

Динамика перепутывания изолированного атома и двух атомов Джейнса—Каммингса

© А.Р. Багров, Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева,
443086 Самара, Россия
e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

Поступило в Редакцию 30 ноября 2024 г.

В окончательной редакции 30 ноября 2024 г.

Принято к публикации 30 ноября 2024 г.

Найдено точное решение модели, состоящей из трех идентичных двухуровневых атомов (кубитов), один из которых находится в свободном состоянии, а два других заперты в индивидуальных одномодовых резонаторах без потерь и резонансно взаимодействуют с выделенной модой своего резонатора. На основе точного решения проведен расчет отрицательностей пар кубитов и степени совпадения для двух начальных истинно перепутанных состояний кубитов W-типа и истинно перепутанного состояния GHZ-типа, а также тепловых состояний полей резонаторов. Исследовано влияние интенсивностей тепловых шумов резонаторов и начальных состояний кубитов на степень их перепутывания в процессе дальнейшей эволюции, а также на особенности проявления эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

Ключевые слова: кубиты, истинно перепутанные состояния W- и GHZ-типа, тепловые поля, перепутывание, парная отрицательность, степень совпадения, мгновенная смерть перепутывания.

DOI: 10.61011/JTF.2025.05.60275.433-24

Введение

Квантовые перепутанные состояния являются основным физическим ресурсом, используемым при квантовой обработке информации, в частности для физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций [1,2]. Квантовая электродинамика резонаторов (РКЭД), в которой изучается взаимодействие систем кубитов с квантовыми полями резонаторов в условиях, которые наиболее просто могут быть реализованы экспериментально, является приоритетным инструментом для исследований свойств перепутанных состояний многокубитных систем [3,4]. В последние годы в рамках РКЭД удалось экспериментально наблюдать перепутанные состояния кубитов различной физической природы, такие, как нейтральные атомы, ионы в магнитных ловушках, сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами, квантовые точки и примесные спины [5–10]. Теоретические исследования систем кубитов, взаимодействующих с выделенными модами резонаторов в рамках РКЭД, основаны на модели Джейнса—Каммингса (МДК) и ее обобщениях и расширениях (см. ссылки в [11]). МДК является простейшей полностью квантовой точно решаемой физической моделью, которая описывает взаимодействие естественного или искусственного двухуровневого атома (кубита) с одномодовым полем резонатора без потерь. В последние годы МДК была использована для описания широкого круга квантовых эффектов взаимодействия одиночного атома с квантовым электромагнитным полем. Для исследования более широкого спектра квантовых явлений, обусловленных взаимодействием кубитов с квантовыми полями резона-

торов, в последние годы были рассмотрены многочисленные обобщения и расширения МДК, в частности, различные версии многоатомной МДК. Использование перепутанных состояний для квантовых вычислений и коммуникаций предполагает необходимость выбора критериев количественной оценки степени перепутывания кубитов [12]. Хотя общие свойства перепутанных состояний достаточно подробно изучены, количественные критерии перепутывания кубитов до настоящего времени удалось ввести только для двухкубитных систем [13–15]. В случае многокубитных систем аналогичные критерии не удалось ввести до настоящего времени. Ненулевые значения используемых критериев перепутывания, введенных для многокубитных систем, свидетельствуют лишь о наличии перепутанности в системе, но не позволяют провести строгую количественную оценку степени перепутывания кубитов [16]. Трудности теоретического описания перепутанных состояний существенно возрастают при увеличении числа кубитов в системе. Поэтому в настоящее время особое внимание уделяется изучению динамики перепутывания трехкубитных систем. Интерес к таким системам обусловлен также возможностью использования трехкубитных моделей при теоретическом анализе динамики универсальных квантовых вентилях, манипулирующих трехкубитными квантовыми перепутанными состояниями [17–19]. Для выполнения произвольных вычислений в квантовом компьютере должен быть реализовать набор универсальных вентилях. В качестве такого набора можно выбрать, например, двухкубитные вентили, такие, как контролируемый-„НЕ“ (CNOT) [17], и однокубитные вращения. В качестве альтернативы можно использовать

трехкубитные вентили, такие, как вентили Тоффоли или Фредкина [18,19]. Трехкубитные вентили также важны в таких приложениях, как, например, квантовая коррекция ошибок [20]. Трехкубитные квантовые перепутанные состояния были экспериментально реализованы в серии опытов в системах сверхпроводящих кубитов, ионов в ловушках и примесных спинов [21–27].

В последнее время было выполнено большое количество теоретических исследований, посвященных изучению динамики различных версий трехатомных МДК. Авторы статей [28–35] рассматривали трехчастичную модель, состоящую из трех одинаковых двухуровневых атомов, каждый из которых заперт в индивидуальном одномодовом резонаторе. При этом каждый атом резонансно взаимодействует с полем собственного резонатора посредством однофотонных процессов. Авторы рассмотрели динамику такой тройной МДК для различных начальных коррелированных состояний кубитов и полей резонаторов. Другая версия трехатомной МДК рассматривалась в работах [36–44]. Авторы указанных работ рассмотрели динамику перепутывания трех одинаковых двухуровневых атомов, взаимодействующих с выделенной модой общего квантованного поля резонатора для фоковских, когерентных и тепловых состояний поля резонатора, а также для сепарабельных, бисепарабельных и истинно перепутанных состояний атомов. Наконец, в работах [45–48] рассматривалась трехкубитная система, состоящая из изолированного атома и двух атомов, запертых в одномодовом оптическом резонаторе. Авторы исследовали динамику перепутывания атомов для различных начальных состояний поля резонатора и перепутанных состояний атомов.

В настоящей работе мы исследовали точную динамику перепутывания трех идентичных трехуровневых атомов в рамках новой трехатомной модели, состоящей из изолированного атома и двух атомов, каждый из которых захвачен в индивидуальном оптическом или микроволновом резонаторе и резонансно взаимодействуют с одномодовым полем такого индивидуального резонатора посредством однофотонных переходов. Нами найдено точное выражение для оператора эволюции рассматриваемой трехатомной модели. На основе точного решения нами исследована динамика рассматриваемой модели для начальных перепутанных состояний атомов W- и GHZ-типа, а в качестве начальных состояний полей резонатора — тепловые состояния. В качестве критерия атомного перепутывания в случае начальных W-состояний использовалась парная отрицательность и степень совпадения, а в случае GHZ-состояний — степень совпадения. Выбор тепловых состояний полей резонаторов был обусловлен следующим обстоятельством. Для управления состояниями естественных и искусственных атомов (кубитов) используют электромагнитные поля резонаторов, при этом в резонаторах всегда присутствуют тепловые фотоны. Температуры резонаторов меняются от нК в случае ионов в магнитных

ловушках до комнатных температур в случае азото-замещенных вакансий в алмазе, что означает широкий разброс интенсивностей тепловых полей таких резонаторов. За счет взаимодействия атомов с тепловыми полями резонаторов возможны осцилляции Раби параметра перепутывания атомов, а также мгновенная смерть перепутывания атомов, т.е. исчезновение перепутывания на временах, меньших времени декогеренции. Наличие осцилляций Раби и разрушение начального перепутывания могут приводить к ошибкам при считывании информации о состоянии кубитов. Поэтому изучение динамики теплового перепутывания атомов в трехатомных моделях представляет несомненный интерес для квантовой информатики.

1. Модель и ее точное решение

Опишем интересующую нас модель. Рассмотрим три идентичных двухуровневых атома (кубита) A , B и C . Кубит A свободно перемещается вне резонаторов, а два других кубита B , C находятся в двух независимых резонаторах и каждый резонансно взаимодействует с одномодовым квантованным полем своего идеального резонатора. Гамильтониан такой системы в дипольном приближении и приближении вращающейся волны запишется в виде

$$\hat{H}_{int} = \hbar\gamma(\hat{\sigma}_B^+ \hat{b} + \hat{\sigma}_B^- \hat{b}^+) + \hbar\gamma(\hat{\sigma}_C^+ \hat{c} + \hat{\sigma}_C^- \hat{c}^+), \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |- \rangle_{ii}\langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i -м кубите, $\hat{b}(\hat{c})$ и $\hat{b}^+(\hat{c}^+)$ — операторы уничтожения и рождения фотонов $n_B(n_C)$ в моде резонатора. При записе гамильтониана (1) мы предположили, что константы взаимодействия кубитов B и C с резонаторами равны $\gamma_B = \gamma_C = \gamma$.

