

Поляриметрический атомный интерферометр

© А.Ж. Мурадян

Институт физики, Ереванский государственный университет,
Ереван, Республика Армения
e-mail: muradyan@ysu.am

Поступила в редакцию 31.08.2024 г.

В окончательной редакции 31.08.2024 г.

Принята к публикации 23.02.2025 г.

В ныне действующих светоимпульсных атомных интерферометрах входная волна атомарного вещества расщепляется на две составляющие, которые затем рекомбинируют и интерферируют на выходных портах. Интерференция определяет вероятность того, на каком порту будет зарегистрирован атом. Угол однократного процесса расщепления очень мал, и поэтому процесс отклонения повторяется многократно. Кроме того, из-за вероятностного характера обнаружения атома на конкретном порту процесс измерения должен быть повторен многократно при идентичных начальных условиях. В настоящей работе предложен новый тип атомного интерферометра, в котором традиционный метод измерения состояния атома заменен на высокочувствительный метод поляризационной спектроскопии с использованием рабочего вещества сгустка атомного конденсата. В результате предлагаемая конструкция освобождает интерферометр от необходимости вышеупомянутых многократных повторений, сохраняя при этом высокий уровень чувствительности. Для расщепления поступательного движения атома используется резонансная дифракция Капицы–Дирака. Численные расчеты по определению повернутой составляющей зондирующего поля показывают, что отношение выходного сигнала к входному сигналу в нормальных условиях специализированной лаборатории лазерной физики с использованием сгустка атомного конденсата щелочных металлов с концентрацией 10^{10} см^{-3} и линейными размерами порядка $10 \mu\text{м}$ достигает значения 0.1.

Ключевые слова: атомный интерферометр, поляризационная спектроскопия, атомарный конденсат, дифракция Капицы–Дирака.

DOI: 10.61011/OS.2025.04.60536.7036-24

Введение

Светоимпульсный атомный интерферометр [1–6] — это высокая технология квантовой метрологии и квантового зондирования [7–9], основанная на волновой природе материи. В атомном интерферометре атомный волновой пакет разделяется, как и в стандартных оптических интерферометрах, на два пути, которые затем отражаются и рекомбинируют. Угол расщепления здесь образуется путем комбинационного рассеяния фотона, в результате чего оказывается очень малым и для его увеличения требуется аккуратное накопление множества актов воздействия, до нескольких сот [10,11].

Другим качественно новым аспектом по отношению к традиционным оптическим интерферометрам является метод регистрации. Здесь информация о разности фаз определяется путем подсчета атомов, зарегистрированных на их основных и возбужденных внутренних энергетических уровнях (выходных портах), напрямую апеллируя к стандартной теории квантового измерения [12–14]. Вероятностный характер последнего приводит к необходимости многократного повторения всего цикла взаимодействия, обеспечивая идентичные начальные условия.

В настоящей работе представлена новая схема атомного интерферометра, в которой информация о выходном состоянии атома определяется не путем подсчета

атомов на двух выходных портах интерферометра с его многократным повторением, а по однократному акту высокочувствительной поляризационной спектроскопии зондирующего поля [15–17]. Особенностью предлагаемой схемы является также то, что интерференция атомных волн происходит не за счет пространственного перекрытия двух предварительно разделенных траекторий, а за счет оптических переходов между двумя дискретными семействами импульсных состояний поступательного движения атома на его основном и возбужденных внутренних состояниях, генерируемых дифракцией Капицы–Дирака.

