T_{rt}/T_1; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{\text{rt}}/T_2 = 2.5$, $m_d = 2$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

и поглощающей средах оказываются совершенно разными.

Наконец, рассмотрим случай произвольного отношения дипольных моментов резонансного перехода в поглотителе и усилителе m_d. Диаграммы на рис. 9 и 10 показывают установившееся значение площади импульса на выходе из поглотителя и усилителя в зависимости от величины накачки в усилителе и параметра m_d при заданных значениях соотношений между характерными временами T_{rt}/T_1 и T_{rt}/T_2. При этом, к примеру, диаграммы на рис. 6, a и 8, a для поглотителя, отвечающие частным случаям $m_d = 1$ и $m_d = 2$, и диаграмма на рис. 10, a соответствуют друг другу для идентичных значений варьируемых параметров, а именно вертикальное сечение на рис. 10, a для определённого значения m_d совпадает с вертикальным сечением на рис. 6, a и 8, a для значения $T_{\text{rt}}/T_1 = 1$.

Как видно из сравнения рис. 10, a и 10, b, динамика изменения площади импульса в стационарном режиме КСМ оказывается существенно различной для усиливающей и поглощающей сред. Подобные отличия представляются естественными с учётом того, что равновесные значения площади импульса в неограниченно протяжённых средах различны и равны π в усилителе и 0 или 2π в поглотителе. Из рис. 10, a следует, что площадь в поглотителе остаётся меньшей π в стационарном режиме генерации при значениях m_d вплоть до ≈ 1.3. При бóльших значениях величины m_d установившееся значение площади импульса оказывается больше π и стремится к 2π в пределе больших значений накачки. При этом площадь импульса быстрее всего достигает величины 2π не вблизи оптимального отношения $m_d = 2$, а при значении $m_d = 3$ в связи с тем, что площадь импульса в диапазоне $2\pi < \Phi_0 < 3\pi$ при распростра-

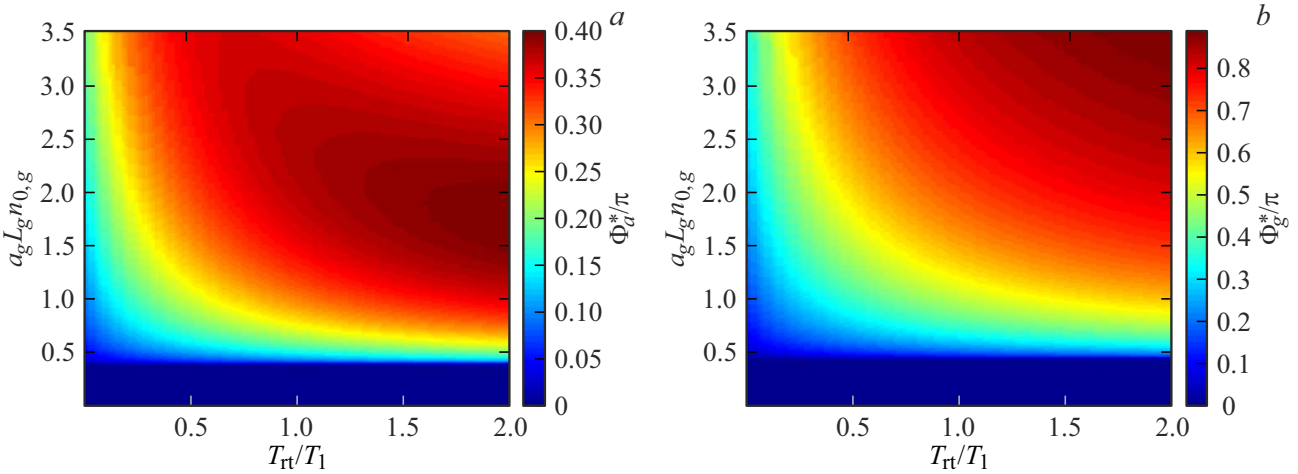


Рис. 8. Установившееся значение площади импульса на выходе из секции (a) поглотителя Φ_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя Φ_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и соотношения характерных времен T_{rt}/T_1; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{rt}/T_2 = 2.5$, $m_d = 1$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

