05,10

# Солитоны в полуограниченном двухподрешеточном ферримагнетике

© В.В. Киселев [1,2]

[1] Институт физики металлов им. М.Н. Михеева ИФМ УрО РАН,
Екатеринбург, Россия
[2] Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
Физико-технологический институт УрФУ,
Екатеринбург, Россия

E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

Поступила в Редакцию 17 марта 2025 г.
В окончательной редакции 23 марта 2025 г.
Принята к публикации 24 марта 2025 г.

В обменном приближении найдены и проанализированы новые солитонные решения модели полуограниченного ферримагнетика с двумя кристаллографически неэквивалентными магнитными подрешетками. На границе образца учитывались краевые условия для свободных поверхностных спинов. Установлено, что при таких условиях невозможна локализация солитонов вблизи границы образца. В ходе столкновения движущихся солитонов с краем образца их ядра претерпевают сильные изменения, которые сопровождаются перемагничиванием среды вблизи поверхности образца. После отражения солитонов от поверхности по мере продвижения вглубь образца ядра солитонов принимают стационарную форму, типичную для прецессионных солитонов неограниченной среды. Вычислены изменения фаз внутренней прецессии и сдвиги центров солитонов после их отражения от границы образца.

**Ключевые слова:** солитоны, уравнение Ландау–Лифшица, ферримагнетики.

DOI: 10.61011/FTT.2025.04.60548.51-25

## 1. Введение

Простейшая модель ферримагнетика содержит две магнитные подрешетки с намагниченностями $\mathbf{M}_1(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}_2(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ и $t$ — радиус-вектор и время, $\mathbf{M}_i^2 = M_{0i}^2 = \text{const}$ $(i = 1, 2)$, $M_{01} \neq M_{02}$. В основном состоянии векторы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ антипараллельны. Однако, имеется нескомпенсированная намагниченность среды: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \neq 0$. Наличие двух неэквивалетных магнитных подрешеток с сильной геометрической нелинейностью полей $\mathbf{M}_{1,2}(\mathbf{r}, t)$ осложняет теоретическое описание ферримагнетиков. Для упрощения задачи часто используют уравнение Ландау–Лифшица одноподрешеточного ферромагнетика с намагниченностью $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Такое приближение оправдано, когда в возбужденных состояниях среды векторы $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ остаются антипараллельными: $\mathbf{M}^2 = (M_{01} - M_{02})^2 = \text{const}$ или же, когда намагниченности подрешеток заметно отличаются по величине [1,2]. Вблизи точки компенсации намагниченностей подрешеток ферримагнетики наследуют дополнительные свойства антиферромагнетиков [3,4], благодаря так называемому „обменному усилению“ их динамических свойств. Тогда они получают ряд преимуществ перед ферромагнетиками. Во-первых, обладая магнитной структурой и высокой восприимчивостью к внешним полям, ферримагнетики имеют малую намагниченность и не создают больших магнитостатических полей. С теоретической точки зрения, это облегчает их описание. С прикладной — ферримагнитные частицы слабо взаимодействуют друг с другом. Поэтому возможно создание плотных массивов частиц, в которых дальнодействующее дипольное взаимодействие не препятствует использованию бистабильных состояний отдельной частицы для записи информации. Во-вторых, характерные частоты ферримагнетиков и, следовательно, характерные частоты переключения между различными магнитными состояниями, на несколько порядков превышают аналогичные значения для типичных ферромагнитных материалов (см. например [5,6]). Это открывает перспективу создания высокоскоростных устройств, работающих уже не в гигагерцевом (как ферромагнетики), а в тетрагерцевом диапазоне. Возможные приложения тетрагерцевых волн включают применения в $4G$ и $5G$ — телекоммуникационных системах и космическую связь, обеспечение безопасности и поиск запрещенных материалов, биологию и медицину, информационные технологии и сверхбыструю обработку данных [7]. Наконец, ферримагнитный порядок в полупроводниках наблюдается гораздо чаще и при гораздо более мягких условиях, чем ферромагнитное упорядочение, что позволяет сочетать в одном устройстве преимущества как электроники (быстродействие, легкую управляемость), так и спинтроники (высокую чувствительность, малую энергоемкость). Кроме того, ферримагнетики могут иметь металлическую проводимость, что позволяет использовать стандартные эффекты магнитосопротивления для считывания сигналов в информационных системах или для преобразования энергии спиновых колебаний в переменный электрический ток. Не менее важно, что современные методы выращивания монокристаллов на

подложках позволяют варьировать магнитную анизотропию и получать ферримагнитные материалы с любыми наперед заданными свойствами [6,8].

Перечисленные особенности ферримагнитных материалов чрезвычайно полезны для приложений, теоретическое описание нелинейной динамики ферримагнетиков является актуальной задачей. Современные методы теории солитонов открывают новые возможности ее решения. Установлено, что в основном обменном приближении уравнения Ландау–Лифшица для намагниченностей двухподрешеточного ферримагнетика сводятся к более простой модели, которая корректно учитывает основные взаимодействия и, в то же время, допускает аналитическое описание методом обратной задачи рассеяния [9]. В неограниченном ферримагнетике квазиодномерные солитоны построены и подробно проанализированы в работах [9–11].

Частицеподобные возбуждения в магнетиках конечных размеров до сих пор мало изучены из-за существенной нелинейности основных уравнений и отсутствия разработанных методов их интегрирования. Нам удалось применить метод обратной задачи рассеяния для изучения нелинейной динамики полуограниченных одноподрешеточных ферромагнетиков с разными типами объемной кристаллографической анизотропии и однонаправленной поверхностной анизотропией, обусловленной нанесением пленочных покрытий [12–15]. Оказалось, что намагниченность в ядрах ферромагнитных солитонов в ходе их взаимодействия с границей образца изменяется на величину порядка намагниченности насыщения, и это определяет перемагничивание поверхностных слоев образца. Кроме того, солитоны приобретают динамические свойства, которые отсутствуют в бесконечной среде и интересны для приложений.

В данной работе мы изучим особенности нелинейной динамики солитонов в полуограниченном двухподрешеточном ферримагнетике со свободными краевыми спинами. В обменном приближении зависимость энергии ферримагнетика от распределения намагниченности имеет вид [16]:

$$W = \int d^3\mathbf{r}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\big[\alpha_1(\partial_i\mathbf{M}_1\,\partial_i\mathbf{M}_1) + \alpha_2(\partial_i\mathbf{M}_2\,\partial_i\mathbf{M}_2) + 2\alpha_3(\partial_i\mathbf{M}_1\,\partial_i\mathbf{M}_2)\big] + \eta(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)\Big),$$

где $\eta > 0$ — постоянная однородного обмена между подрешетками, $\alpha_s$ — константы неоднородного обмена ($s = 1, 2, 3$), $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 > 0$. По порядку величины $\alpha_s \propto \eta a^2$, где $a$ — постоянная решетки.