Первый этап работы интерферометра — генерация семейства эквидистантных импульсных состояний путем дифракции атома на резонансном поле стоячей волны лазерного излучения. Для этого известно приближение Рамана–Ната распространяется на более длительные времена взаимодействия, заселяя основные и возбужденные внутренние состояния атома практически поровну. На втором этапе взаимодействия бегущая волна порождает интерференционный процесс между семействами импульсных состояний основного и возбужденных внутренних состояний атома. В ходе этого взаимодействия распределения импульса на нижнем и верхнем внутренних уровнях периодически осциллируют, перемещая центры распределения в противоположных направлениях. Последующее зондирующее поле распространя-

ется вдоль направления стоячей и бегущей волн и, взаимодействуя с атомным ансамблем, проецирует его состояния в спектр вращения плоскости поляризации зондирующего поля. Искомая информация об остаточной интерференции волн материи в нем представляется в виде асимметрично распределенного семейства узких максимумов, смещенных относительно друг друга за счет эффекта Доплера. Использование такого метода диагностики позволит существенно упростить экспериментальную аппаратуру атомного интерферометра, сохранив при этом ее высокую точность.

1. Генерация и интерференция импульсных состояний атома

1.1. Генерация импульсных состояний атома лазерным полем стоячей волны

Рассмотрим двухуровневый атом с массой M и частотой оптического перехода ω_0 , взаимодействующий с лазерной стоячей волной с резонансной частотой $\omega = \omega_0$ и напряженностью электрического поля E . Уравнения эволюции этой системы хорошо известны и могут быть записаны в виде

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)g(z,t) = -2\xi \cos kz e(z,t), \quad (1a)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{2M}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e(z,t) = -2\xi \cos kz g(z,t), \quad (1b)$$

где $g(z,t)$ и $e(z,t)$ — компоненты атомной волновой функции:

$$\psi(z,t) = g(z,t)\varphi_E e^{-iE_g t} + e(z,t)\varphi_e^{-iE_e t},$$

соответствующие основному и возбужденному внутренним состояниям соответственно, $\xi = dE/\hbar$ — частота Раби для бегущих волн, составляющих стоячую волну, d — дипольный матричный элемент оптического перехода, $k = \omega/c$.

Мы также предполагаем, что до взаимодействия атом находился в состоянии покоя или имел дискретное распределение импульса с шагом $\hbar k$:

$$g(z,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inkz}, \quad e(z,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{f}_n e^{indz}.$$

Тогда общие решения уравнений (1a), (1b) можно искать в виде

$$g(z,t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} i^m g_m(n,t) e^{i(m+n)kz - i(m+n)^2 \omega_r t},$$

$$e(z,t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} i^m e_m(n,t) e^{i(m+n)kz - i(m+n)^2 \omega_r t}, \quad (2)$$

где m и n — число импульсов фотонов, приобретенных соответственно при дифракции на стоячей волне и

существовавших в исходном состоянии, $\omega_r = \hbar k^2/2M$ — частота отдачи. Тогда уравнение Шредингера дает следующую систему дифференциальных уравнений для волновых функций, входящих в разложение (2):

$$\frac{dg_m(n,t)}{dt} = \xi e_{m-1}(n,t) e^{i(2m+2n-1)\omega_r t} - \xi e_{m+1}(n,t) e^{i(2m+2n+1)\omega_r t}, \quad (3a)$$

$$\frac{de_m(n,t)}{dt} = \xi g_{m-1}(n,t) e^{i(2m+2n-1)\omega_r t} - \xi g_{m+1}(n,t) e^{i(2m+2n+1)\omega_r t}. \quad (3b)$$

Замена $t \rightarrow t + 2\pi/\omega$ не меняет уравнений, т.е. искомые решения могут быть периодическими с периодом $T = 2\pi/\omega_r$.