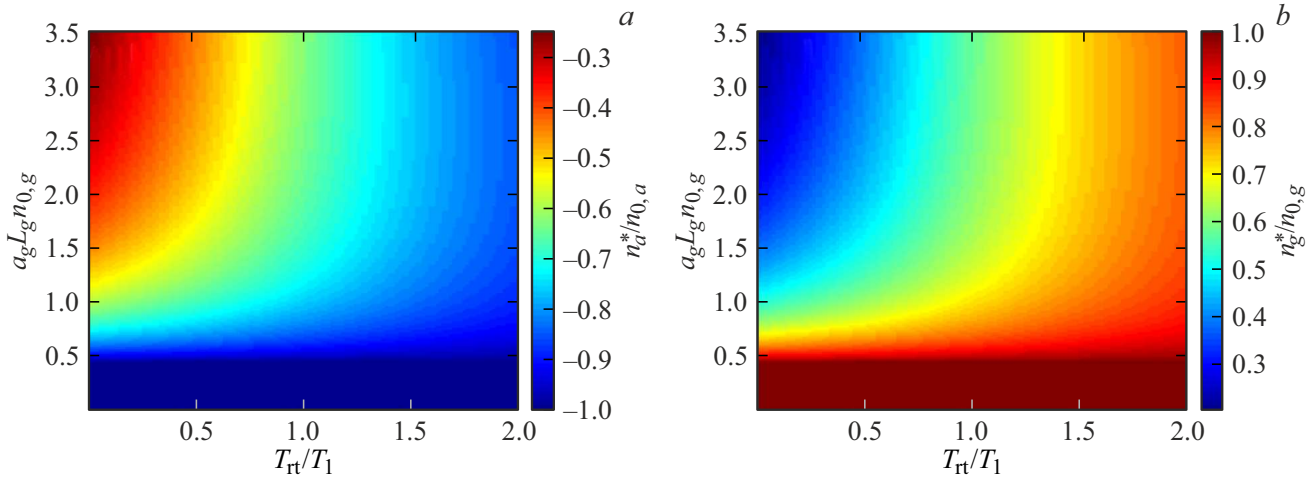


Рис. 9. Установившееся значение инверсии населённостей на выходе из секции (a) поглотителя n_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя n_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и соотношения характерных времен T_{rt}/T_1; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{rt}/T_2 = 2.5$, $m_d = 1$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

нении в поглотителе стремится также к 2π. В то же время площадь импульса в усилителе, как следует из рис. 10, *b*, приближается к равновесному значению π именно вблизи оптимального соотношения дипольных моментов $m_d = 2$, в то время как при удалении от этого значения m_d в обе стороны установившееся значение площади убывает и отдаляется от величины π.

Установившиеся значения инверсии населённостей в поглотителе и усилителе в зависимости от отношения дипольных моментов m_d показаны на рис. 11, *a, b*. Из рис. 11, *a* следует, что инверсия в поглотителе стремится к своему равновесному значению $-n_{0,a}$ как в пределе очень малых значений $m_d \ll 1$, когда, согласно рис. 10, *a* стационарное значение площади импульса близко к нулю, так и при значениях, близких к $m_d = 3$, когда, согласно рис. 10, *a* стационарное значение площади приближается к 2π. Между этими предельными случаями инверсия в поглотителе достигает своего максимального значения около $-0.5n_{0,a}$. Инверсия населённостей в секции усилителя, как показано на рис. 11, *b*, наоборот, меняется монотонно при изменении отношения дипольных моментов m_d. При этом во всём рассматриваемом диапазоне изменения параметров инверсия в усилителе далека от своего равновесного значения $n_{0,g}$ вследствие используемого отношения времён $T_{rt}/T_1 = 1$, которое подразумевает относительно медленную релаксацию инверсии в усилителе за время обхода резонатора. Равновесное значение инверсии населённостей в данном случае уменьшается как с ростом уровня накачки, так и с увеличением параметра m_d.