Вместо намагниченности подрешеток, введем нормированные векторы ферро- и антиферромагнетизма:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{\sqrt{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2}{\sqrt{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}}.$$

Они удовлетворяют ограничениям:

$$\mathbf{m}^2 + \mathbf{l}^2 = 1, \quad (\mathbf{m}\cdot\mathbf{l}) = \frac{M_{01}^2 - M_{02}^2}{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}.$$

Уравнения эволюции векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ следуют из уравнений Ландау–Лифшица [17–20] для намагниченностей подрешеток [3,17,21]:

$$\partial_t\mathbf{M}_\nu = \gamma_\nu\left[\mathbf{M}_\nu \times \frac{\delta W}{\delta\mathbf{M}_\nu}\right], \quad \mathbf{M}_\nu^2 = M_{0\nu}^2, \quad \nu = 1, 2. \quad (1)$$

где $\gamma_\nu$ — магнитомеханическое отношение для $\nu$-ой подрешетки. Будем считать, что характерный размер магнитных неоднородностей $\lambda$ (длина спиновой волны, размер солитона) много больше постоянной решетки: $\lambda \gg a$. Кроме того, полагая $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$, будем считать, что длина вектора $\mathbf{l}$ не меняется: $\mathbf{l}^2 = 1$. Тогда из уравнений (1) в главном приближении по малому параметру $a/\lambda$ можно выразить вектор $\mathbf{m}$ через $\mathbf{l}$ [9–11]:

$$\mathbf{m} = -\sqrt{\frac{2}{M_{01}^2 + M_{02}^2}}\,\frac{[\mathbf{l}\times\partial_t\mathbf{l}]}{\eta(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{M_{01}^2 - M_{02}^2}{2(M_{01}^2 + M_{02}^2)}\,\mathbf{l} + \frac{\gamma_1(\alpha_3-\alpha_1) + \gamma_2(\alpha_2-\alpha_3)}{2\eta(\gamma_1+\gamma_2)}\,\big[\mathbf{l}\times[\mathbf{l}\times\hat{\Delta}\mathbf{l}]\big], \quad (2)$$

а для вектора $\mathbf{l}$ получить замкнутое уравнение:

$$[\mathbf{l}\times(c^{-2}\partial_t^2\mathbf{l} - \hat{\Delta}\mathbf{l})] + \beta c^{-1}\partial_t\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l}^2 = 1, \quad (3)$$

где $\hat{\Delta} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ —- оператор Лапласа,

$$c^2 = \frac{1}{2}\,(M_{01}^2 + M_{02}^2)\eta\gamma_1\gamma_2(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3).$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)}} \times\left[\left(\frac{M_{02}^2 - M_{01}^2}{M_{01}^2 + M_{02}^2}\right)\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2} + \gamma_1 - \gamma_2\right].$$

В формальном пределе $c \to \infty$ ($\beta c^{-1} = \text{const}$), что соответствует жесткой связи между подрешетками ($\eta \to \infty$), эффективное уравнение (3) совпадает с уравнением Ландау–Лифшица гейзенберговского ферромагнетика [17,18]. При $M_{01} = M_{02}$, $\gamma_1 = \gamma_2$ система (2), (3) описывает волны в изотропном двухподрешеточном антиферромагнетике [6,22].

Таким образом, рассматриваемая модель ферримагнетика (2), (3) является недостающим связующим звеном между моделями ферро- и антиферромагнетика.

Далее рассматриваются нелинейные возбуждения в полуограниченном ферримагнетике, распространяющемся вдоль оси $Ox$, перпендикулярной границе $x = 0$ образца. В этом случае $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x, t)$. После масшабных преобразований: $x \to x/\beta$, $t \to t/c\beta$, уравнение для расчета $\mathbf{l}$ примет вид:

$$[\mathbf{l}\times(\partial_t^2\mathbf{l} - \partial_x^2\mathbf{l})] + \partial_t\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l}^2 = 1, \quad (4)$$

где $0 < x < \infty$, $t > 0$.

Выбор решений конкретизируют граничные условия:

$$[\mathbf{l} \times \partial_x \mathbf{l}]\big|_{x=0} = 0; \tag{5}$$

$$\partial_t \mathbf{l},\ \partial_x \mathbf{l} \to 0, \quad \mathbf{l} \to (0, 0, 1) \text{ при } x \to \infty \tag{6}$$

и начальные условия:

$$\partial_t \mathbf{l}(x, t = 0) = \partial_t \mathbf{l}_0(x),\ \mathbf{l}(x, t = 0) = \mathbf{l}_0(x),\ 0 < x < \infty. \tag{7}$$

Соотношение (5) соответствует отсутствию закрепления спинов на поверхности $x = 0$ образца [21]. Второе условие (6) отвечает минимуму плотности энергии среды:

$$w = \frac{1}{2}\left[(\partial_x \mathbf{l})^2 + (\partial_t \mathbf{l})^2\right]$$

в глубине образца. Начальное распределение векторного поля $\mathbf{l}(x, t)$ (7) должно быть согласовано с краевыми условиями (5), (6).

В разделе 2 мы покажем, что начально-краевая задача (4)–(7) может быть продолжена по определенной симметрии с полуоси $0 < x < \infty$ на всю ось $-\infty < x < \infty$. После чего ее решение достигается специальной модификацией метода обратной задачи рассеяния на интервале $-\infty < x < \infty$. Процедура представляет нелинейное обобщение „метода изображений“, используемого в электростатике для решения линейных краевых задач с определенной пространственной симметрией.

В контексте метода обратной задачи рассеяния существенно нелинейной модели (4)–(7) сопоставляется вспомогательная система линейных дифференциальных уравнений. В разделе 2 установлены трансформационные, аналитические и асимптотические свойства ее решений. На этой основе в разделе 3 получены спектральные разложения интегралов движения полуограниченного образца и показано, что любое начальное возмущение ферримагнетика может быть описано в терминах идеального газа солитонов и магнонов.

В разделе 4 спектральные данные вспомогательной линейной системы использованы для восстановления решений исходной нелинейной начально-краевой задачи для ферримагнетика.

В разделе 5 построены явные решения для частицеподобных солитонов полуограниченного ферримагнетика. Проанализированы их динамические свойства и особенности взаимодействия с поверхностью образца.

## 2. „Метод изображений“ и прямая задача рассеяния

Для дальнейшего анализа напомним некоторые факты, связанные с интегрированием уравнения ферримагнетика:

$$\left[\mathbf{n} \times (\partial_t^2 \mathbf{n} - \partial_x^2 \mathbf{n})\right] + \partial_t \mathbf{n} = 0,\ \mathbf{n}^2 = 1, \tag{8}$$

на интервале $-\infty < x < \infty$ с асимптотическим поведением:

$$\partial_t \mathbf{n},\ \partial_x \mathbf{n} \to 0, \quad \mathbf{n} \to (0, 0, 1) \text{ при } |x| \to \infty \tag{9}$$

и начальными условиями:

$$\partial_t \mathbf{n}(x, t = 0) = \partial_t \mathbf{n}_0(x), \quad \mathbf{n}(x, t = 0) = \mathbf{n}_0(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{10}$$

Когда векторная функция $\mathbf{n}(x, t)$ нужное число раз дифференцируема по переменным $x$ и $t$, нелинейное уравнение (8) эквивалентно условию совместности:

$$\left[\partial_x - U(u),\ \partial_t - V(u)\right] = 0 \tag{11}$$

системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\partial_x \Psi = U(u)\Psi, \quad \partial_t \Psi = V(u)\Psi - i(\gamma^2/2)\Psi\sigma_3 \tag{12}$$

для вспомогательных матричных функций $\Psi(x, t, u)$. Операторы $U$ и $V$ имеют вид:

$$U = -\frac{i}{2}\left(\gamma[\mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n}]_a + \delta[\mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}]_a + \Lambda n_a\right)\sigma_a,$$

$$V = -\frac{i}{2}\left(\delta[\mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n}]_a + \gamma[\mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}]_a - \gamma^2 n_a\right)\sigma_a, \tag{13}$$

где $\sigma_a$ — матрицы Паули, по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование $(a = 1, 2, 3)$. Коэффициенты $\gamma$, $\delta$, $\Lambda$ связаны алгебраическими уравнениями:

$$(\delta - 1)^2 - \gamma^2 = 1, \quad \Lambda = \gamma(1 - \delta). \tag{14}$$

В работах [9,11] использована униформизация связей (14) рациональными функциями спектрального параметра $u$. В данной работе для упрощения формул введена другая параметризация:

$$\delta = 1 - \operatorname{cth} u, \quad \gamma = -\operatorname{sh}^{-1} u, \quad \Lambda = -\operatorname{ch} u \operatorname{sh}^{-2} u.$$

Поэтому областью определения параметра $u$ будет поверхность цилиндра:

$$u = \rho + i\varphi,\ -\infty < \rho < +\infty,\ -\pi < \varphi \leq \pi \ (\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{15}$$