Чтобы найти вектор состояния модели, описываемой гамильтонианом (1), в последующие моменты времени t удобно квалифицировать все начальные состояния системы, введя новый параметр $N = N_B + N_C$. Здесь

$$N_B(n_B, n_{q_B}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n_{q_B} = n_B = 0, \\ 1, & \text{если } n_{q_B} = 0, n_B \geq 1 \text{ или } n_{q_B} = 1, n_B \geq 0, \end{cases}$$

$$N_C(n_C, n_{q_C}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n_{q_C} = n_C = 0, \\ 1, & \text{если } n_{q_C} = 0, n_C \geq 1 \text{ или } n_{q_C} = 1, n_C \geq 0, \end{cases}$$

где n_{q_B} и n_{q_C} — число возбужденных кубитов в резонаторах B и C соответственно, n_B и n_C — число фотонов в моде резонатора B и C соответственно. Таким образом, параметр N может принимать только следующие значения: 0, 1 и 2.

В случае $N = 2$ эволюция вектора состояния происходит в 4-мерном гильбертовом пространстве. Существует два набора базисных векторов. Различия между ними обусловлены состоянием атома A . Для возбужденного атома A базисные векторы можно записать в виде:

$$|+A, +B, +C, n_B, n_C\rangle, |+A, +B, -C, n_B, n_C + 1\rangle,$$

$$|+A, -B, +C, n_B + 1, n_C\rangle, | +A, -B, -C, n_B + 1, n_C + 1\rangle, \quad (2)$$

а для основного состояния атома A будет удобнее записать базисные векторы в виде:

$$|-A, +B, +C, n_B, n_C\rangle, |-A, +B, -C, n_B, n_C + 1\rangle, \\ |-A, -B, +C, n_B + 1, n_C\rangle, |-A, -B, -C, n_B + 1, n_C + 1\rangle. \quad (3)$$

Если выполняется условие $N = 1$, то эволюция вектора состояния рассматриваемой системы происходит в 2-мерном гильбертовом пространстве. Существует четыре набора базисных векторов. Два набора базисных векторов возникают из-за кубита A , а другие два набора возникают из-за эволюции вектора состояния либо кубита B , либо кубита C . Далее удобно представить эти наборы в виде:

$$|+A, +B, -C, n_B, 0\rangle, | +A, -B, -C, n_B + 1, 0\rangle; \\ |+A, -B, +C, 0, n_C\rangle, | +A, -B, -C, 0, n_C + 1\rangle, \quad (4)$$

$$|-A, +B, -C, n_B, 0\rangle, |-A, -B, -C, n_B + 1, 0\rangle; \\ |-A, -B, +C, 0, n_C\rangle, |-A, -B, -C, 0, n_C + 1\rangle. \quad (5)$$

В случае $N = 0$ эволюция векторов отсутствует. Соответствующих два базисных набора:

$$|+A, -B, -C, 0, 0\rangle, \quad (6)$$

$$|-A, -B, -C, 0, 0\rangle. \quad (7)$$

Для случая $N = 2$ нами был найден оператор эволюции $\hat{U}$ в базисе (2), (3):

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & 0 & U_{15} & 0 & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & 0 & U_{25} & 0 & 0 & 0 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & U_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & 0 & U_{46} & U_{47} & U_{48} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & 0 & U_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{64} & 0 & U_{66} & U_{67} & U_{68} \\ 0 & 0 & 0 & U_{74} & 0 & U_{76} & U_{77} & U_{78} \\ 0 & 0 & 0 & U_{84} & 0 & U_{86} & U_{87} & U_{88} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} |+A, +B, +C, n_B, n_C\rangle \\ |+A, +B, -C, n_B, n_C + 1\rangle \\ |+A, -B, +C, n_B + 1, n_C\rangle \\ |-A, +B, +C, n_B, n_C\rangle \\ |+A, -B, -C, n_B + 1, n_C + 1\rangle \\ |-A, +B, -C, n_B, n_C + 1\rangle \\ |-A, -B, +C, n_B + 1, n_C\rangle \\ |-A, -B, -C, n_B + 1, n_C + 1\rangle \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где элементы оператора эволюции $U_{ij} \equiv U_{ij}(n_B, n_C, t)$ записываются в виде

$$U_{11} = \begin{cases} \cos^2[\gamma t \sqrt{n_B + 1}], & \text{if } n_B = n_C, \\ \frac{1}{2}[\cos(t\theta_1) + \cos(t\theta_2)], & \text{in other cases,} \end{cases}$$

$$U_{21} =$$

$$\begin{cases} -i \cos[\gamma t \sqrt{n_B + 1}] \sin[\gamma t \sqrt{n_C + 1}], & \text{if } n_B = n_C, \\ -\frac{i[\sqrt{(n_B + 1)}(\sin(t\theta_2)\theta_1 - \sin(t\theta_1)\theta_2) + \sqrt{(n_C + 1)}(\sin(t\theta_2)\theta_1 + \sin(t\theta_1)\theta_2)]}{2\gamma \sqrt{(n_C - n_B)^2}}, & \text{in other cases,} \end{cases}$$

$$U_{31} =$$

$$\begin{cases} -i \cos[\gamma t \sqrt{n_C + 1}] \sin[\gamma t \sqrt{n_B + 1}], & \text{if } n_B = n_C, \\ -\frac{i[\sqrt{(n_C + 1)}(\sin(t\theta_2)\theta_1 - \sin(t\theta_1)\theta_2) + \sqrt{(n_B + 1)}(\sin(t\theta_2)\theta_1 + \sin(t\theta_1)\theta_2)]}{2\gamma \sqrt{(n_C - n_B)^2}}, & \text{in other cases,} \end{cases}$$

$$U_{51} = \begin{cases} -\sin^2[\gamma t \sqrt{n_B + 1}], & \text{if } n_B = n_C, \\ \frac{1}{2}[\cos(t\theta_2) - \cos(t\theta_1)], & \text{in other cases,} \end{cases}$$

$$U_{11} = U_{22} = U_{33} = U_{44} = U_{55} = U_{66} = U_{77} = U_{88},$$

$$U_{21} = U_{12} = U_{53} = U_{35} = U_{64} = U_{46} = U_{87} = U_{78},$$

$$U_{31} = U_{13} = U_{52} = U_{25} = U_{74} = U_{47} = U_{86} = U_{68},$$

$$U_{51} = U_{15} = U_{32} = U_{23} = U_{84} = U_{48} = U_{76} = U_{67},$$

где

$$\theta_1 = \gamma \sqrt{(\sqrt{n_C + 1} - \sqrt{n_B + 1})^2},$$

$$\theta_2 = \gamma \sqrt{(\sqrt{n_C + 1} + \sqrt{n_B + 1})^2}.$$

Для случая $N = 1$ нами был найден оператор эволюции $\hat{S}$ в базисе (4), (5):

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{65} & S_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{77} & S_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{87} & S_{88} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} |+A, +B, -C, n_B, 0\rangle \\ |+A, -B, -C, n_B + 1, 0\rangle \\ |+A, -B, +C, 0, n_C\rangle \\ |+A, -B, -C, 0, n_C + 1\rangle \\ |-A, +B, -C, n_B, 0\rangle \\ |-A, -B, -C, n_B + 1, 0\rangle \\ |-A, -B, +C, 0, n_C\rangle \\ |-A, -B, -C, 0, n_C + 1\rangle \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где элементы оператора эволюции $\hat{S}$ записываются в виде

$$S_{11}(n_B, t) = S_{22}(n_B, t) = S_{55}(n_B, t)$$

$$= S_{66}(n_B, t) = \cos(\gamma t \sqrt{n_B + 1}),$$

$$S_{21}(n_B, t) = S_{12}(n_B, t) = S_{65}(n_B, t)$$

$$= S_{56}(n_B, t) = -i \sin(\gamma t \sqrt{n_B + 1}),$$

$$\begin{aligned}
S_{33}(n_C, t) &= S_{44}(n_C, t) = S_{77}(n_C, t) \\
&= S_{88}(n_C, t) = \cos(\gamma t \sqrt{n_C + 1}), \\
S_{43}(n_C, t) &= S_{34}(n_C, t) = S_{87}(n_C, t) \\
&= S_{78}(n_C, t) = -i \sin(\gamma t \sqrt{n_C + 1}).
\end{aligned}$$