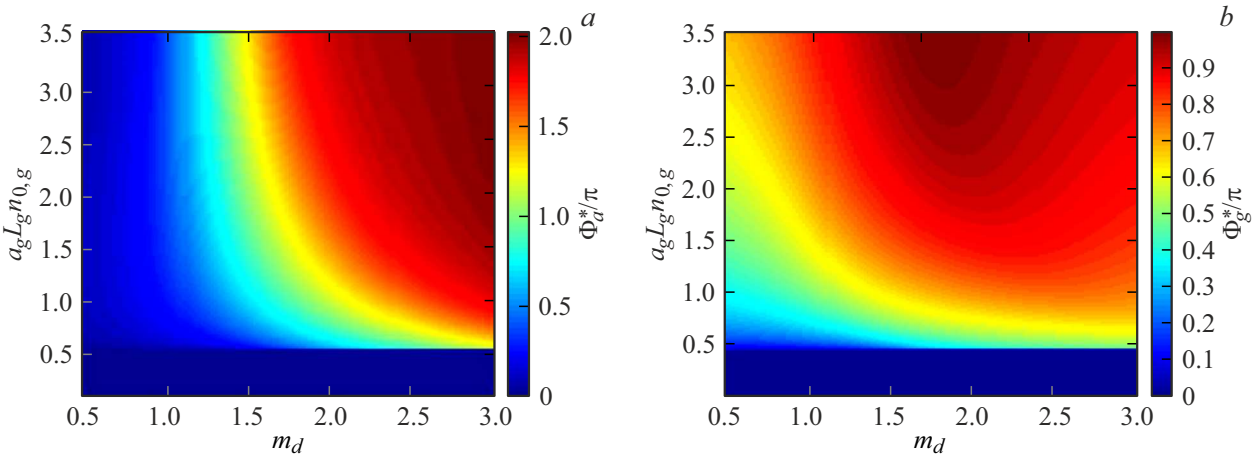


Рис. 10. Установившееся значение площади импульса на выходе из секции (a) поглотителя Φ_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя Φ_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и отношения дипольных моментов резонансного перехода в поглотителе и усилителе m_d; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{\text{п}}/T_1 = 1$, $T_{\text{п}}/T_2 = 2.5$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

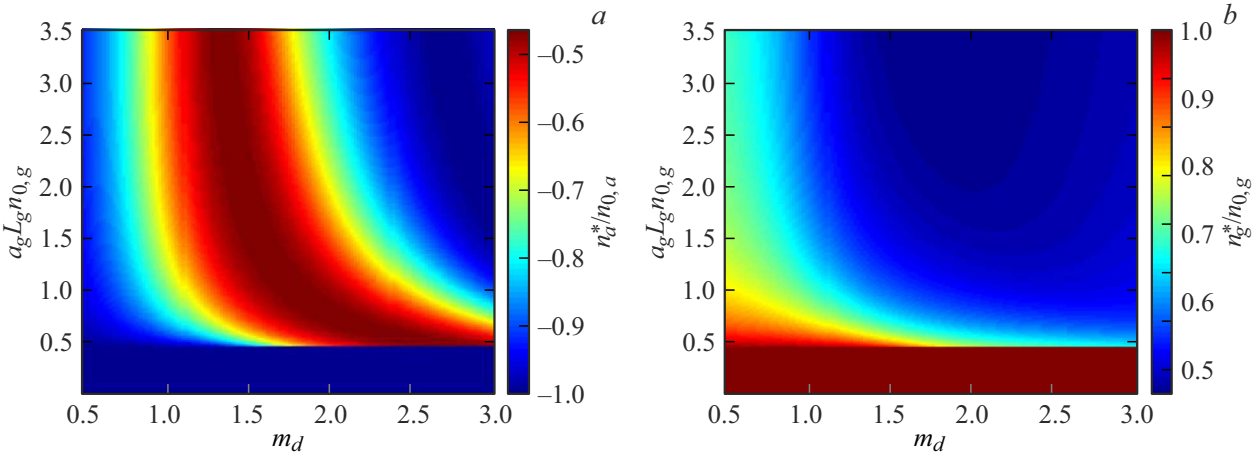


Рис. 11. Установившееся значение инверсии населённостей на выходе из секции (a) поглотителя n_a^* $(z = L_a)$, (b) усилителя n_g^* $(z = L_g)$ в зависимости от уровня накачки $\alpha_g n_{0,g} L_g$ и отношения дипольных моментов резонансного перехода в поглотителе и усилителе m_d; другие параметры: $r = 0.8$, $T_{\text{п}}/T_1 = 1$, $T_{\text{п}}/T_2 = 2.5$, $\alpha_g n_{0,g} L_g = 2\alpha_a n_{0,a} L_a$.

Заключение

В работе проведено комплексное аналитическое и численное исследование влияния параметров усиливающей и поглощающей сред на динамику когерентной синхронизации мод в двухсекционном лазере с параметрами, характерными для квантово-каскадных лазеров. Установлено, что соотношение времен релаксации T_2/T_1 является критическим параметром, определяющим характеристики генерации; при этом время релаксации поляризации T_2 может меняться при изменении температуры устройства. Показано, что в пределах диапазона $0.1 < T_2/T_1 < 0.6$ увеличение T_2 приводит к росту мощности импульсов при одновременном сокращении их длительности, при этом стабильность режима генерации сохраняется. Интересны и результаты исследования влияния отношения дипольных моментов в поглотителе и усилителе d_a/d_g: для $d_g = 7\,\text{D}$ при изменении дипольного момента поглотителя d_a наблюдается сложная динамика с переключением между многоимпульсными режимами, тогда как для $d_g = 5\,\text{D}$ обнаружен устойчивый рабочий диапазон $1.2 < d_a/d_g < 3$, в котором достигается трехкратное увеличение амплитуды импульсов и сокращение их длительности до 160 fs при сохранении стабильности генерации. Так как дипольный момент излучательного перехода ККЛ зависит от приложенного электрического поля, открывается возможность изменения параметров генерации без смены резонаторной ячейки.