Для включения начально-краевой задачи (4)–(7) в схему обратной задачи рассеяния продолжим поле $\mathbf{l}(x, t)$ четным образом на весь интервал $-\infty < x < +\infty$:

$$\mathbf{n}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{l}(x, t), & 0 \leq x < \infty, \\ \mathbf{l}(-x, t), & -\infty < x < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Продолжение непрерывно в точке $x = 0$:

$$\mathbf{n}(-0, t) = \mathbf{n}(+0, t) = \mathbf{l}(+0, t),$$

но его первая производная в точке $x = 0$ имеет скачок:

$$\partial_x \mathbf{n}\big|_{x=+0} - \partial_x \mathbf{n}\big|_{x=-0} = 2\partial_x \mathbf{l}\big|_{x=+0}.$$

Это обстоятельство позволяет трактовать краевое условие (5) для $\mathbf{l}(x,t)$ при $x=0$ как дополнительное ограничение на выбор векторной функции $\mathbf{n}(x,t)$:

$$\Delta\mathbf{n}\big|_{x=0}=0, \quad [\mathbf{n}\times\Delta\partial_x\mathbf{n}]\big|_{x=0}=0, \tag{17}$$

где $\Delta f\big|_{x=0}=f(x=+0)-f(x=-0)$. Важно, что коммутационное представление (11) эквивалетно уравнению (8) для расчета поля $\mathbf{n}(x,t)$ при $x\neq 0$ и дополнительному ограничению (17) в точке $x=0$. Это позволяет включить задачу для ферримагнетика на полуоси (4)–(7) в традиционную схему метода обратной задачи рассеяния на всей оси $-\infty<x<+\infty$ [11]. При ограничении (17) производные $\partial_x\Psi$ и $\partial_t\Psi$ в уравнениях (12) непрерывны в точке $x=0$.

Для интегрирования нелинейной модели (8)–(10), (16), (17) следует проанализировать решения вспомогательной линейной системы (12). Введем фундаментальные решения Йоста матричного уравнения:

$$\partial_x\Psi_\pm=U\Psi_\pm \tag{18}$$

с асимптотическими граничными условиями:

$$\Psi_\pm\to\exp\left(-\frac{i\Lambda}{2}x\sigma_3\right) \text{ при } x\to\pm\infty, \tag{19}$$

которые согласованы с поведением поля $\mathbf{l}(x,t)$ при $x\to+\infty$. Заметим, что последнее слагаемое в правой части второго уравнения (12) введено для сохранения условия (19) при всех значениях $t$. Ввиду бесследовости матрицы $U$, из (18), (19) заключаем, что

$$\det\Psi_\pm=1. \tag{20}$$

На множестве

$$\Gamma=\{u\,|\,0<\rho<+\infty,\varphi=0,\pi;-\infty<\rho<0,\varphi=0,-\pi;\ \rho=0,-\pi<\varphi<\pi\} \tag{21}$$

при $x\to\pm\infty$ функции Йоста осциллируют. Поэтому $\Gamma$ соответствует непрерывному спектру задачи рассеяния (18), (19).

На контуре $\Gamma$ два набора базисных решений связаны между собой:

$$\Psi_-(x,t,u)=\Psi_+(x,t,u)T(u,t), \quad u\in\Gamma. \tag{22}$$

Матрица перехода $T$ зависит только от спектрального параметра $u$ и времени $t$. Для упрощения формул зависимость от $t$ далее опускаем там, где это не вызывает недоразумения.

Как и в безграничной среде [9,11], матричные решения удовлетворяют инволюциям:

$$\sigma_2\Psi_\pm^*(u^*)\sigma_2=\Psi_\pm(u), \quad n_a\sigma_a\Psi_\pm(-u)=\Psi_\pm(u)\sigma_3. \tag{23}$$

Четность продолжения (16) порождает ограничение на выбор функций Йоста [13–15]:

$$\Psi_+(x,u)=\sigma_2\Psi_-^*(-x,u^*\pm\pi i)\sigma_2. \tag{24}$$

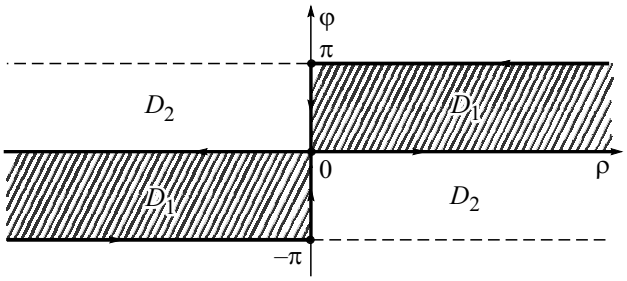



**Рис. 1.** Области аналитичности $D_1$ функций $\Psi_-^{(1)}(u)$, $\Psi_+^{(2)}(u)$, $a(u)$ и $D_2$ функций $\Psi_+^{(1)}(u)$, $\Psi_-^{(1)}(u)$, $\bar{a}(u)$ на поверхности цилиндра. Контур $\Gamma$ представлен толстой линией.

Далее будем нумеровать столбцы матриц $2\times 2$ верхними индексами: $\Psi=(\Psi^{(1)},\Psi^{(2)})$. Векторные функции $\Psi_-^{(1)}(u)$ и $\Psi_+^{(2)}(u)$ аналитически продолжаются с контура $\Gamma$ в область $D_1$ (см. рис. 1):

$$D_1=\{u|0<\rho<\infty,0<\varphi<\pi;-\infty<\rho<0,-\pi<\varphi<0\},$$

а столбцы $\Psi_+^{(1)}(u)$ и $\Psi_-^{(2)}(u)$ будут аналитическими функциями в области $D_2$:

$$D_2=\{u|0<\rho<\infty,-\pi<\varphi<0;-\infty<\rho<0,0<\varphi<\pi\}.$$

На рис. 1 обход линий контура $\Gamma$ выбран так, чтобы область $D_1$ оставалась слева от контура $\Gamma$.

Редукции (23), (24) могут быть продолжены с контура $\Gamma$ в области аналитичности соответствующих столбцов матриц Йоста. Они конкретизируют вид матрицы перехода:

$$T(u)=\begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u)\\ b(u) & \bar{a}(u)\end{pmatrix}, \ a(u)\bar{a}(u)+b(u)\bar{b}(u)=1,$$
$$\bar{a}(u)=a^*(u^*), \quad \bar{b}(u)=b^*(u^*);$$
$$a(u)=a(-u)=a^*\big[(u+\pi i)^*\big], \quad u\in D_1;$$
$$b(u)=-b(-u)=b^*[(u+\pi i)^*], \quad u\in\Gamma. \tag{25}$$

Здесь мы учли, что матричные элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ допускают представления [11]:

$$a(u)=\det\big(\Psi_-^{(1)}(u),\Psi_+^{(2)}(u)\big), \ \bar{a}(u)=\det\big(\Psi_+^{(1)}(u),\Psi_-^{(2)}(u)\big), \tag{26}$$

а значит, могут быть аналитически продолжены с контура $\Gamma$ в области $D_1$ и $D_2$ соответственно. Коэффициенты отражения $b(u)$ и $\bar{b}(u)$ определены только на $\Gamma$.

В областях своей аналитичности матричные элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ могут иметь нули, которые будем предполагать простыми. Если $u=u_j\in D_1$ — нуль функции $a(u)$, то $u=u_j^*\in D_2$ будет нулем функции $\bar{a}(u)$. Как и в работе [14], редукции (23), (24) объединяют нули коэффициента $a(u)$ в „квартеты“:

$$u=\mu_k,\ -\mu_k,\ \mu_k^*+\pi i,\ -\mu_k^*-\pi i,\ k=1,2,\ldots,N;$$
$$\mu_k=\tau_k+i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_k\right),\ 0<\tau_k<\infty,\ -\frac{\pi}{2}<\varepsilon_k<\frac{\pi}{2}. \tag{27}$$

Согласно (26), если $a(u_j)=0$, то столбцы $\Psi_-^{(1)}(u_j)$ и $\Psi_+^{(2)}(u_j)$ пропорциональны:

$$\Psi_-^{(1)}(u_j)=c(u_j)\Psi_+^{(2)}(u_j). \tag{28}$$

Формулы (28) определяют векторные решения системы (18), которые экспоненциально убывают при $|x|\to\infty$. Поэтому набор $\{u_j\}$ соответствует дискретному спектру задачи рассеяния (18), (19).