В качестве начальных состояний подсистемы кубитов выберем состояния W-типа:

$$\begin{aligned}
|W_1(0)\rangle_{ABC} &= \cos \theta |+_A, +_B, -_C\rangle + \sin \theta \sin \phi |+_A, -_B, +_C\rangle \\
&\quad + \sin \theta \cos \phi |-_A, +_B, +_C\rangle,
\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
|W_2(0)\rangle_{ABC} &= \cos \theta |-_A, -_B, +_C\rangle + \sin \theta \sin \phi |-_A, +_B, -_C\rangle \\
&\quad + \sin \theta \cos \phi |+_A, -_B, -_C\rangle,
\end{aligned} \quad (11)$$

или состояния GHZ-типа:

$$|G_1(0)\rangle_{ABC} = \cos \phi |+_A, +_B, +_C\rangle + \sin \phi |-_A, -_B, -_C\rangle. \quad (12)$$

Здесь θ, ϕ, ϕ — параметры, определяющие начальную степень перепутанности кубитов A, B и C . В качестве начального состояния поля резонаторов выберем одномодовое тепловое поле, матрица плотности которого выражается формулой:

$$\Xi_{F_{n_B}}(0) = \sum_{n_B} p_{n_B} |n_B\rangle \langle n_B|, \quad \Xi_{F_{n_C}}(0) = \sum_{n_C} p_{n_C} |n_C\rangle \langle n_C|. \quad (13)$$

Здесь статистические веса p_{n_B} и p_{n_C} выражаются следующей формулой:

$$p_{n_B} = \frac{\bar{n}_B^{n_B}}{(\bar{n}_B + 1)^{n_B + 1}}, \quad p_{n_C} = \frac{\bar{n}_C^{n_C}}{(\bar{n}_C + 1)^{n_C + 1}},$$

где $\bar{n}_B$ и $\bar{n}_C$ — среднее число тепловых фотонов в резонаторах B и C соответственно, которое определяется стандартной формулой Бозе–Эйнштейна:

$$\bar{n}_{B(C)} = (\exp[\hbar\omega/k_B T_{B(C)}] - 1)^{-1}.$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, $T_{B(C)}$ — температура резонатора $B(C)$.

Теперь благодаря операторам эволюции (8) и (9) можно найти волновую функцию в момент времени t для любого начального состояния кубитов для фоковского состояния полей резонаторов с помощью уравнения $|\psi_{n_B n_C}(t)\rangle = \hat{U}|\psi(0)\rangle_{ABC}|n_B\rangle|n_C\rangle$, где $|\psi_{n_B n_C}(t)\rangle$ — волновая функция, описывающая состояние системы, которая включает кубиты и моду поля резонаторов B и C , в произвольный момент времени t .

Для расчета различных известных критериев перепутывания систем трех кубитов нам необходимо будет рассчитать редуцированные двух- и трехкубитные матрицы плотности полной системы. Для реализации поставленной задачи в качестве первого шага нужно вычислить матрицу плотности полной системы „три

кубита + мода поля резонатора B + мода поля резонатора C “. Используя явный вид временных волновых функций $|\psi_{n_B n_C}(t)\rangle$, мы можем построить матрицу плотности полной системы

$$\Xi_{ABCF_{n_B}F_{n_C}} = \sum_{n_B=0}^{\infty} \sum_{n_C=0}^{\infty} p_{n_B} p_{n_C} |\psi_{n_B n_C}(t)\rangle \langle \psi_{n_B n_C}(t)|. \quad (14)$$

Для состояний (10)–(12) формула (14) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\Xi_{ABCF_{n_B}F_{n_C}} &= \sum_{n_B=0}^{\infty} \sum_{n_C=0}^{\infty} p_{n_B} p_{n_C} |\psi_{n_B n_C}(t)\rangle \langle \psi_{n_B n_C}(t)| \\
&= p_{0_B} p_{0_C} |\psi_{0_B 0_C}(t)\rangle \langle \psi_{0_B 0_C}(t)| + \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} p_{0_B} |\psi_{0_B n_C}(t)\rangle \langle \psi_{0_B n_C}(t)| \\
&\quad \times \langle \psi_{0_B n_C}(t)| + \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} p_{0_C} |\psi_{n_B 0_C}(t)\rangle \langle \psi_{n_B 0_C}(t)| \\
&\quad + \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} |\psi_{n_B n_C}(t)\rangle \langle \psi_{n_B n_C}(t)|.
\end{aligned}$$

Чтобы получить трехкубитную матрицу плотности Ξ_{ABC} , достаточно взять след по переменным поля резонатора B и резонатора C :

$$\Xi_{ABC}(t) = \text{Tr}_{F_{n_B}} \text{Tr}_{n_C} \Xi_{ABCF_{n_B}F_{n_C}}. \quad (15)$$

Для вычисления двухкубитной матрицы плотности необходимо будет усреднить трехкубитную матрицу плотности (15) по переменным третьего кубита, т. е.

$$\Xi_{ij}(t) = \text{Tr}_k \rho_{ABC}(t)(i, j, k = A, B, C; i \neq j, j \neq k, i \neq k). \quad (16)$$

2. Вычисление критерия отрицательности и степени совпадения

При изучении перепутывания кубитов в рассматриваемой модели для истинно перепутанных состояний W-типа в качестве количественного критерия перепутывания мы будем использовать критерий отрицательности пар кубитов. Мы определяем отрицательность для кубитов i и j стандартным образом [13–15]:

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_k (\lambda_{ij})_k^-, \quad (17)$$

где λ_{ij} — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности

$\Xi_{ij}^T(t)$, которая имеет для W-состояний (10), (11) следующий вид:

$$\Xi_{ij}^T(t) = \begin{pmatrix} \Xi_{11}^{ij} & 0 & 0 & \Xi_{32}^{ij} \\ 0 & \Xi_{22}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_{33}^{ij} & 0 \\ \Xi_{23}^{ij} & 0 & 0 & \Xi_{44}^{ij} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |+, +\rangle \\ |+, -\rangle \\ |-, +\rangle \\ |-, -\rangle \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда формула для критерия отрицательности (17) запишется в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\Xi_{44}^{ij} - \Xi_{11}^{ij})^2 + 4|\Xi_{23}^{ij}|^2 - \Xi_{11}^{ij} - \Xi_{44}^{ij}}. \quad (19)$$

Запишем элементы двухкубитной матрицы плотности (18) Ξ_{AB} , которые используются в формуле (19) для вычисления отрицательности, для состояния (10):

$$\begin{aligned} \Xi_{11}^{AB} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\cos^2 \theta (|U_{12}(n_B, n_C - 1, t)|^2 \right. \\ &\quad + |U_{22}(n_B, n_C - 1, t)|^2) + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi (|U_{13}(n_B - 1, n_C, t)|^2 \\ &\quad + |U_{23}(n_B - 1, n_C, t)|^2) \Big] + \cos^2 \theta p_{0_B} \\ &\quad \times \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[|U_{12}(0, n_C - 1, t)|^2 + |U_{22}(0, n_C - 1, t)|^2 \right] \\ &\quad + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\cos^2 \theta |S_{11}(n_B, t)|^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \right. \\ &\quad \times \varphi (|U_{13}(n_B - 1, 0, t)|^2 + |U_{23}(n_B - 1, 0, t)|^2) \Big] \\ &\quad + p_{0_B} p_{0_C} \cos^2 \theta |S_{11}(0, t)|^2, \\ \Xi_{23}^{AB} &= \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \left\{ \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{33}(n_B - 1, n_C, t) \right. \right. \\ &\quad \times U_{44}^*(n_B, n_C, t) + U_{53}(n_B - 1, n_C, t) U_{64}^*(n_B, n_C, t) \Big] + p_{0_B} \\ &\quad \times \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[S_{33}(n_C, t) U_{44}^*(0, n_C, t) + S_{43}(n_C, t) U_{64}^*(0, n_C, t) \right] \\ &\quad + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{33}(n_B - 1, 0, t) U_{44}^*(n_B, 0, t) \right. \\ &\quad + U_{53}(n_B - 1, 0, t) U_{64}^*(n_B, 0, t) \Big] + p_{0_B} p_{0_C} \left[S_{33}(0, t) \right. \\ &\quad \times U_{44}^*(0, 0, t) + S_{43}(0, t) U_{64}^*(0, 0, t) \Big] \Big\}, \\ \Xi_{44}^{AB} &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sum_{n_C=0}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=0}^{\infty} p_{n_B} \left[|U_{74}(n_B, n_C, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + |U_{84}(n_B, n_C, t)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Элементы двухкубитной матрицы плотности (18) Ξ_{BC} , которые используются в формуле (19) для вычисления отрицательности, для состояния (10):

