

09,13,14

Свободный объем в классической модели вязкого течения при стекловании

© И.В. Разумовская¹, А.А. Машанов², Ю.А. Филиппова^{1,3}, А.В. Наумов^{1,4,¶}

¹ Московский педагогический государственный университет,
Москва, Россия

² Бурятский государственный университет,
Улан-Удэ, Россия

³ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

⁴ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Троицкое обособленное подразделение,
Троицк, Россия

¶ E-mail: irinarasum9@mail.ru; yufi26@list.ru; a_v_naumov@mail.ru

Поступила в Редакцию 24 декабря 2024 г.

В окончательной редакции 3 марта 2025 г.

Принята к публикации 5 марта 2025 г.

Обсуждается модификация модели Эйринга, которая предусматривает корректный учет свободного объема в процессе вязкого течения материала. Предложено ввести величину свободного объема непосредственно в структурную модель, где повторяющиеся вакансии в материале аналогичны набору линий краевых дислокаций в одной плоскости скольжения, а сдвиг является кооперативным процессом последовательных „перескоков“ в группе (в данном одномерном случае — цепочке) атомов. Определена обратная пропорциональная зависимость коэффициента ньютоновской вязкости от концентрации вакансий (относительного свободного объема). С уменьшением температуры концентрация вакансий уменьшается, и длина кинетической единицы („структуры“) увеличивается, что может привести к увеличению потенциального барьера и дополнительному замедлению процесса стеклования. В рамках уточненной модели показано, что в качестве колебаний кинетических единиц, определяющих вязкость и процесс стеклования, следует рассматривать частоту антисимметричных локальных колебаний на вакансиях.

Ключевые слова: вязкость, вакансии, локальные колебания, релаксация, стекло.

DOI: 10.61011/FTT.2025.03.60270.350

1. Введение

Среди наиболее важных задач в физике твердого тела часто упоминают проблему перехода вещества из жидкого в стеклообразное состояние и связанные с этим фундаментальные закономерности, определяющие свойства стекла [1–5]. Процесс стеклования вещества и фундаментальные закономерности, определяющие сопутствующие изменения характеристик и свойств материала, являются объектом непрекращающихся исследований в связи с необходимостью решения ключевых задач физики конденсированного состояния и материаловедения. Стеклование, как известно, не является классическим фазовым переходом и получило название релаксационного перехода [6–8]. Резкое уменьшение вблизи температуры стеклования времени молекулярной релаксации (времени перестройки структуры) приводит к фиксации в твердом состоянии неравновесной структуры жидкости. Обычно для стеклообразующих материалов обсуждают два типа релаксационных процессов: (i) первичная (также называемая α) релаксация, которая присутствует вблизи температуры стеклования (T_g); и (ii) вторичный (β) процесс, который имеет меньшую амплитуду и обнаруживается

при температурах ниже T_g [9–11]. β -релаксации и α -релаксации для аморфных материалов наблюдались на основе диэлектрической или механической спектроскопии. Температурная зависимость α -процесса является сложной, тогда как вторичная β -релаксация подчиняется температурной зависимости Аррениуса. Исследования показывают, что β -релаксация связана с локализованным атомным или молекулярным движением, тогда как α -релаксация соответствует более сложным и коррелированным движениям атомов или молекул. Релаксационные процессы в неупорядоченных средах, в частности, определяют наличие в них феномена бозонного пика — аномального возрастания плотности колебательных состояний в материале в низкочастотной области от нескольких до нескольких десятков обратных сантиметров (десятки—сотни GHz). Микроскопическая природа возбуждений, определяющих характер бозонного пика, изучается вот уже несколько десятилетий, а в последнее время эта тематика обрела „второе дыхание“ в связи с появлением новых перспективных материалов с заданными термодинамическими, оптическими и механическими свойствами [12–22]. Значительный интерес с прикладной точки зрения представляет также возможность управляемой модификации и/или контроль

свойств материалов (например, стекла) с использованием различных методов [23].

Релаксационная природа процесса стеклования и универсальность этого явления были эффектно подтверждены получением аморфных металлов и сплавов [24,25]. После классического опыта П. Давеза в 1960 г. были получены первые аморфные металлы, стеклавшиеся при скоростях охлаждения 10^8 – 10^{10} К/с. Переход к сплавам, стеклующимся при скоростях 1–500 К/с, позволил широко использовать уникальные свойства аморфных металлов в самых разнообразных областях техники.