Редукции на решения Йоста (23), (24) конкретизируют выбор множителей $c(u_j)$ для каждой группы нулей (27):

$$c(\mu_k),\quad c(-\mu_k)=-c(\mu_k),\quad c(\mu_k^*+\pi i)=-\frac{1}{c^*(\mu_k)}.$$

$$c(-\mu_k^*-\pi i)=\frac{1}{c^*(\mu_k)},\quad k=1,2,\ldots,N. \tag{29}$$

Поскольку функции $\Psi_\pm(u)$ непрерывны в точке $x=0$, существует полезное представление матрицы перехода:

$$T(u)=\Psi_+^{-1}(x=0,u)\Psi_-(x=0,u).$$

Отсюда, в частности, находим:

$$a(u)=[\Psi_+(0,u)]_{22}[\Psi_-(0,u)]_{11}-[\Psi_+(0,u)]_{12}[\Psi_-(0,u)]_{21}. \tag{30}$$

Для дальнейшего анализа необходимы асимптотические разложения функций $\Psi_\pm(u)$ вблизи особой точки $u=0$ уравнения (18). Пусть, для определенности, $x>0$. Представим $\Psi_+(u)$ в виде:

$$\Psi_+(u)=[I+\Phi(x,u)]\exp\left(-\frac{i}{2}\Lambda(u)x\sigma_3+Z(u,x)\right), \tag{31}$$

где $\Phi$ и $Z$ — антидиагональная и диагональная матричные функции такие, что

$$\Phi,Z\to 0\quad\text{при}\quad x\to+\infty.$$

Специальная симметрия оператора $U$ в уравнении (18) позволяет заключить, что

$$\Phi=\begin{pmatrix}0 & -\omega^*\\ \omega & 0\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi^*\end{pmatrix}. \tag{32}$$

После подстановки выражений (31), (32) в (18) и отделения диагональной и недиагональной частей получаем систему для расчета функций $\omega(x,u)$, $\xi(x,u)$:

$$\partial_x\xi=\frac{i\Lambda}{2}+U_{11}+U_{12}\omega,\ \ \partial_x\omega+2\omega U_{11}+\omega U_{12}\omega-U_{21}=0. \tag{33}$$

Разложим коэффициенты $\gamma$, $\delta$, $\Lambda$ в ряды по степеням $u$:

$$\gamma=-\frac{1}{u}+\sum_{k=0}^{\infty}u^{2k+1}\gamma_{2k+1},\ \ \delta=-\frac{1}{u}+1+\sum_{k=0}^{\infty}u^{2k+1}\delta_{2k+1}.$$

$$\Lambda=-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}u^{2k}\Lambda_{2k}$$

и будем искать функции $\omega(x,u)$, $\xi(x,u)$ в виде:

$$\omega=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k u^k,\quad \xi=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k u^k. \tag{34}$$

Тогда система (33) дает цепочку уравнений для рекуррентного определения коэффициентов $\omega_k(x)$, $\xi_k(x)$. Вычисления упрощаются в параметризации единичного вектора $\mathbf{l}$ углами $\Theta$, $\Phi$:

$$\mathbf{l}=(\sin\Theta\cos\Phi,\sin\Theta\sin\Phi,\cos\Theta). \tag{35}$$

Приведем выражения для первых коэффициентов:

$$\omega^{(0)}=\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\exp(i\Phi),$$

$$\xi^{(0)}=-\frac{i}{4}\int_x^{+\infty}dx'\Big[(\partial_{x'}\Theta+\partial_t\Theta)^2+\sin^2\Theta(\partial_{x'}\Phi+\partial_t\Phi)^2$$

$$+2(\cos\Theta-1)\partial_{x'}\Phi\Big]+\ln\cos\frac{\Theta}{2}. \tag{36}$$

Разложение функции $\Psi_-(u)$ при $x<0$ по степеням $u$ получается из такового для функции $\Psi_+(u)$ при $x>0$ формальной заменой:

$$\mathbf{l}(x)\to\mathbf{l}(-x),\quad \int_x^{+\infty}dx'\to\int_x^{-\infty}dx'. \tag{37}$$

Формулы (18), (19) приводят к соотношению:

$$\Psi_+(\operatorname{Re}u\to+\infty)\to I, \tag{38}$$

где $I$ — единичная матрица. Тогда из представления (30) получаем:

$$a(\operatorname{Re}u\to+\infty)=1. \tag{39}$$

Явный вид аналитической функции $a(u)$ восстанавливается по ее нулям (27) в области $D_1$, асимптотическому поведению (39) и коэффициенту отражения [11]:

$$a(u)=\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\operatorname{ch}u-\operatorname{ch}\mu_k}{\operatorname{ch}u-\operatorname{ch}\mu_k^*}\right)\left(\frac{\operatorname{ch}u+\operatorname{ch}\mu_k^*}{\operatorname{ch}u+\operatorname{ch}\mu_k}\right)$$

$$\times\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}d\nu\ln(1-|b(\nu)|^2)\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(\nu-u)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(\nu+u)}\right)\right]$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}d\varphi\ln(1+|b(i\varphi)|^2)\,\frac{\sin\varphi}{(\operatorname{ch}u-\cos\varphi)}\right]. \tag{40}$$

Здесь мы воспользовались ядром Коши на поверхности цилиндра $(\exp u'-\exp u)^{-1}\exp u'$ [23] и свойствами симметрии функций $a(u)$ и $b(u)$ (25).

Таким образом, с помощью вспомогательной линейной системы (18) мы отобразили векторное поле

$\mathbf{l}(x,t)$ полуограниченного ферримагнетика в набор данных рассеяния. Он содержит спектральные плотности $b(\lambda)$ ($\lambda \in \Gamma$) задачи рассеяния (18), (19), дискретные нули $\{u_j\}$ функции $a(u)$ и нормированные коэффициенты $\{c(u_j)\}$. Эволюция данных рассеяния находится стандартным образом [11] с помощью второго уравнения (12):

$$b(u,t) = b_0(u)\exp[-i\gamma^2(u)t],$$

$$c(u_j,t) = c_0(u_j)\exp[-i\gamma^2(u_j)t],\ \ a(u,t) = a_0(u). \quad (41)$$

Постоянные интегрирования $b_0(u)$, $c_0(u_j)$, $a_0(u)$ определяются из уравнения (18) по заданному начальному условию (10) при $t = 0$.

Изложенная схема представляет нелинейное обобщение метода Фурье, широко используемого при анализе малоамплитудных спиновых волн. Для слабовозбужденных состояний среды спектральные плотности $b(u,t)$ задачи рассеяния в точности совпадают с фурье-гармониками линейных мод ферримагнетика. В общем случае функции $b(u,t)$ описывают слабонелинейную динамику диспергирующих волновых цугов. Данные дискретного спектра $\{u_j\}$ параметризуют частицеподобные нормальные моды — солитоны, которые образуются только при сильных внешних воздействиях и не имеют аналогов в линейной теории.

## 3. Интегралы движения полубесконечного ферримагнетика

Как и в безграничной среде, не зависящий от времени элемент $a(u)$ матрицы перехода служит производящей функцией бесконечной серии интегралов движения для нелинейно динамики полубесконечного ферримагнетика. Физически содержательные локальные интегралы движения совпадают с коэффициентами разложения функции $\ln a(u)$ в ряд по степеням $u$. Его нетрудно получить, используя формулы (30)–(37) предыдущего раздела.