$$\begin{aligned} \Xi_{11}^{BC} &= \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[\cos^2 \theta |U_{12}(n_B, n_C - 1, t)|^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |U_{13}(n_B - 1, n_C, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \\ &\quad \times \varphi |U_{44}(n_B, n_C, t)|^2 \Big] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[\cos^2 \theta |U_{12}(0, n_C - 1, t)|^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{44}(0, n_C, t)|^2 \Big] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \right. \\ &\quad \times \varphi |U_{13}(n_B - 1, 0, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{44}(n_B, 0, t)|^2 \Big] \\ &\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi p_{0_B} p_{0_C} |U_{44}(0, 0, t)|^2, \\ \Xi_{23}^{BC} &= \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \left\{ \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{22}(n_B, n_C - 1, t) \right. \right. \\ &\quad \times U_{33}^*(n_B - 1, n_C, t) \Big] + \sin \theta p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[U_{22}(0, n_C - 1, t) \right. \\ &\quad \times S_{33}^*(n_C, t) \Big] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[S_{11}(n_B, t) U_{33}^*(n_B - 1, 0, t) \right. \\ &\quad \left. + p_{0_B} p_{0_C} S_{11}(0, t) S_{33}^*(0, t) \right] \Big\}, \\ \Xi_{44}^{BC} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\cos^2 \theta |U_{52}(n_B, n_C - 1, t)|^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |U_{53}(n_B - 1, n_C, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \\ &\quad \times \varphi |U_{84}(n_B, n_C, t)|^2 \Big] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{43}(n_C, t)|^2 \right. \\ &\quad + \cos^2 \theta |U_{52}(0, n_C - 1, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{84}(0, n_C, t)|^2 \Big] \\ &\quad + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\cos^2 \theta |S_{21}(n_B, t)|^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \right. \\ &\quad \times \varphi |U_{53}(n_B - 1, 0, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{84}(n_B, 0, t)|^2 \Big] \\ &\quad + p_{0_B} p_{0_C} \left[\cos^2 \theta |S_{21}(0, t)|^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{43}(0, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{84}(0, 0, t)|^2 \right]. \end{aligned}$$

Запишем элементы двухкубитной матрицы плотности (18) Ξ_{AB} , которые используются в формуле (19) для

вычисления отрицательности, для состояния (11):

$$\begin{aligned}\Xi_{11}^{AB} &= \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[|U_{15}(n_B-1, n_C-1, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + |U_{25}(n_B-1, n_C-1, t)|^2 \right] + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi p_{0_C} \\ &\quad \times \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} |S_{12}(n_B-1, t)|^2, \\ \Xi_{33}^{AB} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left(|U_{46}(n_B, n_C-1, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |U_{66}(n_B, n_C-1, t)|^2 \right) + \cos^2 \theta \left(|U_{47}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |U_{67}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right) \right] + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \\ &\quad \times \left[|U_{46}(0, n_C-1, t)|^2 + |U_{66}(0, n_C-1, t)|^2 \right] \\ &\quad + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{55}(n_B, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta \left(|U_{47}(n_B-1, 0, t)|^2 + |U_{67}(n_B-1, 0, t)|^2 \right) \right] \\ &\quad + p_{0_B} p_{0_C} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{55}(0, t)|^2, \\ \Xi_{44}^{AB} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left(|U_{76}(n_B, n_C-1, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |U_{86}(n_B, n_C-1, t)|^2 \right) + \cos^2 \theta \left(|U_{77}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |U_{87}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right) \right] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[\cos^2 \theta \left(|S_{77}(n_C, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |S_{87}(n_C, t)|^2 \right) + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \left(|U_{76}(0, n_C-1, t)|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |U_{86}(0, n_C-1, t)|^2 \right) \right] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{65}(n_B, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta \left(|U_{77}(n_B-1, 0, t)|^2 + |U_{87}(n_B-1, 0, t)|^2 \right) \right] \\ &\quad + p_{0_B} p_{0_C} \left[\sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{65}(0, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta \left(|S_{77}(0, t)|^2 + |S_{87}(0, t)|^2 \right) \right].\end{aligned}$$

Элементы двухкубитной матрицы плотности (18) Ξ_{BC} , которые используются в формуле (19) для вычисления

отрицательности, для начального состояния (11):

$$\begin{aligned}\Xi_{11} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{15}(n_B-1, n_C-1, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |U_{46}(n_B, n_C-1, t)|^2 + \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. \times |U_{47}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right] + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi p_{0_B} \\ &\quad \times \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[|U_{46}(0, n_C-1, t)|^2 \right] + \cos^2 \theta p_{0_C} \\ &\quad \times \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[|U_{47}(n_B-1, 0, t)|^2 \right], \\ \Xi_{23} &= \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \left\{ \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{66}(n_B, n_C-1, t) \right. \right. \\ &\quad \left. \times U_{77}^*(n_B-1, n_C, t) \right] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[U_{66}(0, n_C-1, t) \right. \\ &\quad \left. \times S_{77}^*(n_C, t) \right] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[S_{55}(n_B, t) U_{77}^*(n_B-1, 0, t) \right] \\ &\quad \left. + p_{0_B} p_{0_C} S_{55}(0, t) S_{77}^*(0, t) \right\}, \\ \Xi_{44} &= \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \cos^2 \varphi |U_{55}(n_B-1, n_C-1, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |U_{86}(n_B, n_C-1, t)|^2 + \cos^2 \theta \right. \\ &\quad \left. \times |U_{87}(n_B-1, n_C, t)|^2 \right] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[\cos^2 \theta |S_{87}(n_C, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi |S_{44}(n_C-1, t)|^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \right. \\ &\quad \left. \times |U_{86}(0, n_C-1, t)|^2 \right] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[\sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. \times |S_{22}(n_B-1, t)|^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{65}(n_B, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \theta |U_{87}(n_B-1, 0, t)|^2 \right] + p_{0_B} p_{0_C} \left[\cos^2 \theta |S_{87}(0, t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi |S_{65}(0, t)|^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right].\end{aligned}$$

В случае GHZ-состояний критерий отрицательности малоинформативен, поскольку после усреднения трехкубитной матрицы плотности $\Xi_{ABC}(t)$ по переменным одного из кубитов два оставшихся кубита оказываются перепутанными. Поэтому в настоящей работе мы, в качестве количественного критерия перепутывания кубитов, используем степень совпадения (fidelity) текущего состояния кубитов в момент времени t и их начального GHZ-состояния. В случае теплового поля

резонатора состояние кубитов в произвольный момент времени является смешанным. Количественная мера степени совпадения для смешанных состояний кубитов определяется следующей формулой [49]:

$$F(\Xi, \Xi') = \left(\text{tr} \sqrt{\Xi^{1/2} \Xi' \Xi^{1/2}} \right)^2. \quad (20)$$

Здесь Ξ — начальная матрица плотности системы и Ξ' — матрица плотности кубитов в последующие моменты времени $t > 0$. Выражение (20) сильно упрощается если предположить, что в начальный момент времени система находится в чистом состоянии ($\Xi = |\psi\rangle\langle\psi|$):

$$F(\Xi, \Xi') = \left(\text{tr} \sqrt{|\psi\rangle\langle\psi| \Xi' |\psi\rangle\langle\psi|} \right)^2 = \langle\psi| \Xi' |\psi\rangle = \text{tr}(\Xi \Xi'). \quad (21)$$

Для GHZ-состояния вида (12) матрица плотности $\Xi'_{ABC}(t)$ в последующие моменты времени имеют следующий вид:

$$\Xi'_{ABC}(t) = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{18} \\ 0 & \Xi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{77} & 0 \\ \Xi_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Xi_{88} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда формула (21) преобразуется для GHZ-состояния (12) в следующее выражение:

$$F = \cos^2 \phi \Xi_{11} + \sin^2 \phi \Xi_{88} + \cos \phi \sin \phi (\Xi_{18} + \Xi_{81}), \quad (23)$$