Из-за зависящих от времени экспоненциальных коэффициентов рекуррентная система (3a), (3b) не имеет точных аналитических решений. Известное приближение Рамана–Ната [18–20] соответствует замене коэффициентов на единицу, т.е. при $(2m+2n\pm 1)\omega t \ll 1$, иногда называемое приближением коротких времен взаимодействия. Принимаем здесь более слабое ограничение на время взаимодействия: $\omega_r t \ll 1$. Тогда приближенные решения можно записать в виде

$$g_m(n,t) = f_n \frac{1 + (-1)^m}{2} e^{i2(m+n)\omega_r t} \times J_m\left(\frac{\xi}{\omega_r(m+n)} \sin(2\omega_r(m+n)t)\right), \quad (4a)$$

$$e_m(n,t) = f_n \frac{1 - (-1)^m}{2} e^{i2(m+n)\omega_r t} \times J_m\left(\frac{\xi}{\omega_r(m+n)} \sin(2\omega_r(m+n)t)\right), \quad (4b)$$

где предполагается, что атом до взаимодействия находился в основном состоянии, а $J_m(x)$ — функция Бесселя. Отметим, что решение имеет период $T = 2\pi/\omega_r$. И, наконец, приняв выполнение условия нормировки

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (|g_m(n,t)|^2 + |e_m(n,t)|^2) = 1$$

за показатель корректности приближения, можно легко убедиться, что применимость формул (4a), (4b) весьма надежна в пределах $\xi t \leq 27$.

Теперь мы можем переписать выражения (2) в более компактном виде:

$$g(z,t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i(t) e^{ilkz - i^2 \omega_r t},$$

$$e(z,t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e_i(t) e^{ilkz - i^2 \omega_r t}, \quad (5)$$

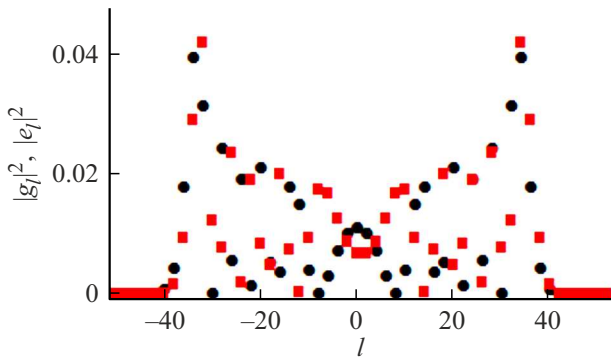


Рис. 1. Характерный вид распределения вероятностей импульсных состояний для основного (черные кружки) и возбужденного (красные квадраты) внутренних состояний атома, генерируемых полем стоячей волны.

где функции

$$g_1(t) = e^{i2l\omega_r t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{\frac{l-s}{2}} f_{\frac{l+s}{2}} \frac{1 + (-1)^{\frac{l-s}{2}}}{2} \times J_{\frac{l-s}{2}} \left(\frac{\xi}{\omega_r l} \sin(2\omega_r l t) \right),$$

$$e_1(t) = e^{i2l\omega_r t} \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{\frac{l-s}{2}} f_{\frac{l+s}{2}} \frac{1 - (-1)^{\frac{l-s}{2}}}{2} \times J_{\frac{l-s}{2}} \left(\frac{\xi}{\omega_r l} \sin(2\omega_r l t) \right)$$

являются амплитудами вероятности l -фотонных импульсных состояний. Они показаны на рис. 1 (при $\xi = 1.8 \cdot 10^9$ Hz, $t = 10$ ns). Как видно, количество импульсных состояний и примерно одинаковый характер их распределения вполне достаточны для выбора оптимальной ситуации для последующей реализации и регистрации интерференции волн атомной материи.

2. Образование асимметрии в импульсном распределении атома

Сразу после генерации импульсных состояний (5) атом может некоторое время находиться в свободном движении, в течение которого

$$g(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(t_1) e^{ilkz - i^2 \omega_r t},$$

$$e(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t_1) e^{ilkz - i^2 \omega_r t}, \quad (6)$$

где t_1 — время взаимодействия атома со стоячей волной. Далее (с момента $t_2 \geq t_1$) взаимодействие атома продолжается с одной из встречных волн (создающих стоячую волну). Оно попарно смешивает импульсные