Приведем первый член степенного ряда:

$$\ln a(u) = iE + O(u).$$

Он совпадает с энергией полуограниченного образца:

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} dx\left[(\partial_t\Theta)^2 + (\partial_x\Theta)^2 + \sin^2\Theta[(\partial_x\Phi)^2 + (\partial_t\Phi)^2]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} dx\left[(\partial_x\mathbf{l})^2 + (\partial_t\mathbf{l})^2\right].$$

С другой стороны, для функции $a(u)$ нами получено дисперсионное соотношение (40). Его также можно записать в виде ряда по степеням $u$. Сравнение двух разложений позволяет выразить все интегралы движения в терминах спектральных данных. В частности, энергия полубесконечного ферримагнетика допускает представление:

$$E = \int\limits_0^{\infty} d\rho N_G(\rho)\omega_G(\rho) + \int\limits_0^{\pi} d\varphi N_a(\varphi)\omega_a(\varphi)$$

$$+ 4\sum_{k=1}^{N}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\theta_k}{\operatorname{sh}\tau_k}\right), \quad (42)$$

где величины

$$N_G(\rho) = -\frac{\operatorname{sh}\rho}{\pi}\ln[1 - |b(\rho)|^2] > 0,$$

$$N_a(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{2\pi}\ln[1 + |b(i\varphi)|^2] > 0$$

имеют смысл плотности бесщелевых (голдстоуновских) и активационных магнонов с частотами

$$\omega_G(\rho) = \operatorname{sh}^{-2}\rho, \quad \omega_a(\varphi) = \sin^{-2}\varphi. \quad (43)$$

Для обоснования этого утверждения перейдем от параметров $\rho$ и $\varphi$ к квазиимпульсам $p_G$ и $p_a$ магнонов [11]:

$$p_G^2 = \frac{\operatorname{ch}^2\rho}{\operatorname{sh}^4\rho}, \quad p_a^2 = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}. \quad (44)$$

Тогда формулы (43), (44) в точности совпадут с законами дисперсии линейных мод ферримагнетика [11]:

$$\omega_G(\rho) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4p_G^2} - 1\right],\ \ \omega_a(\rho) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4p_a^2} + 1\right].$$

Дискретные слагаемые в представлении (42) соответствуют вкладам в энергию образца отдельных солитонов.

Отсюда заключаем, что любое нелинейное возбуждение полуограниченного ферримагнетика можно описать в терминах идеального газа дискретных существенно нелинейных мод — солитонов, и квазичастиц непрерывного спектра диспергирующих волн — магнонов.

## 4. Обратное спектральное преобразование

Для решения исходной начально-краевой задачи (4)–(7) для ферримагнетика нужно найти обратное преобразование данных рассеяния (41) в векторное поле $\mathbf{l}(x,t)$. С этой целью, вначале построим решение вспомогательной линейной системы (12).

Перейдем от матриц Йоста к новым фундаментальным решениям $\Pi_+(u)$ и $\Pi_-(u)$ системы (12):

$$\Pi_+(u) = \left(\Psi_-^{(1)}(u), \Psi_+^{(2)}(u)\right)\varphi_0^{-1}(u),$$

$$\Pi_-(u) = \left(\Psi_+^{(1)}(u), \Psi_-^{(2)}(u)\right)\varphi_0^{-1}(u), \quad (45)$$

где $\varphi_0(u) = \exp[-i\Lambda(u)x\sigma_3/2]$. Согласно результатам раздела 3, $\Pi_+(u)$ и $\Pi_-(u)$ будут аналитическими функциями параметра $u$ в областях $D_1$ и $D_2$ соответственно.

Поэтому задача их вычисления сводится к решению следующей задачи Римана теории функций комплексной переменной. Нужно построить матричные функции $\Pi_+(x,u)$ и $\Pi_-(x,u)$, аналитические по $u$ в областях $D_1$ и $D_2$, которые на контуре $\Gamma$ связаны условием сопряжения:

$$\Pi_-([b]x,u)=\frac{\Pi_+(x,u)}{a(u)}\varphi_0(x,u)\times\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}(u)\\ -b(u) & 1\end{pmatrix}\varphi_0^{-1}(x,u), \quad (46)$$

удовлетворяют ограничениям:

$$n_a(x)\sigma_a\Pi_\pm(x,u)=\Pi_\pm(x,-u)\sigma_3, \quad (47)$$

$$\Pi_\pm(x,u)=\sigma_2\Pi_\pm^*\big(-x,(u+\pi i)^*\big)\sigma_2, \quad u\in D_{1,2};$$

$$\Pi_+^*(x,u)=\sigma_2\Pi_-(x,u)\sigma_2, \quad u\in\Gamma \quad (48)$$

и нормировочному условию:

$$\Pi_\pm(x,u=+\infty)=I. \quad (49)$$

Задача Римана (46)–(49) представляет переформулировку аналитических и трансформационных свойств базисных функций Йоста из раздела 3 и их связи (22) на контуре Г.

Для любой невырожденной матрицы $A$ порядка $2\times 2$ справедливо тождество:

$$A^{-1}\det A=\sigma_2 A^T\sigma_2.$$

Поэтому равенство (48) можно привести к виду:

$$\Pi_+^{-1}(x,u)a(u)=\Pi_-^\dagger(x,u^*).$$

Здесь верхние индексы „T“ и † обозначают операции транспонирования и эрмитового сопряжения. Это позволяет переписать условие сопряжения (46) в терминах одной лишь функции $\Pi_-(x,u)$:

$$\Pi_-^\dagger(x,u^*)\Pi_-(x,u)=\varphi_0(x,u)\times\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}(u)\\ -b(u) & 1\end{pmatrix}\varphi_0^{-1}(x,u),\ u\in\Gamma. \quad (50)$$

На больших временах слабонелинейные волны расплываются из-за эффектов дисперсии и „выживают“ только долгоживущие солитоны. Они определяют основные физические свойства ферримагнетика при сильных внешних воздействиях. Поэтому далее ограничимся обсуждением чисто солитонных состояний, когда диспергирующие волны отсутствуют. Тогда $b(u)=\bar{b}(u)\equiv 0$, и условие сопряжения (50) упрощается:

$$\Pi_-^\dagger(x,u^*)\Pi_-(x,u)=\Pi_-(x,u)\Pi_-^\dagger(x,u^*)=I,\ u\in\Gamma. \quad (51)$$

Задача Римана сводится к построению мероморфной на поверхности цилиндра (15) матричной функции $\Pi_-(u)$ с полюсами в точках $u=u_j\in D_1$ (27) и нормировкой (49). Будем искать ее в виде:

$$\Pi_-(u)=I+\sum_{j=1}^{4N}\frac{A_j}{\exp u-\exp u_j}. \quad (52)$$

Условие отсутствия полюсов в левой части равенства (51) приводит к $4N$ независимым матричным уравнениям [11,24]:

$$\Pi_-(u_j^*)A_j^+=0, \quad j=1,2,\ldots,4N. \quad (53)$$

Их нетривиальное решение возможно только, когда обе матрицы $A_j$ и $\Pi_-(u_j^*)$ вырождены. Представим $A_j$ в виде [24]:

$$(A_j)_{\alpha\beta}=(X_j)_\alpha(\xi_j^*)_\beta, \quad \alpha,\beta=1,2.$$

Тогда уравнения (53) примут вид:

$$\Pi_-(u_j^*)\xi_j=0, \quad j=1,2,\ldots,4N. \quad (54)$$

Формулы предыдущего раздела позволяют выявить алгебраическую структуру матрицы $\Pi_-(u_j^*)$ при $x>0$ [12–15]:

$$\Pi_-(u_j^*)=i\sigma_2\Big(\Psi_+^{(2)}(u_j),-c^*(u_j)\Psi_+^{(2)}(u_j)\Big)\varphi_0^{-1}(u_j^*).$$

Отсюда сразу находим векторы $\xi_j$ с точностью до несущественного общего множителя:

$$\xi_j=\begin{pmatrix}\nu_j^*(x,t)\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\nu_j(x,t)=c_0(u_j)\exp\big[-i\big(\gamma^2(u_j)t-\Lambda(u_j)x\big)\big], \quad (55)$$

где $c_0(u_j)$ — постоянные интегрирования в формулах (41). Здесь мы восстановили зависимость от времени.