где элементы трехкубитной матрицы плотности $\Xi'_{ABC}(t)$ для начального состояния (12):

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= \cos^2 \phi \sum_{n_C=0}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=0}^{\infty} p_{n_B} \left[|U_{11}(n_B, n_C, t)|^2 \right], \\ \Xi_{18} &= \cos \phi \sin \phi \left\{ \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{11}(n_B, n_C, t) \right. \right. \\ &\quad \times U_{88}^*(n_B - 1, n_C - 1, t) \left. \right] + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[U_{11}(0, n_C, t) \right. \\ &\quad \times S_{88}^*(n_C - 1, t) \left. \right] + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[U_{11}(n_B, 0, t) S_{66}^*(n_B - 1, t) \right] \\ &\quad \left. + p_{0_B} p_{0_C} U_{11}(0, 0, t) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{88} &= \sin^2 \phi \left\{ \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[|U_{88}(n_B - 1, n_C - 1, t)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + p_{0_B} \sum_{n_C=1}^{\infty} p_{n_C} \left[|S_{88}(n_C - 1, t)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + p_{0_C} \sum_{n_B=1}^{\infty} p_{n_B} \left[|S_{66}(n_B - 1, t)|^2 \right] + p_{0_B} p_{0_C} \right\}, \\ \Xi_{81} &= \Xi_{18}^*. \end{aligned}$$

3. Результаты компьютерного моделирования и обсуждение

На рис. 1, *a* показана зависимость параметра перепутывания $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ кубитов *A* и *B* (или *A* и *C*) от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов (10) с $\phi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ и различных значений среднего числа фотонов в модах резонаторов (13). Аналогичные зависимости для параметра перепутывания $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ кубитов *B* и *C* представлены на рис. 1, *b*. Из рисунков хорошо видно наличие как для кубитов *A* и *B*, так и *B* и *C* эффекта мгновенной смерти и возрождения перепутывания в случае теплового поля резонатора. При этом для кубитов *A* и *B* указанный эффект отсутствует в случае вакуумных начальных состояний полей. Для кубитов *B* и *C* мгновенная смерть перепутывания имеет место и для вакуумных полей. Из рисунков хорошо видно, что для кубитов *B* и *C* время возрождения перепутывания существенно больше, чем для кубитов *A* и *B* для любых интенсивностей тепловых полей резонаторов. Из рисунков также видно, что с увеличением среднего числа тепловых фотонов максимальная степень перепутывания кубитов быстро уменьшается. При этом уменьшение максимальной степени перепутывания для соседних осцилляций Раби происходит для всех пар кубитов значительно быстрее, чем для случая систем „три кубита в общем резонаторе“ [44] или „свободный кубит + два кубита в общем резонаторе“ [48]. На рис. 2 представлены аналогичные зависимости для другого истинно перепутанного начального состояния кубитов вида (11). Из рисунка хорошо видно, что поведение отрицательностей кубитов *A* и *B* (или *A* и *C*) для рассматриваемого начального состояния кубитов (11) аналогично поведению указанной величины для начального состояния кубитов (10) для любых тепловых полей, в то время как для кубитов *B* и *C* имеются существенные различия в поведении парной отрицательности для начальных состояний кубитов (11) и (10) в случае малых интенсивностей тепловых полей резонаторов, включая вакуумные состояния. Для вакуумных состояний полей эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует, а для малых интенсивностей полей существенно уменьшаются промежутки времени, в течение которых

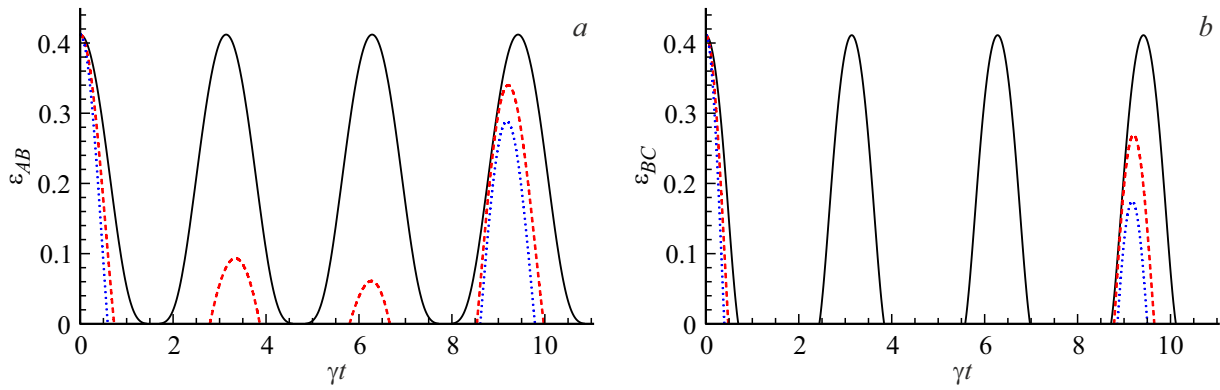


Рис. 1. Зависимость критерия отрицательности $\varepsilon_{AB(AC)}(\gamma t)$ (a) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (10) для $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. На всех графиках: вакуумное поле $n = n_B = n_C = 0$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 0.5$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 1$ (синяя точечная линия).

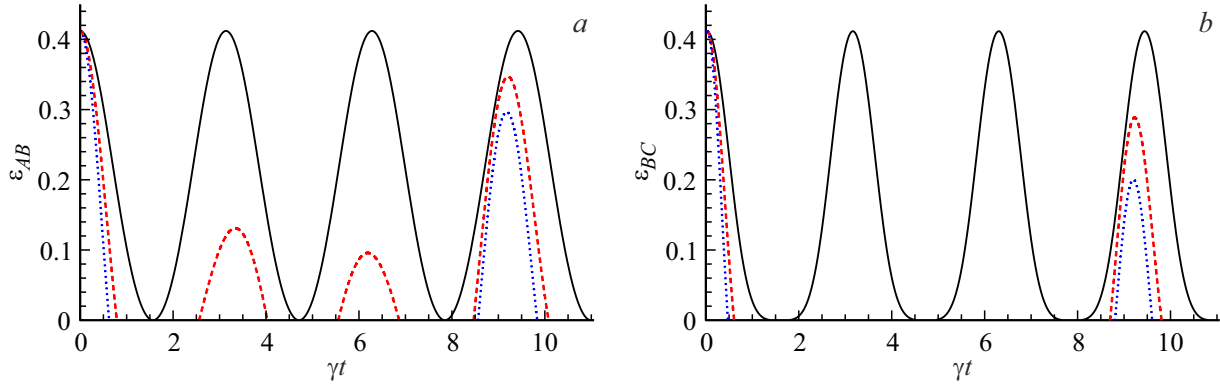


Рис. 2. Зависимость критерия отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ (a) и $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (11) для $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. На всех графиках: вакуумное поле $n = n_B = n_C = 0$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 0.5$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 1$ (синяя точечная линия).

перепутывание отсутствует. Заметим, что, в отличие от рассматриваемой модели для рассмотренных нами ранее трехкубитных моделей „свободный кубит + два кубита в общем резонаторе“ или „три кубита в общем резонаторе“ поведение парных отрицательностей существенно различается для начальных состояний W-типа вида (10) и (11) для любых интенсивностей тепловых полей. Для этих моделей продолжительностью промежутков времени между мгновенной смертью и возобновлением перепутывания кубитов существенно зависит от выбора типа W-состояния. Кроме того, для модели „свободный кубит + два кубита в общем резонаторе“ в случае малых интенсивностей теплового поля резонатора эффект мгновенной смерти перепутывания возникает только в том случае, когда кубиты первоначально приготовлены в состоянии вида (10).