состояния с основного и возбужденного уровней атома, отличающиеся на один фотонный импульс, и таким образом осуществляет интерференцию этих волн материи. В результате амплитуды состояний импульса в волновой функции

$$g(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(t) e^{ilkz},$$

$$e(z, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e_l(t) e^{ilkz} \quad (7)$$

представляются следующими выражениями:

$$g_l(t) = c_{l,1} e^{-i\lambda_{l,1}\omega_r(t-t_2)} + c_{l,2} e^{-i\lambda_{l,2}\omega_r(t-t_2)},$$

$$e_l(t) = d_{l,1} e^{-i\mu_{l,1}\omega_r(t-t_2)} + d_{l,2} e^{-i\mu_{l,2}\omega_r(t-t_2)}, \quad (8)$$

где

$$c_{l,1} = -\frac{\xi^* e_{l+1}(t_2) + (\lambda_{l,2} - l^2) g_l(t_2)}{\lambda_{l,1} - \lambda_{l,2}},$$

$$c_{l,2} = \frac{\xi^* e_{l+1}(t_2) + (\lambda_{l,1} - l^2) g_l(t_2)}{\lambda_{l,1} - \lambda_{l,2}}, \quad (9)$$

$$d_{l,1} = -\frac{\xi g_{l-1}(t_2) + (\mu_{l,2} - l^2) e_l(t_2)}{\mu_{l,1} - \mu_{l,2}},$$

$$d_{l,2} = \frac{\xi g_{l-1}(t_2) + (\mu_{l,1} - l^2) e_l(t_2)}{\mu_{l,1} - \mu_{l,2}},$$

$$\lambda_{l,1(2)} = \frac{1}{2} + l + l^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} + l + l^2 + |\xi|^2},$$

$$\mu_{l,1(2)} = \frac{1}{2} - l + l^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4} + l + l^2 + |\xi|^2},$$

$$g_l(t_2) = e^{i2l\omega_r t_1 - il^2 \omega_r t_2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{\frac{l-s}{2}} f_{\frac{l+s}{2}} \times \frac{1 + (-1)^{\frac{l-s}{2}}}{2} J_{\frac{l-s}{2}} \left(\frac{\xi}{l} \sin(2\omega_r l t_1) \right),$$

$$e_l(t_2) = e^{i2l\omega_r t_1 - il^2 \omega_r t_2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^{\frac{l-s}{2}} f_{\frac{l+s}{2}} \times \frac{1 - (-1)^{\frac{l-s}{2}}}{2} J_{\frac{l-s}{2}} \left(\frac{\xi}{l} \sin(2\omega_r l t_1) \right)$$

и $\xi = \xi/\omega_r$. Формулы (7) и (8) (с соответствующими обозначениями) завершают описание генерации и интерференции волн материи, подлежащих измерению на выходе атомного интерферометра.

Следует отметить, что конечное импульсное распределение содержит два типа интерференции. Один из них присущ задаче рассеяния на периодическом потенциале и представлен суммой по состояниям импульса в выражении волновой функции (7). Другой является ключевым динамическим процессом в предлагаемом атомном интерферометре и представлен суммами двух членов в числителях (9), смешивая соответствующие импульсные состояния основного и возбужденного энергетических уровней атома.

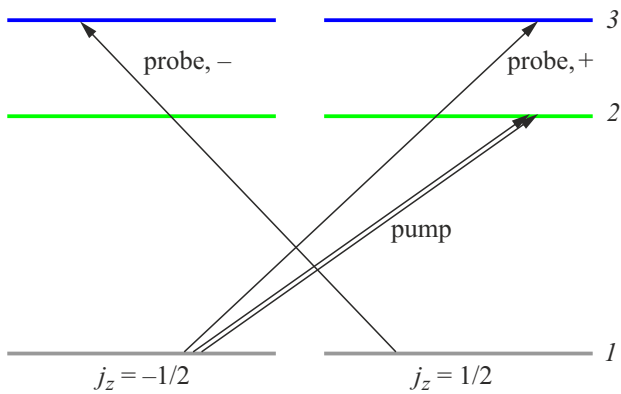


Рис. 2. Циркулярно поляризованное поле накачки вызывает оптическую анизотропию (в частности, гиротропию) в атомной среде (тонком слое охлажденных лазером атомов), вращая плоскость поляризации зондирующего излучения.