Напомним, что данные дискретного спектра объединяются в „квартеты“:

$$\{u_j\}\equiv\{u_k^{(1,2)},u_k^{(3,4)}\}, \quad \{c_0(u_j)\}=\{c_k^{(1,2)},c_k^{(3,4)}\},$$

$$j=1,2,\ldots,4N, \quad k=1,2,\ldots,N.$$

Внутри каждой группы параметры связаны между собой:

$$u_k^{(1,2)}=\pm\mu_k,\ u_k^{(3,4)}=\pm(\mu_k^*+\pi i),\ \mu_k=\tau_k+i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_k\right),$$

$$0<\tau_k<\infty, \quad -\pi/2<\varepsilon_k<\pi/2;$$

$$c_k^{(1,2)}=\pm c_k^{(0)}, \quad c_k^{(3,4)}=\mp(c_k^{(0)^*})^{-1}. \quad (56)$$

Здесь $c_k^{(0)}=c^{(0)}(\mu_k)$ — комплексная постоянная интегрирования.

В результате подстановки $\xi_j$ (55) в (54) получаем линейную систему для расчета векторов $X_j$:

$$\xi_j+\sum_{k=1}^{4N}M_{jk}X_k=0, \quad M_{jk}=\frac{(\xi_k^*\cdot\xi_j)}{\exp u_j^*-\exp u_k}.$$

Ее решение определяет солитонную матрицу $\Pi_-(x,t,u)$ при $x>0$:

$$(\Pi_-)_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}-\sum_{k,j=1}^{4N}\frac{(M^{-1})_{kj}(\xi_i)_\alpha(\xi_k^*)_\beta}{\exp u-\exp u_k}$$

$$(M^{-1})_{kj}=\frac{\partial\ln\det M}{\partial M_{jk}}. \qquad (57)$$

Тогда первая формула (47) с учетом нормировочного условия (49) и явного вида матричной функции $\Pi_-(u)$ при $x>0$ (57) сразу дает $N-$солитонное решение исходной существенно нелинейной модели (4)–(6) для ферримагнетика на полуоси $0<x<\infty$:

$$l_a\sigma_a=\Pi(u=-\infty)\sigma_3. \qquad (58)$$

Оно описывает упругие парные столкновения солитонов друг с другом и их отражение от границы образца.

## 5. Взаимодействие солитонов с поверхностью ферримагнетика

Проанализируем типичные особенности взаимодействия мультисолитонов на примере односолитонного решения, которое параметризуют четыре нуля (56) функции $a(u)$:

$$u^{(1,2)}=\pm\mu,\quad u^{(3,4)}=\pm(\mu^*+\pi i),\quad \mu=\tau+i\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right),$$

$$0<\tau<\infty,\quad |\varepsilon|<\frac{\pi}{2}.$$

Соответствующие векторы $\xi_j$ (55) имеют вид:

$$\xi_{1,2}=\begin{pmatrix}\pm\nu_1^*\\1\end{pmatrix},\quad \xi_{3,2}=\begin{pmatrix}\pm\nu_3^*\\1\end{pmatrix}.$$

Распределение поля $\mathbf{l}(x,t)$ в односолитонном возбуждении дают формулы (57), (58) при $N=1$. Для дальнейшего анализа удобна следующая форма записи:

$$l_3=1-\frac{2|f|^2}{|f|^2+|g|^2},\quad l_1+il_2=\frac{2f^*g}{|f|^2+|g|^2}. \qquad (59)$$

После простых, но утомительных преобразований, находим функции $f$ и $g$:

$$f=i\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{cth}\,\tau\left[\nu_1^*(\nu_1\nu_3^*-1)\,\mathrm{th}\,\mu-\nu_3^*(\nu_1^*\nu_3-1)\,\mathrm{th}\,\mu^*\right],$$

$$g=\frac{1}{2}\Bigg[\left(1+|\nu_1\nu_3|^2\right)|\,\mathrm{th}\,\mu|^2\,\mathrm{tg}^2\,\varepsilon\,\mathrm{cth}^2\,\tau$$

$$+|\,\mathrm{th}\,\mu|^2(\nu_1\nu_3^*+\nu_1^*\nu_3)+\frac{\mathrm{sh}^2\,\mu|\nu_1|^2+\mathrm{sh}^2\,\mu^*|\nu_3|^2}{\cos^2\varepsilon\,\mathrm{sh}^2\,\tau}\Bigg]. \qquad (60)$$

Здесь

$$\nu_1=c_0\exp\left[-d^{-1}(x-Vt)-ikx-i\omega t\right],$$

$$\nu_3=-(c_0^*)^{-1}\exp\left[-d^{-1}(x+Vt)+ikx-i\omega t\right], \qquad (61)$$

$c_0$ — комплексная постоянная интегрирования. Параметры $d$ и $V$:

$$d=\frac{1}{\mathrm{Im}\,\Lambda(\mu)}=\frac{(\mathrm{sh}^2\,\tau+\cos^2\varepsilon)^2}{\cos\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\tau\,(\mathrm{ch}^2\,\tau+\sin^2\varepsilon)}>0,$$

$$V=\frac{\mathrm{Im}\,\gamma^2(\mu)}{\mathrm{Im}\,\Lambda(\mu)}=\frac{2\sin\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\tau}{\mathrm{ch}^2\,\tau+\sin^2\varepsilon}$$

определяют, соответственно, размер солитона и скорость его движения как целого. Частота $\omega$ и волновое число $k$ колебаний вектора $\mathbf{l}$ внутри солитона имеют вид:

$$\omega=\mathrm{Re}\,\gamma^2(\mu)=\frac{\sin^2\varepsilon\,\mathrm{sh}^2\,\tau-\mathrm{ch}^2\,\varepsilon\cos^2\varepsilon}{(\mathrm{sh}^2\,\tau+\cos^2\varepsilon)^2},$$

$$k=-\,\mathrm{Re}\,\Lambda(\mu)=-\frac{\mathrm{ch}\,\tau\,\sin\varepsilon(\mathrm{sh}^2\,\tau-\cos^2\varepsilon)}{(\mathrm{sh}^2\,\tau+\cos^2\varepsilon)^2}$$

Частицеподобное образование (59)–(61), как и положено, удовлетворяет краевым условиям (5), (6). Его пространственная локализация и динамические свойства определяются экспоненциальными множителями в формулах (61).

Пусть для определенности параметр $V>0$ $(0<\varepsilon<\pi/2)$. Тогда на больших расстояниях от края образца (при $x\gg1$) в пределе $t\to+\infty$ $(t\to-\infty)$ в сопутствующей солитону системе отсчета, где $x-Vt=\mathrm{const}$ $(x+Vt=\mathrm{const})$, можно положить $\nu_3=0$ $(\nu_1=0)$. В результате формулы (59)–(61) для вектора $\mathbf{l}$ упрощаются:

$$(l_3)_\pm=1-\frac{2}{\Delta_\pm},\quad \Delta_\pm=\frac{\mathrm{ch}^2\,y_\pm}{\cos^2\varepsilon}+\frac{\mathrm{sh}^2\,y_\pm}{\mathrm{sh}^2\,\tau},$$

$$(l_1+il_2)_\pm=\frac{i\exp(-is_\pm)}{\Delta_\pm\,\mathrm{sh}\,\tau\,\cos\varepsilon}$$

$$\times\left[\mathrm{sh}\,\mu^*\exp(\pm y_\pm)+\mathrm{sh}\,\mu\exp(\mp y_\pm)\right], \qquad (62)$$