Представляет интерес дополнить численные расчеты параметров перепутывания кубитов для состояний (10) и (11) анализом аналитических выражений для парных отрицательностей и степени совпадения в случае вакуумных начальных состояний полей резонаторов и параметров $\varphi = \pi/4$ и $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Для полноты

картины проведем в рассматриваемом случае также расчет степени совпадения $F(\gamma t)$. Для начального состояния (10) парные отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$, $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ и степень совпадения $F(\gamma t)$ равны

$$\varepsilon_{AB}(\gamma t) = \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\sqrt{5 + 4 \cos(2\gamma t) + \cos(4\gamma t)} - \sqrt{2} \right),$$

$$\varepsilon_{BC}(\gamma t) = \frac{1}{12} \left(2\sqrt{2} \sqrt{9 - 4 \cos(2\gamma t) + 5 \cos(4\gamma t)} + 4 \cos(2\gamma t) - \cos(4\gamma t) - 7 \right)$$

и

$$F(\gamma t) = \frac{1}{9} \cos^2(\gamma t) [2 + \cos(\gamma t)]^2$$

соответственно. Для начального состояния (11) аналогичные формулы есть

$$\varepsilon_{AB}(\gamma t) = \frac{1}{12} \left(\sqrt{2} \sqrt{\cos(4\gamma t) + 4 \cos(2\gamma t) + 35} + 2 \cos(2\gamma t) - 6 \right),$$

$$\varepsilon_{BC}(\gamma t) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\cos(4\gamma t) - 2\cos(2\gamma t) + 6} + \cos(2\gamma t) - 2 \right),$$

$$F(\gamma t) = \frac{1}{9} \left[1 + 2\cos(\gamma t) \right]^2$$

соответственно. Анализ парных отрицательностей и степеней совпадения для состояний (10) и (11) показывает, что для вакуумных начальных состояний полей резонаторов максимумы значений парных отрицательностей в моменты времени $t_{k_1} = 2\pi k_1/\gamma$ ($k_1 = 1, 2, \dots$) соответствуют максимальным значениям степени совпадения $F(\gamma t_{k_1}) = 1$. В эти моменты времени система кубитов возвращается в исходное истинно перепутанное W-состояние (вида (10) или (11) соответственно), а поля резонаторов — в вакуумные состояния, в то время как максимумы значений парных отрицательностей в моменты времени $t_{k_2} = \pi(1 + 2k_2)/\gamma$ ($k_2 = 0, 1, 2, \dots$) соответствуют локальным максимумам степени совпадения, равным $F(\gamma t_{k_2}) = 1/9$. В указанные моменты времени трехкубитная система также оказывается в истинно перепутанных состояниях W-типа, отличных от исходных состояний, а поля резонаторов возвращаются в исходные вакуумные состояния. Для начального состояния (10) и (11) полные волновые функции системы „три кубита + две моды“ в указанные моменты времени есть

$$|\psi_{0_B 0_C}(\gamma t_{k_2})\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|-A, +B, +C, 0_B, 0_C\rangle \right. \\ \left. - |+A, +B, -C, 0_B, 0_C\rangle - |+A, -B, +C, 0_B, 0_C\rangle \right],$$

$$|\psi_{0_B 0_C}(\gamma t_{k_2})\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-|-A, -B, +C, 0_B, 0_C\rangle \right. \\ \left. - |-A, +B, -C, 0_B, 0_C\rangle + |+A, -B, -C, 0_B, 0_C\rangle \right]$$

соответственно. В случае начального состояния кубитов (10) интервалам времени

$$(1/2) \arccos(3 - 2\sqrt{2}) + \pi k_3 \leq \gamma t \leq -(1/2) \\ \times \arccos(3 - 2\sqrt{2}) + \pi(k_3 + 1) \quad (k_3 = 0, 1, 2, \dots),$$

для которых $\varepsilon_{BC}(\gamma t) = 0$ (напомним, что в случаях, когда расчетная отрицательность отрицательна, ее значение принимается равным нулю), имеет место явление мгновенной смерти перепутывания, соответствуют значения степени совпадения $0 \leq F(\gamma t) \leq (1/9)(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}})^2$. На указанных временных отрезках система трех кубитов, естественно, находится в сепарабельном состоянии, а полная система „три кубита + две моды поля“ — в атом-полевом перепутанном состоянии. Так, в моменты времени $t_{k_4} = \pi(1/2 + 2k_4)/\gamma$ ($k_4 = 0, 1, 2, \dots$), соответствующем минимальным значениям степени совпадения $F(\gamma t_{k_4}) = 0$, волновая функция полной системы есть

$$|\psi_{0_B 0_C}(\gamma t_{k_4})\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-i|+A, -B, -C, 1_B, 0_C\rangle \right. \\ \left. - i|+A, -B, -C, 0_B, 1_C\rangle - |-A, -B, -C, 1_B, 1_C\rangle \right].$$

Такому состоянию полной системы соответствует редуцированная трехкубитная матрица плотности

$$\Xi_{ABC} = |-A, -B, -C\rangle\langle -A, -B, -C|.$$

На рис. 3, *a* показана зависимость степени совпадения $F(\gamma t)$ от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов GHZ-типа (12) для значения параметра $\phi = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов в модах резонаторов. Для сравнения на рис. 3, *b* показана зависимость степени совпадения $F(\gamma t)$ от безразмерного времени γt для того же начального GHZ-состояния и тех же значений интенсивностей теплового поля, но для модели, в которой один кубит изолирован, а два других заперты в общем одномодовом резонаторе. Для более полного анализа динамики рассматриваемой системы для состояния (12) на рис. 4 показано поведение среднего значения инверсии населенностей всех трех кубитов для тех же значений среднего числа фотонов, что и на рис. 3, *a*.

Анализ временной эволюции степени совпадения состояний трех кубитов в аналитическом виде может быть проведен для случая вакуумных начальных состояний полей резонаторов. Для вакуумных начальных состояний полей $n_B = n_C = 0$ и начального GHZ-состояния кубитов (12) для $\phi = \pi/4$ степень совпадения принимает вид

$$F(\gamma t) = \frac{1}{16} \left[3 + \cos(2\gamma t) \right]^2. \quad (24)$$

Максимальные значения, равные единице, степень совпадения (28) принимает в моменты времени $t_{k_5} = \pi k_5/\gamma$ ($k_5 = 0, 1, \dots$). В эти моменты времени для волновой функции системы получаем

$$|\psi_{0_B 0_C}(\gamma t_{k_5})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+A, +B, +C, 0_B, 0_C\rangle \right. \\ \left. + |-A, -B, -C, 0_B, 0_C\rangle \right].$$

Таким образом, в указанные моменты времени система возвращается в начальное состояние.

В моменты времени $t_{k_6} = \frac{\pi}{2\gamma}(1 + 2k_6)$, где $k_6 = 0, 1, \dots$, степень совпадения имеет минимальные значения, равные 1/4. Соответствующая этим моментам времени волновая функция есть

$$|\psi_{0_B 0_C}(\gamma t_{k_6})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|-A, -B, -C, 0_B, 0_C\rangle \right. \\ \left. - |+A, -B, -C, 1_B, 1_C\rangle \right]. \quad (25)$$

Трехкубитная редуцированная матрица плотности, соответствующая (25), есть

$$\Xi_{ABC} = \frac{1}{2} (|-A, -B, -C\rangle\langle -A, -B, -C| + |+A, -B, -C\rangle \\ \times \langle +A, -B, -C|) = \Xi_A \otimes \Xi_B \otimes \Xi_C,$$

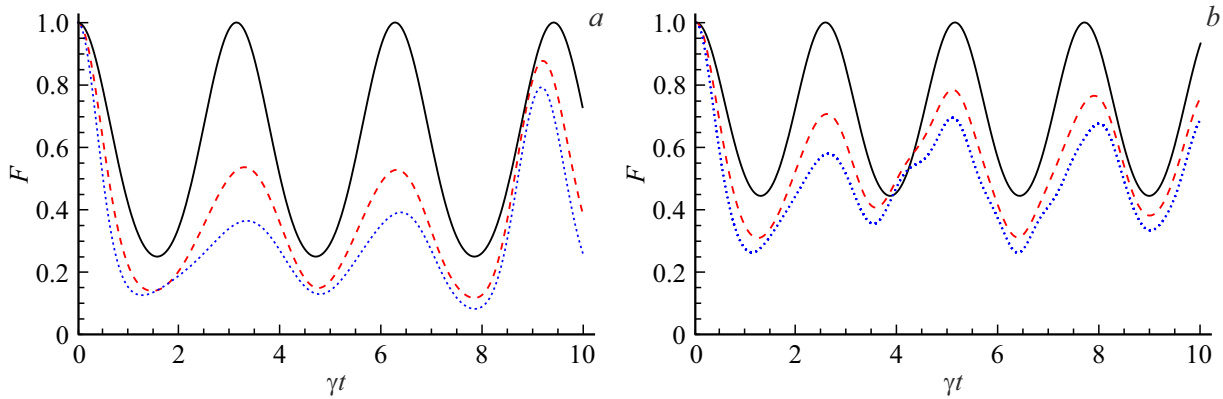


Рис. 3. Зависимость степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (12) в случае $\phi = \pi/4$. На графиках: вакуумное поле $n = n_B = n_C = 0$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 0.5$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 1$ (синяя точечная линия). На графике (b) построена зависимость степени совпадения для модели „изолированный кубит + два кубита в резонаторе“.