Макроскопический процесс вязкого течения при разных температурах в области стеклования позволяет судить об изменении времени молекулярной релаксации в этой области. Вязкое течение определяется термофлуктуационными переходами некоторых кинетических единиц в новое положение равновесия, в соседние более или менее „вакантные“ места структуры, составляющие т.н. свободный объем. В неассоциированных простых жидкостях такими кинетическими единицами являются атомы (молекулы), в полимерах и стеклах — отдельные участки (сегменты) структуры. Поэтому во всех моделях и теориях стеклования и моделях вязкого течения в той или иной форме фигурирует свободный объем. Важно при этом отметить, что свободный объем определяет вязкое течение и самодиффузию в материале.

Величина свободного объема в некоторой степени зависит от того физического процесса, в котором он проявляется: при микроиндентировании неорганического стекла свободный объем дает возможность сетке Si–O–Si свернуться и уплотниться; в методе аннигиляции позитронов позитрон захватывается определенными дефектами структуры стекла или полимера (элементами свободного объема); в экспериментах по газопроницаемости решающую роль для диффузии вещества играет сравнительный размер нанопор, и т.д. Вместе с тем между значениями свободного объема, полученного разными методами, имеется очевидная корреляция.

Бачинский [26] показал, что вязкость жидкости при ее постоянном объеме, несмотря на изменения давления и температуры, практически не изменяется. Этот вывод был подтвержден экспериментально и позволил оценить свободный объем примерно в 10–15%. Полученные результаты указывали на решающую роль свободного объема в механизме вязкого течения. Однако, свободный объем в этом процессе интерпретируется двумя разными моделями.

В моделях первого типа (Френкель, Эйринг и др., [27–30]) жидкость рассматривается как бинарная смесь молекул и вакансий. Кинетическая единица переходит в соседнюю вакансию, вакансия перемещается на ее место и доступна для перехода следующей соседней единицы (рис. 1, а).

Объем вакансий, вычисленный из экспериментальных данных по влиянию на вязкость давления, оказался равен для простых жидкостей $1/6$ – $1/7$ от размера молекулы. Это соответствовало свободному объему всего лишь

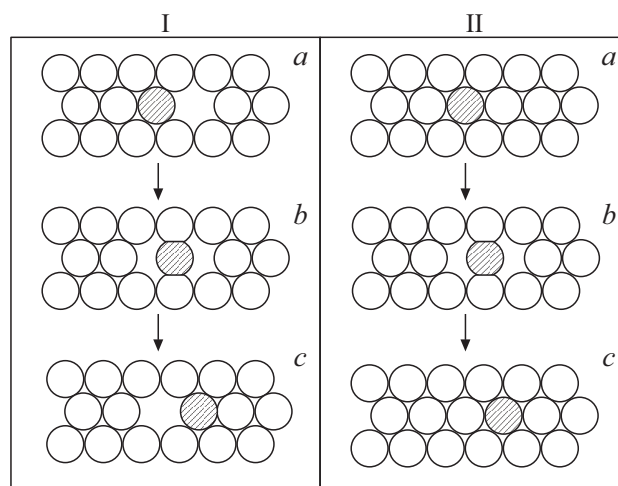


Рис. 1. Два механизма перехода от начального состояния (а) через активированный комплекс (b) к конечному состоянию (с).

примерно 3%, и А. Миллер [31] был одним из первых исследователей, отмечавших неопределенность понятия свободного объема. Соответственно начали разделять геометрический („замороженный“) свободный объем и определяющий вязкость физический или флуктуационный [32,33].

Геометрический свободный объем может быть рассчитан по известным методикам [34], учитывающим атомную структуру вещества.

В последующих после Эйринга работах (например, [35–41]) в основном анализировалась экспоненциальная составляющая в выражении для вязкости, отражающая вероятность элементарного акта перехода через барьер. При этом основное внимание уделялось не структурной модели, а термодинамическим соотношениям. Одновременно предлагались эмпирические формулы для зависимости вязкости от свободного объема, основанные на априорных представлениях о роли последнего. В эмпирическом уравнении Дулиттла [35] свободный объем входит в показатель экспоненты; учет распределения свободного объема по атомам и их группировкам дал в его формулу небольшую поправку, равную $\sqrt{2}$ [36]. В валентно-конфигурационной теории С.В. Немилова [8,39,40] рассмотрен принципиальный момент — взаимодействие элементарного акта вязкого течения с окружающей средой, что позволило включить в рассмотрение деформационные характеристики последней. Ю.С. Липатов в обзоре [33] подробно проанализировал различные концепции свободного объема и их связь с эмпирическими формулами, описывающими процесс стеклования, в т.ч. применительно к аморфным полимерам, а также возникающие при этом противоречия. Новые возможности открылись с применением метода молекулярной динамики [41]. Однако модель Эйринга остается базовой молекулярной моделью.