где

$$y_\pm=d^{-1}(x\mp Vt-x_\pm^{(0)}),\quad s_\pm=\omega t\pm kx+s_\pm^{(0)},$$

$$x_+^{(0)}=d\ln\left|\frac{c_0\,\mathrm{ch}\,\mu}{\mathrm{ch}\,\tau\,\sin\varepsilon}\right|,\quad x_-^{(0)}=d\ln\left|\frac{\mathrm{ch}\,\mu}{c_0\,\mathrm{ch}\,\tau\,\sin\varepsilon}\right|,$$

$$s_+^{(0)}=-\arg\left(\frac{\mathrm{ch}\,\tau\,\sin\varepsilon}{c_0\,\mathrm{ch}\,\mu}\right),\quad s_=^{(0)}=\arg\left(\frac{c_0^*\,\mathrm{ch}\,\tau\,\sin\varepsilon}{\mathrm{ch}\,\mu^*}\right).$$

Предельному решению (62) соответствует типичный солитон безграничного ферримагнетика [9,11]. Его можно трактовать как связанное состояние двух пространственно локализованных волн намагниченности, распространяющихся по подрешеткам ферримагнетика. Из-за неэквивалентности подрешеток, в области образования солитона нескомпенсированная намагниченность совершает неоднородную круговую прецессию вокруг оси $Oz$. Волна прецессии с частотой $\omega$ и волновым числом $k$ зарождается у одного края солитона, распространяется

по его ядру и исчезает у противоположного края. В сопутствующих солитону системах отсчета в его центре, где $y_\pm = 0$, имеем:

$$(l_3)_\pm = -\cos(2\varepsilon),$$

$$(l_1 + il_2)_\pm = -i\sin(2\varepsilon)\exp\left[-i(\Omega t \pm kx_\pm^{(0)} + s_\pm^{(0)})\right]. \quad (63)$$

Здесь $\Omega = \omega + kV$ — частота внутренней прецессии в системе отсчета, связанной с солитоном. При $\varepsilon \to \pm\pi/2$ отклонения вектора $\mathbf{l}$ от равновесного положения $\mathbf{l} = (0, 0, 1)$ уменьшаются, а протяженность солитона увеличивается. В этом пределе в лабораторной системе отсчета возбуждение (62) похоже на „обрезанную“ спиновую волну линейной теории с волновым числом $k = \mp \operatorname{ch}\tau / \operatorname{sh}^2\tau$ и законом дисперсии:

$$\omega(k) = \operatorname{sh}^{-2}\tau = \frac{\sqrt{1+4k^2}-1}{2}.$$

В общем случае, единственным результатом взаимодействия солитона с границей образца при его удалении от поверхности являются сдвиг центра солитона на величину $\Delta x = 2d\ln|c_0|$ и изменение начальной фазы его прецессии:

$$\Delta s = 2kd\ln\left|\frac{\operatorname{ch}\mu}{\operatorname{ch}\tau\sin\varepsilon}\right| + \arg\frac{\operatorname{ch}\mu^*}{\operatorname{ch}\mu}.$$

В глубине образца солитоны (62) могут быть и неподвижными. Их скорость $V \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $x_\pm^{(0)} = \text{const}$, $s_\pm^{(0)} = \text{const}$. Между тем, локализация частицеподобного образования (59)–(61) около границы образца невозможна, т.к. в формулах (59), (60) множитель $f$ обращается в нуль при $\varepsilon = 0$.

При столкновении солитона с краем образца в момент времени $t_0 = -(d/V)\ln|c_0|$ его центр совпадает с границей $x = 0$ образца, а векторное поле $\mathbf{l}(x, t_0)$ на полуоси $0 < x < \infty$ описывается формулами (59), где

$$g = \frac{2\exp(-2d^{-1}x)}{\operatorname{sh}^2\tau + \sin^2\varepsilon}\left(\operatorname{ch}^2\tau(\operatorname{tg}^2\varepsilon - 1) + (\operatorname{sh}^2\tau + \cos^2\varepsilon)\right.$$
$$\left.\times\left[\operatorname{sh}^2(d^{-1}x)\operatorname{tg}^2\varepsilon\operatorname{cth}^2\tau + \sin^2(kx)\right]\right),$$

$$f = -\frac{2i\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{cth}\tau\exp[-2d^{-1}x + i(\omega t_0 - \arg c_0)]}{\operatorname{sh}^2\tau + \sin^2\varepsilon}$$
$$\times\left[\operatorname{sh}(2\tau)\cos(kx)\operatorname{ch}(d^{-1}x) + \sin(2\varepsilon)\sin(kx)\operatorname{sh}(d^{-1}x)\right].$$

На границе $x = 0$ образца при $t = t_0$ имеем:

$$l_3 = \cos(4\varepsilon),\ \ l_1 + il_2 = -i\sin(4\varepsilon)\exp[-i(\omega t - \arg c_0)]. \quad (64)$$

Сравнение формул (63), (64) показывает, что вблизи поверхности ядро солитона основательно изменяется. Так при значениях $\varepsilon = \pi/4$ в центре солитона в глубине образца компонента $l_3 = 0$, а в момент столкновения с поверхностью: $l_3 = -1$.

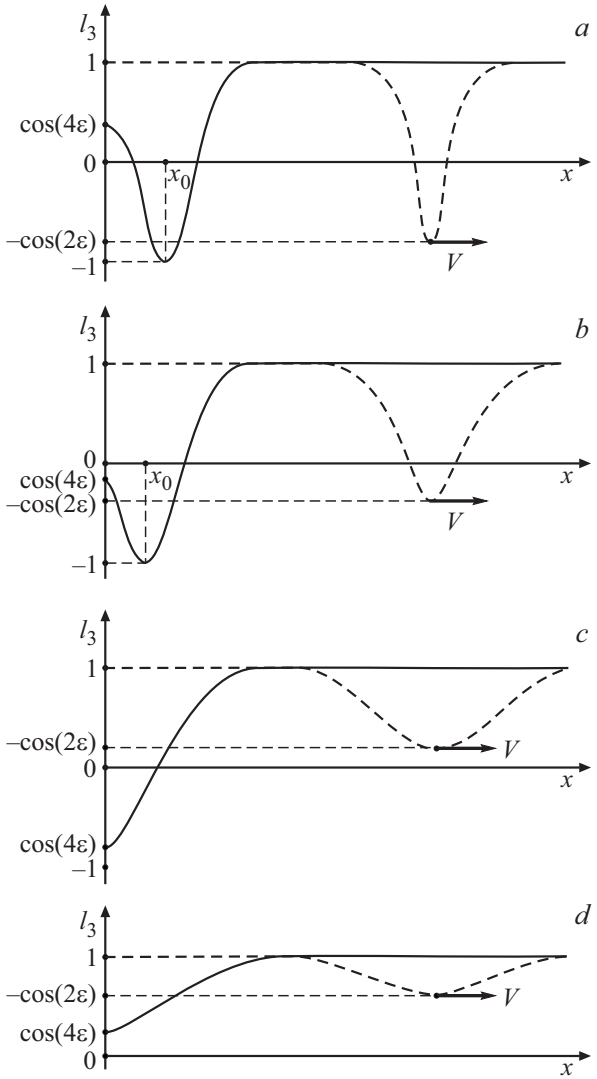



**Рис. 2.** Зависимость компоненты $l_3$ солитона от координаты в момент столкновения с поверхностью образца (сплошная линия) и на больших расстояниях от поверхности при $V > 0$ $(0 < \varepsilon < \pi/2)$ $t \to +\infty$ (штриховая линия): *a*) $0 < \varepsilon \le \pi/8$, *b*) $\pi/8 < \varepsilon \le \pi/4$, *c*) $\pi/4 < \varepsilon \le 3\pi/8$, *d*) $3\pi/8 < \varepsilon \le \pi/2$.

Процессы перемагничивания поверхностных слоев материала в ходе отражения солитона сопровождаются приграничным всплеском намагниченности продолжительностью порядка $\Delta x/V$. Сценарии изменения параметра порядка $\mathbf{l}(x, t)$ существенно зависят от значений $\varepsilon$ (рис. 2). При $0 < |\varepsilon| < \pi/4$ в момент столкновения с поверхностью компонента $l_3$ достигает глобального минимума $l_3 = -1$ вблизи края образца в некоторой точке $x_0$, определяемой условием: $g(x_0, t_0) = 0$. Отметим, что на рис. 2, *a, b*: $\cos(4\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon = \pi/8$; на рис. 2, *b* значения $\cos(4\varepsilon)$ и $-\cos(2\varepsilon)$ совпадают при $\varepsilon = \pi/6$, а на рис. 2, *b, c* при $\varepsilon = \pi/4$: $\cos(4\varepsilon) = -1$. В интервале $0 < \varepsilon < \pi/2$ размер солитона увеличивается с ростом $\varepsilon$. Протяженному малоамплитудному солитону соответствует рис. 2, *d*.