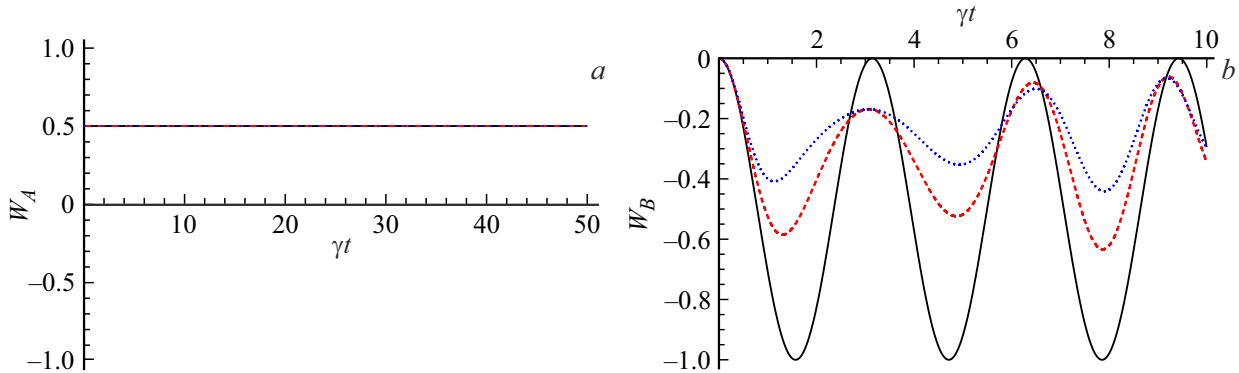


Рис. 4. Зависимость инверсии населенности $W_A(\gamma t) + 0.5$ (a) и $W_{B(C)}(\gamma t)$ (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (12) для $\phi = \pi/4$. На всех графиках: вакуумное поле $n = n_B = n_C = 0$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 0.5$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_B = \bar{n}_C = 1$ (синяя точечная линия).

где

$$\Xi_A = \frac{1}{2}(|-A\rangle\langle -A| + |+A\rangle\langle +A|),$$

$$\Xi_B = |-B\rangle\langle -B|, \quad \Xi_C = |-C\rangle\langle -C|.$$

Таким образом, в моменты времени t_{k_6} для начальных вакуумных полей резонаторов кубиты оказываются в сепарабельном смешанном состоянии, в котором кубиты B и C находятся в основном состоянии, а кубит A — в равновероятной смеси основного и возбужденного состояний. Такой анализ эволюции системы полностью подтверждается поведением средних инверсий населенностей кубитов для вакуумных полей, представленных на рис. 4. С увеличением интенсивностей тепловых полей резонаторов отклонение трехкубитного состояния от начального истинно перепутанного состояния GHZ-типа существенно увеличивается. Дополнительные расчеты парных отрицательностей $\varepsilon_{ij}(\gamma t)$ ($i, j = A, B, C, j \neq i$) для GHZ-состояния вида (12) показывают, что между парами кубитов перепутывание не возникает ни при каких значениях интенсивностей тепловых полей.

Аналогичный анализ для модели „изолированный кубит + два кубита в резонаторе“, (рис. 3, b) показывает, что система кубитов возвращается в начальное истинно перепутанное GHZ-состояние в моменты времени $t_{k_7} = \sqrt{2/3}\pi k_7/\gamma$ ($k_7 = 1, 2, \dots$). При этом минимальное значение, равное $4/9$, достигается в моменты времени $t_{k_8} = \pi(1 + 2k_8)/(\sqrt{6}\gamma)$, где $k_8 = 0, 1, \dots$. Таким образом, начальное истинно перепутанное GHZ-состояние для рассматриваемой модели является менее устойчивым по отношению к воздействию теплового шума, чем модель „изолированный кубит + два кубита в резонаторе“.

Заключение

В работе мы исследовали динамику системы трех идентичных двухуровневых атомов (кубитов), один из которых находится в свободном состоянии, а каждый из двух оставшихся заперт в отдельном идеальном резонаторе и резонансно взаимодействует с модой элек-

ромагнитного поля этого резонатора. Нами получено точное решение квантового уравнения для оператора эволюции рассматриваемой модели. На его основе нами найдена точная временная динамика полной матрицы плотности системы „три кубита + две моды поля“ для начальных истинно перепутанных состояний кубитов W- и GHZ-типа и тепловых полей резонаторов, а также вычислены редуцированные трехкубитная и парные двухкубитные матрицы плотности. Редуцированная трехкубитная матрица плотности использована для расчета степени совпадения состояний подсистемы кубитов, а парные двухкубитные матрицы плотности — для расчета парных отрицательностей кубитов. Расчеты временных зависимостей парных отрицательностей для двух истинно перепутанных нормализованных W-состояний кубитов вида (10) и (11) и тепловых состояний электромагнитного поля резонатора для различных средних чисел фотонов показали, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальное перепутывание кубитов даже для относительно высоких интенсивностей тепловых шумов резонаторов, однако с увеличением среднего числа тепловых фотонов максимальная степень перепутывания кубитов быстро уменьшается. Показано также, что для тепловых полей резонаторов для всех пар кубитов имеет место эффект мгновенной смерти и возрождения перепутывания. При этом для свободного кубита и одного из запертых кубитов указанный эффект отсутствует в случае вакуумных полей резонаторов как для начального состояния (10), так и для (11). Аналогичное поведение характерно и для пары кубитов в резонаторах для начального состояния (11), в то время как для тех же кубитов в случае начального состояния (10) мгновенная смерть перепутывания имеет место и для вакуумных полей резонаторов. При увеличении интенсивности тепловых полей резонаторов время, в течение которого перепутывание кубитов исчезает, существенно возрастает. Анализ временного поведения рассматриваемой системы для вакуумных состояний показал, что для начальных состояний кубитов (10) и (11) нечетные максимумы парных отрицательностей кубитов соответствуют возвращению системы в исходное перепутанное состояние для кубитов и вакуумные состояния для полей, а четные максимумы — переходу системы в состояния вида (10) и (11), но с другими значениями параметров φ и θ .

Расчеты парных отрицательностей для истинно перепутанного GHZ-состояния вида (12) показали, что между парами кубитов перепутывание не возникает ни при каких значениях интенсивностей тепловых полей. Вычисления также показали, что с увеличением интенсивностей тепловых полей резонаторов отклонение трехкубитного состояния от начального истинно перепутанного состояния GHZ-типа существенно увеличивается. Анализ временного поведения рассматриваемой системы в случае начального состояния (12) и вакуумных состояний полей позволяет сделать вывод, что максимальные значения степени совпадения соответствуют