Применение аналитического подхода на основе обобщенной теоремы площадей подтвердило устойчивость режима КСМ при превышении порога накачки и позволило определить оптимальные параметры для эффективного энергообмена в системе. Полученные результаты имеют важное значение для разработки компактных

источников коротких импульсов на основе квантово-каскадных лазеров в ИК и ТГц диапазонах и открывают новые возможности для управления параметрами генерации в подобных системах.

Финансирование работы

Исследования выполнены при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (аналитические и численные расчеты) и Государственного задания Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе, 0040-2019-0017 (анализ полученных результатов).

Конфликт интересов

Авторы настоящей работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] V.V. Kozlov. Phys. Rev. A, **56**, 1607 (1997).
[2] S.L. McCall, E.L. Hahn. Phys. Rev., **183**, 457 (1969).
[3] Л. Аллен, Дж. Эберли. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, М., 1978). [L. Allen, J.H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms* (Wiley, N. Y., 1975)].
[4] M.A. Talukder, C.R. Menyuk. Phys. Rev. A, **79**, 063841 (2009).
[5] R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin. Opt. Commun., **361**, 73 (2016).
[6] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, N.N. Rosanov. Opt. Lett., **41**, 737 (2016).
[7] R. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, I. Babushkin, N. Rosanov. Phys. Rev. A, **105**, 013526 (2022).
[8] A. Outafat, S. Faci, E. Richalot, S. Protat, C. Algani. Opt. Quant. Electron., **54** (5), 283 (2022).
[9] U. Keller. Appl. Phys. B, **100**, 15 (2010).
[10] J.C. Diels, W. Rudolph. *Ultrashort Laser Pulse Phenomena* (Elsevier, 2006).
[11] A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, R. Arkhipov. Phys. Rev. A, **108**, 023506 (2023).
[12] A. Pakhomov, R. Arkhipov. Phys. Rev. A, **109**, 033519 (2024).
[13] M.V. Arkhipov, A.A. Shimko, N.N. Rosanov, I. Babushkin, R.M. Arkhipov. Phys. Rev. A, **101** (1), 013803 (2020).
[14] R. Paiella, F. Capasso, C. Gmachl, D.L. Sivco, J.N. Baillargeon, A.L. Hutchinson, A.Y. Cho, H.C. Liu. Science, **290**, 1739–1742 (2000).
[15] R. Paiella, F. Capasso, C. Gmachl, H.Y. Hwang, D.L. Sivco, A.L. Hutchinson, A.Y. Cho, H.C. Liu. Appl. Phys. Lett., **77**, 169–171 (2000).
[16] C.Y. Wang, L. Kuznetsova, V.M. Gkortsas, L. Diehl, F.X. Kärtner, M.A. Belkin, A. Belyanin, X. Li, D. Ham, H. Schneider, P. Grant, C.Y. Song, S. Haffouz, Z.R. Wasilewski, H.C. Liu, F. Capasso. Opt. Express, **17**, 12929–12943 (2009).
[17] M.A. Talukder, C.R. Menyuk. Optics Express, **22** (13), 15608–15617 (2014).
[18] E. Riccardi, V. Pistore, S. Kang, L. Seitner, A. De Vetter, C. Jirauschek, J. Mangeney, L. Li, A.G. Davies, E.H. Linfeld et al. Nat. Photon., **17**, 1–8 (2023).
[19] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, О.О. Дьячкова, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. Опт. и спектр., **131** (7), 933 (2023). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, O.O. Diachkova, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. Opt. Spectrosc., **131** (7), 884 (2023)].
[20] R. Arkhipov, O. Diachkova, A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, B. Zhmud, R. Khabibullin. Appl. Phys. B, **130** (10), 184 (2024).
[21] H. Choi, V.M. Gkortsas, L. Diehl, D. Bour, S. Corzine, J. Zhu, G. Höfler, F. Capasso, F.X. Kärtner, T.B. Norris. Nature Photonics, **4**, 706 (2010).