## 6. Заключение

В данной работе найдены новые солитонные состояния существенно нелинейной модели полуограниченного ферримагнетика с двумя кристаллографически неэквивалентными подрешетками. Учитывались граничные условия, отвечающие отсутствию закрепления поверхностных спинов. Показано, что любое начальное возбуждение ферримагнетика можно описать в терминах идеального газа солитонов и квазичастиц непрерывного спектра спиновых волн. Спектральное разложение энергии полуограниченного ферримагнетика представляет сумму независимых вкладов от сильно нелинейных нормальных мод — солитонов и магнонов из двух ветвей спектра диспергирующих волн. Дискретные частоты внутренней прецессии солитонов лежат вне области непрерывного спектра спиновых волн. Установлено, что ядра солитонов не являются жесткими образованиями. При взаимодействии с поверхностью образца они претерпевают существенные изменения, которые сопровождаются перемагничиванием поверхностных слоев материала. Поэтому полученные нами частицеподобные возбуждения невозможно описать известными ранее пертурбативными методами для солитонов неограниченной среды. Таковые предполагают малость изменений структуры и свойств солитонов под действием возмущений. После отражения от поверхности по мере продвижения вглубь образца полученные частицеподобные возбуждения принимают стационарную форму, характерную для прецессионных солитонов неограниченного ферримагнетика [9–11].

Вычислены изменения положения и сдвиг начальной фазы внутренних колебаний солитона после его отражения от края образца.

Актуально экспериментальное подтверждение упругого отражения солитонов от границы образца и наблюдение процессов перемагничивания пограничных слоев среды в ходе столкновения солитона с поверхностью.

Полученные результаты следует учитывать при выборе стратегии моделирования солитонных режимов в реальных образцах конечных размеров. Они полезны для верификации численных расчетов. Могут служить основой планирования новых экспериментов по изучению нелинейной динамики ограниченных ферримагнетиков при сильных внешних воздействиях.

### Благодарности

Автор выражает благодарность А.А. Расковалову за конструктивные замечания и помощь в подготовке рукописи к публикации.

### Финансирование работы

Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки, тема „Квант“ (номер г. р. 122021000038-7).

### Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## Список литературы

[1] А.Г. Гуревич. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. Наука, М. (1973). 588 с.
[2] А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков. Магнитные колебания и волны. Физматлит, М. (1994). 462 с. [A.G. Gurevich, G.A. Melkov. Magnetization oscillations and waves. CRC Press, Boca Ration, FL, London (1996). 464 p.].
[3] Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. Физматлит, М. (2001). 560 с.
[4] Е.В. Гомонай, В.М. Локтев. Физика низких температур, **40**, *1*, 22 (2014). [E.V. Gomonay, V.M. Loktev. Low Temperature Physics, **40**, *1*, 17 (2014) ].
[5] Б.А. Иванов. Физика низких температур, **45**, *9*, 1095 (2019). [B.A. Ivanov. Low Temperature Physics, **45**, *9*, 935 (2019)].
[6] V.G. Bar'yachtar, M.V. Chetkin, B.A. Ivanov, S.N. Gadetskii. Springer Tracts in Modern Physics, **129**. Springer, New York (1994). 189 p.
[7] S.S. Dhillon, M.S. Vitiello, E.H. Linfield, A.G. Davies, M.C. Hoffmann, J. Booske, C. Paoloni, M. Gensch, P. Weightman, G.P. Williams, E. Castro-Camus, D.R.S. Cumming, F. Simoens, I. Escorcia-Carranzo, J. Grant, S. Lucyszyn, M. Kuwata-Gonokami, K. Konishi, M. Koch, C.A. Schmuttenmaer, T.L. Cocker, R. Huber, A.G. Markelz, Z.D. Taylor, V.P. Wallace, J.A. Zeitler, J. Sibik, T.M. Korter, B. Ellison, S. Rea, P. Goldsmith, K.B. Cooper, R. Appleby, D. Pardo, P.G. Huggard, V. Krozer, H. Shams, M. Fice, C. Renaud, A. Seeds, A. Stöhr, M. Naftaly, N. Ridler, R. Clarke, J.E. Cunningham, M.B. Johnston. J. Phys. D.: Appl. Phys., **50**, P. 043001 (2017).
[8] В.Г. Барьяхтар, Б.И. Иванов. В мире магнитных доменов. Наукова думка, Киев (1986). 159 с.
[9] A.B. Borisov, V.V. Kiseliev, G.G. Talutz. Sol. St. Comm. **44**, *3*, 441 (1982).
[10] Б.А. Иванов, А.Л. Сукстанский. ЖЭТФ **84**, *1*, 370 (1983) [B.A. Ivanov, A.L. Sukstanskii. JETP **57**, *1*, 214 (1983)].
[11] А.Б. Борисов, В.В. Киселев. Квазиодномерные магнитные солитоны. Физматлит, М. (2014). 520 с.
[12] В.В. Киселев. ЖЭТФ **163**, *3*, 375 (2023) [V.V. Kiselev. JETP **163**, *3*, 330 (2023)].
[13] В.В. Киселев. ТМФ **219**, *1*, 55 (2024) [V.V. Kiselev. Theoret. and Math. Phys. **219**, *1*, 576 (2024)].
[14] V.V. Kiselev, A.A. Raskovalov. Chaos, Solitons and Fractals **188**, P. 115500 (2024).
[15] В.В. Киселев. ТМФ **220**, *3*, 448 (2024) [V.V. Kiselev. Theoret. and Math. Phys. **220**, *3*, 1440 (2024)].
[16] Е.А. Туров. Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. Издательство АН СССР, М. (1963). 224 с. [E.A. Turov. Physical properties of magnetically ordered crystals. Academic Press, New York, London (1965). 222 c.]
[17] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Л.Д. Ландау. Собрание трудов (в двух томах), т. 1. Наука, М., с. 128 (1969); 512 с. [Collected papers of L.D. Landau. Edited by D. Ter Haar. Pergamon press, c. 101 (1965)].

[18] Е.М. Лифшиц,Л.П. Питаевский. Статистическая физика, часть 2. Теория конденсированного состояния (серия „Теоретическая физика“, т. IX). Наука, М. (1978). 448 с. [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Statistical Physics, part 2, Theory of the Condensed State, Volume 9 of Course of Theoretical Physics. Pergamon press (1980). 387 p.].
[19] У.Ф. Браун. Микромагнетизм. Наука, М. (1979). 160 с. [W.F. Brown. Micromagnetics. Springer Science and Business Media, New York: Interscience (1963). 143 p.].
[20] С.В. Вонсовский. Магнетизм. Наука, М. (1971). 1032 с. [S.V. Vonsovskii. Magnetism. J. Wiley, New York (1974). 1256 p.]
[21] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. Наука, М. (1967). 368 с. [A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yackhtar, S.V. Peletminskii. Spin waves. North–Holland Pub. Co., Amsterdam (1968). 372 p.]
[22] И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов. ФНТ **5**, *7*, 759 (1979) [I.V. Bar'yachtar, B.A. Ivanov. Sov. J. Low Temp. Phys. **5**, 361 (1979)]
[23] Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Наука, М. (1977). 640 с. [F.D. Gakhov. Boundary value problems. Dover Publications Inc., New York (1990). 561 p.]
[24] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, М. (1980). 320 с. [S.P. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, V.E. Zakharov. Theory of solitons. The inverse scattering method. Plenum, New York (1984)]

*Редактор К.В. Емцев*