возвращению подсистемы кубитов в исходное состояние (12), а полей резонаторов — в вакуумные состояния. Минимальным значениям степени совпадения соответствует сепарабельное смешанное состояние, в котором запертые кубиты находятся в основном состоянии, а свободный кубит — в равновероятной смеси основного и возбужденного состояний. При этом подсистема атомов и полей резонаторов находятся в атом-полевым перепутанном состоянии.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] H.-L. Huang, D. Wu, D. Fan, X. Zhu. *Science China Information Sciences*, **63**, 180501 (2020). DOI: 10.1007/S11432-020-2881-9
- [2] N. Meher, S. Sivakumar. *Eur. Phys. J. Plus.*, **137**, 985 (2022). DOI: 10.1140/epjp/s13360-022-03172-x
- [3] S. Haroche, M. Brune, J.M. Raimond. *Nature Physics*, **16** (3), 243 (2020). DOI: 10.1038/s41567-020-0812-1
- [4] D. De Bernardis, A. Mercurio, S. De Liberato. *J. Opt. Soc. Am. B*, **41** (8), C206 (2024). DOI: 10.1364/JOSAB.522786
- [5] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Y. You, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **85** (2), 623 (2013). DOI: 10.1103/RevModPhys.85.623
- [6] L.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **88** (1), 153 (2014). DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153
- [7] X. Gu, A.F. Kockum, A. Miranowicz, Y.X. Liu, F. Nori. *Physics Reports*, **718–719**, 1 (2017). DOI: 10.1016/j.physrep.2017.10.002
- [8] G. Wendin. *Repts. Prog. Phys.*, **80**, 106001 (2017). DOI: 10.1088/1361-6633/aa7e1a
- [9] G.-Q. Li, X.-Y. Pan. *Chin. Phys.*, **27**, 020304 (2018). DOI: 10.1007/s11432-020-2881-9
- [10] D.J. van Woerkom, P. Scarlino, J.H. Ungerer, C. Müller, J.V. Koski, A.J. Landig, C. Reichl, W. Wegscheider, T. Ihn, K. Ensslin, A. Wallraff. *Phys. Rev. X*, **8**, 041018 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevX.8.041018
- [11] J. Larson, T. Mavrogordatos, S. Parkins, A. Vidiella-Barranco. *J. Opt. Soc. Am. B*, **41** (8), JCM1 (2024). DOI: 10.1364/JOSAB.536847
- [12] C.-P. Yang, Q.-P. Su, S.-B. Zheng, F. Nori. *New J. Phys.*, **18**, 013025 (2016). DOI: 10.1088/1367-2630/18/1/013025
- [13] A. Peres. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (8), 1413 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.1413
- [14] R. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki. *Phys. Lett. A*, **223**, 333 (1996). DOI: 10.1016/S0375-9601(96)00706-2
- [15] W.K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.*, **80** (10), 2245 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2245
- [16] S.N. Filippov. *J. Mathem. Sci.*, **241** (2), 210 (2019). DOI: 10.1007/s10958-019-04418-3
- [17] A. Barenco, Ch.H. Bennett, R. Cleve, D.P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J.A. Smolin, H. Weinfurter. *Phys. Rev. A*, **52**, 3457 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevA.52.3457
- [18] Y. Shi. *Quant. Infor. Comput.*, **3**, 84 (2003). DOI: 10.26421/QIC3.1-7

- [19] E. Fredkin, T. Toffoli. *Int. J. Theor. Phys.*, **21** (3–4), 219 (1982). DOI: 10.1007/bf01857727
- [20] D.G. Cory, M.D. Price, W. Maas, E. Knill, R. Laflamme, W.H. Zurek, T.F. Havel, S.S. Somaroo. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 2152 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.2152
- [21] M. Neeley, R.C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Mariantoni, A.D. O’Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, Y. Yin, T. Yamamoto, A.N. Cleland, J.M. Martinis. *Nature*, **467**, 570 (2010). DOI: 10.1038/nature09418
- [22] L. DiCarlo, M.D. Reed, L. Sun, B.R. Johnson, J.M. Chow, J.M. Gambetta, L. Frunzio, S.M. Girvin, M.H. Devoret, R.J. Schoelkopf. *Nature*, **467**, 574 (2010). DOI: 10.1038/nature09416
- [23] Ch.F. Roos, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, J. Benhelm, G.P.T. Lancaster, Ch. Becher, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt. *Nature*, **404**, 1478 (2004). DOI: 10.1126/science.109752
- [24] D.C. Cole, J.J. Wu, S.D. Erickson, P.-Y. Hou, A.C. Wilson, D. Leibfried, F. Reiter. *New J. Phys.*, **23**, 073001 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac09c8
- [25] Y. Maleki, A.M. Zheltikov. *J. Opt. Soc. Am. B*, **36**, 443 (2019). DOI: 10.1364/JOSAB.36.000443
- [26] P. Neumann, N. Mizuochi, F. Rempp, P. Hemmer, H. Watanabe, S. Yamasaki, V. Jacques, T. Gaebel, F. Jelezko, J. Wrachtrup. *Science*, **323**, 1326 (2009). DOI: 10.1126/science.11572
- [27] K. Takeda, A. Noiri, T. Nakajima, J. Yoneda, T. Kobayashi, S. Tarucha. *Nature Nanotechnology*, **16**, 965 (2021). DOI: 10.1038/s41565-021-00925-0
- [28] M. Ge, L.-F. Zhu, L. Qiu. *Commun. Theor. Phys.*, **49**, 1443 (2008). DOI: 10.1088/0253-6102/49/6/20
- [29] D.-M. Lu, C.-D. Qiu. *Optoelectron. Lett.*, **9** (2), 0157 (2013). DOI: 10.1007/s11801-013-2392-0
- [30] K. Wu, Q. Huang, X. Zhang. *Adv. Mater. Res.*, **662**, 537 (2013). DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.662.537
- [31] K.-I. Kim, H.-M. Li, B.-K. Zhao. *Int. J. Theor. Phys.*, **55**, 241 (2016). DOI: 10.1007/s10773-015-2656-5
- [32] W.-Ch. Qiang, G.-H. Sun, Q. Dong, O. Camacho-Nieto, Sh.-H. Dong. *Quant. Information Proces.*, **17**, 90 (2018). DOI: 10.1007/s11128-018-1851-8
- [33] D.-M. Lu. *J. Mod. Opt.*, **66**, 424 (2019). DOI: 10.1080/09500340.2018.1537406
- [34] M. Ali. *Quant. Inform. Proces.*, **20**, 311 (2021). DOI: 10.1007/s11128-021-03195-w
- [35] M. Yahyavi, M.A. Jafarizadeh, N. Karimi, A. Heshmati. *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2022**, 093A01 (2022). DOI: 10.1093/ptep/ptac099
- [36] C.J.-Fang, L.H.-Ping. *Commun. Theor. Phys.*, **43**, 427 (2005). DOI: 10.1088/0253-6102/43/3/010
- [37] K. Fujii, K. Higashida, R. Kato, T. Suzuki, Yu. Wada. *Intern. J. Geometric Methods Mod. Phys.*, **01**, 721 (2004). DOI: 10.1142/S0219887804000344
- [38] M. Youssef, N. Metwally, A.-S.F. Obada. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **43**, 095501 (2010). DOI: 10.1088/0953-4075/43/9/095501
- [39] J.-S. Zhang, A.-X. Chen. *Intern. J. Quant. Inform.*, **07**, 1001 (2009). DOI: 10.1142/S0219749909005638
- [40] Z.X. Man, Y.-J. Xia, N.B. An. *J. Mod. Opt.*, **56** (8), 1022 (2009). DOI: 10.1080/09500340902887666
- [41] J.-Yo. Zhou, S.-L. Zhao, Y. Yang, Sh. Xiao, D. He, W. Nie, Yi. Hu, J. Lu, L.-M. Kuang, Y.-Xi Liu, M.-T. Deng, D.-N. Zheng, Zh.-Ch. Xiang, L. Zhou, Z.H. Peng. *Opt. Express*, **32** (1), 179 (2024). DOI: 10.1364/OE.509250
- [42] X.-W. Hou, M.-F. Wan, Z.-Q. Ma. *The Europ. Phys. J. D*, **66** 152, (2012). DOI: 10.1140/epjd/e2012-30018-4
- [43] А.Р. Багров, Е.К. Башкиров. *Вестник Самарского ун-та Естественнауч. сер.*, **28** (1–2), 95 (2022). DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105
- [44] A.R. Bagrov, E.K. Bashkirov. *IX Int. Conf. Infor. Techn. Nanotechn. (ITNT)* 1–5. DOI: 10.1109/ITNT57377.2023.10139206
- [45] L. Qiu, A.M. Wang, X.Q. Su. *Opt. Commun.*, **281**, 4155 (2008). DOI: 10.1016/j.optcom.2008.03.078
- [46] F. Han, Y.-J. Xia. *Intern. J. Quant. Inform.*, **7**, 1337 (2009). DOI: 10.1142/S0219749909005821
- [47] J.-L. Zhang, J. Ma, S.-Yu. Yu, Q. Han, B. Li. *Int. J. Theor. Phys.*, **53**, 942 (2014). DOI: 10.1007/s10773-013-1885-8
- [48] А.Р. Багров, Е.К. Башкиров. *ЖТФ*, **94** (3), 341 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23
- [49] R. Jozsa. *J. Mod. Opt.*, **41**, 2315 (1994). DOI: 10.1080/09500349414552171