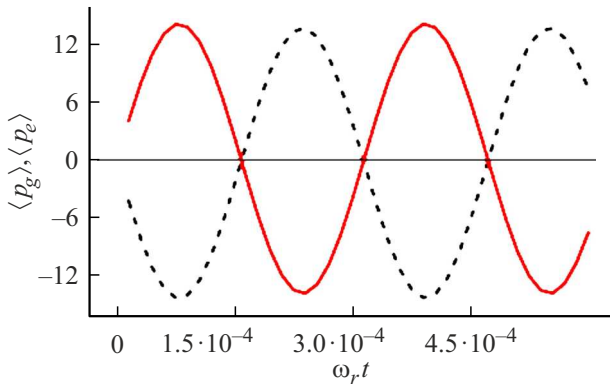


Рис. 3. Временная эволюция среднего атомного импульса на возбужденном (красная сплошная кривая) и основном (черная штриховая кривая) уровнях внутренней энергии атома. Импульсы представлены в единицах импульса отдачи фотона. Предполагается, что нет свободного распространения между стоячей и бегущей волнами накачки: $\omega_r t_2 = \omega_r t_1 = \pi 10^{-3}$ и $\xi = 10^4$.

Регистрация результата поляриметрическим методом

Для измерения состояния (7), запутанного между поступательными и внутренними степенями свободы атома, применим поляриметрический метод, в котором поле накачки стоячей и последующей бегущей волн поляризовано по кругу и связывает магнитные подуровни трехуровневого атома, как показано на рис. 2. Оно приблизительно выравнивает населенности двух подуровней, одновременно формируя на каждом из них дискретный набор импульсных состояний, содержащий исковую информацию об интерференции волн атомной материи. Зондирующее поле имеет линейную поляризацию, представленную в виде суммы двух обратно вращающихся круговых поляризаций.

Зондирующее поле имеет линейную поляризацию, представленную в виде суммы двух обратно вращающихся круговых поляризаций. Компонента пробного поля с поляризацией поля накачки активирует оптический переход $j_{1,z} = -1/2 \leftrightarrow j_{3,z} = -1/2$, а обратная поляризация активирует оптический переход $j_{1,z} = 1/2 \pm j_{3,z} = -1/2$, не возмущенный полем накачки (рис. 2). Таким образом, две круговые компоненты пробной волны в атомной среде распространяются с разными фазовыми скоростями, что приводит к повороту суммарной линейной поляризации. При этом импульсное распределение атома — носителя информации об интерференции волн материи — однозначно отображается за счет эффекта Доплера на спектре частот повернутой компоненты пробной волны.

Математика для расчета вращающейся компоненты зондирующего поля хорошо известна [17] и дает

$$E_{p,y}(z, t) = \frac{E_p(0, t)}{2} \left[\exp(-iq_+ F(\omega_p) k_p z) - \exp\left(-i \frac{q}{\Delta_p - k_p v_r / 2 + i\gamma} k_p z\right) \right], \quad (10)$$

где параметр неоднородного уширения γ вводится феноменологически, $q_{\pm} = \pi N_{\pm} |d|^2 / 3\hbar$, N_{\pm} — атомная плотность на $j_{1,z} = \pm 1/2$ подуровнях соответственно, $k_p = \omega_p / c$, ω_p — круговая частота пробной волны, d — приведенный матричный элемент оптического перехода, $\Delta_p = \omega_p - \omega_0$, $v_r = \hbar k / M$ — скорость однофотонной отдачи, а

$$F(\omega_p) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{|g_l(t_3)|^2}{\Delta_p - 2(l + 1/2)k_p v_r + i\gamma},$$

где t_3 — момент времени, когда бегущая волна накачки выключается.

Конечно, желательно оптимизировать и упростить природу выходного сигнала (10). Именно для этой цели в схему интерферометра была введена бегущая волна накачки, которая раскачивает импульсные распределения на основном и возбужденном уровнях атома в противоположных направлениях с большой амплитудой (рис. 3) [21], создавая своего рода кота Шредингера в импульсном пространстве. Поляризационная спектроскопия проецирует эти сильно асимметричные распределения импульса на спектральное распределение вращающегося компонента пробной волны. На рис. 4 показан результат для условий первого экстремума рис. 3.

Если окажется необходимым иметь некоторую предварительную информацию о системе, то спектр можно измерить сразу после встречных волн, когда распределение атомного импульса симметрично относительно начального (нулевого) значения.

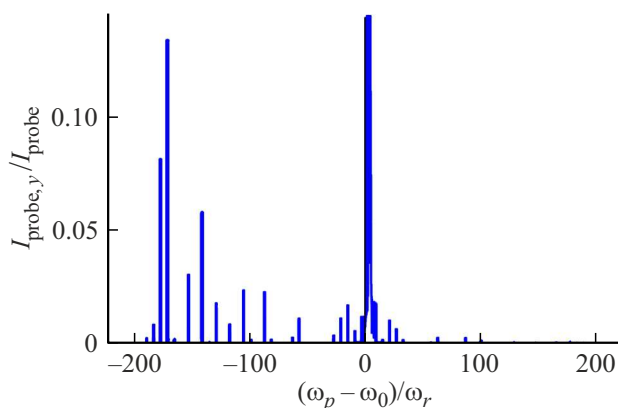


Рис. 4. Спектр повернутой поляризации зондирующего поля в момент первого максимума рис. 3. Асимметрия обусловлена оптическими переходами в бегущем поле накачки и служит индикатором интерференции материальных волн. Расстройка резонанса зондирующей волны по горизонтальной оси отложена в единицах частоты отдачи ω_r . Толщина атомарного образца равна $10\ \mu\text{m}$, а плотность равна $10^{10}\ \text{cm}^{-3}$, что являются характерными значениями для магнитооптических ловушек. Значения остальных параметров такие же, как на рис. 3.

Резюме и выводы

Предлагается новый тип атомного интерферометра, основанный на хорошо развитых направлениях атомной оптики и поляризационной спектроскопии. Динамическая стадия процесса предполагает генерацию атомных эквидистантных импульсных состояний за счет дифракции на резонансной стоячей электромагнитной волне. Дальнейшая интерференция за счет взаимодействия с одной из групп бегущих волн периодически раскачивает распределения импульса на основном и возбужденном уровнях внутренней энергии в противоположных направлениях. Измерительная стадия основана на поляризационной спектроскопии, в которой интерференционная картина атомных импульсных состояний воспроизводится в спектральном распределении повернутой компоненты зондирующего электромагнитного излучения.

Выявлены условия, при которых выходная информация атомного интерферометра оптимальна и информативна. Условия обычных специализированных лабораторий (например, плотность атомного облака $N = 10^{10}\ \text{cm}^{-3}$ и его длина $z = 10\ \mu\text{m}$, выбранные на рис. 4) более чем достаточны для успешной реализации предлагаемого атомного интерферометра.

Следует также добавить, что из-за колебательного характера изменения распределений импульсов пространственные смещения атомов оказываются меньше длины волны действующих оптических полей: атомные траектории все время остаются полностью перекрытыми. Это свидетельствует о компактности конструкции поляриметрического атомного интерферометра, а также о перспективности его портативного варианта.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке Республики Армения в рамках Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений Института физики ЕГУ.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Б.Я. Дубецкий, А.П. Казанцев, В.П. Чеботаев, В.П. Яковлев. *ЖЭТФ*, **89** (4), 1190 (1985). [B.Ya. Dubetskii, A.P. Kazantsev, V.P. Chebotaev, V.P. Yakovlev. *Sov. Phys. JETP*, **62** (4), 685 (1985)].
- [2] Б.Я. Дубецкий, А.П. Казанцев, В.П. Чеботаев, В.П. Яковлев. *Письма в ЖЭТФ*, **39** (11), 531 (1984). [B.Ya. Dubetskii, A.P. Kazantsev, V.P. Chebotaev, V.P. Yakovlev. *JETP Lett.*, **39** (11), 649 (1984)].
- [3] *Atom Interferometry*, ed. by P.R. Berman (Academic Press, San Diego, CA, USA, 1997). DOI: 10.1016/B978-0-12-092460-8.X5000-0
- [4] M. Kasevich, S. Chu. *Phys. Rev. Lett.*, **67** (2), 181 (1991). DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.181
- [5] A.D. Cronin, J. Schmiedmayer, D.E. Pritchard. *Rev. Mod. Phys.*, **81** (3), 1051 (2009). DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1051
- [6] F.A. Narducci, A.T. Black, J.H. Burke. *Adv. Phys. X*, **7** (1), 1946426 (2022). DOI: 10.1080/23746149.2021.1946426
- [7] L. Pezzé, A. Smerzi, M.K. Oberthaler, R. Schmied, P. Treutlein. *Rev. Mod. Phys.*, **90** (3), 035005 (2018). DOI: 10.1103/RevModPhys.90.035005
- [8] C.L. Degen, F. Reinhard, P. Cappellaro. *Rev. Mod. Phys.*, **89** (3), 035002 (2017). DOI: 10.1103/RevModPhys.89.035002
- [9] M. Abe, P. Adamson, M. Borcean, D. Bortoletto, K. Bridges, S.P. Carman, S. Chattopadhyay, J. Coleman, N.M. Curfman, K. DeRose et al. *Quant. Sci. Technol.*, **6** (4), 044003 (2021). DOI: 10.1088/2058-9565/abf719
- [10] M. Cadoret, E. de Mirandes, P. Clad'e, S. Guellati-Kh'elifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, F. Biraben. *Phys. Rev. Lett.*, **101** (23), 230801 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.230801
- [11] J. Rudolph, T. Wilkason, M. Nantel, H. Swan, C.M. Holland, Y. Jiang, B.E. Garber, S.P. Carman, J.M. Hogan. *Phys. Rev. Lett.*, **124** (8), 083604 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.083604
- [12] И. Фон Нейман. *Математические основы квантовой механики* (Наука, М., 1964).
- [13] H.M. Wiseman, G.J. Milburn. *Quantum measurement and control* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010). DOI: 10.1017/CBO9780511813948
- [14] М.Г. Иванов. *Как понимать квантовую механику* (НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, Институт компьютерных исследований, Москва—Ижевск, 2015).
- [15] C. Wieman, T.W. Hänsch. *Phys. Rev. Lett.*, **36** (20), 1170 (1976). DOI: 10.1103/PhysRevLett.36.1170
- [16] А.Ж. Мурадян, Л.С. Петросян. *Опт. и спектр.*, **65** (3), 605 (1988).
- [17] W. Demtroder. *Basic Concepts and Instrumentation* (Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, 1996), § 10.3. DOI: 10.1007/978-3-662-08260-7

-
- [18] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (Наука, М., 1970), пункт 12.2.7.
- [19] В.М. Арутюнян, А.Ж. Мурадян. ДАН Армянской ССР, **60** (5), 275 (1975).
- [20] R.J. Cook, A.F. Bernhardt. *Phys. Rev. A*, **18** (6), 2533 (1978). DOI: 10.1103/PhysRevA.18.2533
- [21] A.Zh. Muradyan, H.I. Haroutyunyan. *Phys. Rev. A*, **62** (1), 013401 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevA.62.013401