Вторая интерпретация свободного объема рассматривает вакансии как непрерывно возникающие и исчезающие флуктуации структуры из-за колебательного теплового движения молекул. Молекула в этом случае может успеть или не успеть перейти в ею же созданную вакансию (рис. 1, *b*). Таким образом, эти два подхода отличаются сопоставлением времени жизни вакансии и временем перехода в нее создавшей ее кинетической единицы.

По оценкам Эйринга [27], для многих веществ энергия образования вакансии существенно больше энергии перехода через потенциальный барьер, который преодолевает кинетическая единица при перескоке. Это делает, на наш взгляд, второй вариант интерпретации роли свободного объема в вязком течении более вероятным. Соответствующая идея была реализована в полуклассической модели стеклования как „вымерзания“ характерной частоты колебаний кинетических единиц [42]. Теоретическая модель делокализованных атомов последовательно развивалась в работах Д.С. Сандитова с сотр. [43–45]. При этом особое значение приобретают исследования микроскопики релаксационных процессов (см. *e.g.*, обзор [41]), проясняющие, в частности, прочностные свойства твердых тел [46].

В то же время, обсуждаемые модели содержат ряд несогласованностей, связанных, по нашему мнению, с недостаточно полным учетом микроскопических особенностей свободного объема и его роли в различных процессах (вязкое течение и т.п.). В частности, теория Эйринга предсказывает возрастание вязкости среды с увеличением свободного объема, что представляется весьма противоречивым следствием модели.

В настоящей работе мы предлагаем уточнение, позволяющее ввести величину свободного объема непосредственно в структурную модель, что позволяет корректно описать роль свободного объема в процессе вязкого течения.

2. Модель вязкого течения по Эйрингу

В кинетической теории вязкого течения Г. Эйринга [27–29] свободный объем в виде вакансий является принципиальным элементом модели, обеспечивающим термофлуктуационный механизм вязкого течения твердого тела или жидкости (рис. 2).

В идеальном кристалле сдвиг должен происходить за счет одновременного натяжения межатомных связей между сдвигаемыми атомными плоскостями, затем их одновременного разрыва со сдвигом на величину a и установлением нового равновесного распределения атомных связей, которое тут же нарушается — процесс продолжается. Тепловые флуктуации роли не играют, сдвиг происходит при напряжениях больше некоторой критической величины — теоретической прочности на сдвиг.

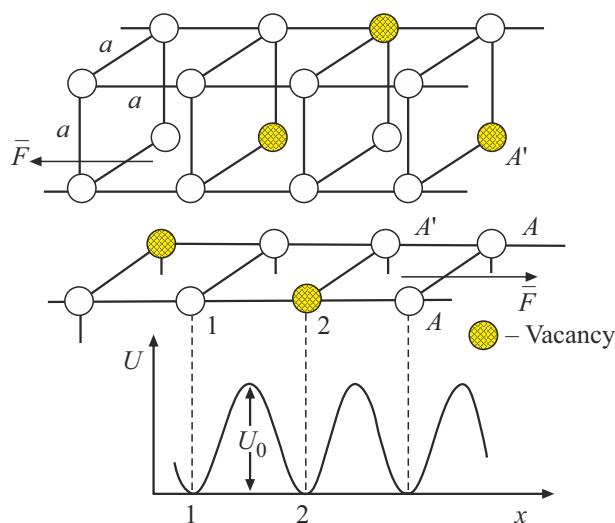


Рис. 2. Сдвиг атомной плоскости A_1-A_1 относительно плоскости $A-A$ за счет независимых перескоков атомов в вакансии, преимущественно по направлению силы, с переходом через потенциальный барьер U_0 .

Для упрощения расчетов в модели Эйринга атомы образуют простую кубическую решетку; для жидкого состояния под величиной a понимается среднее межатомное расстояние. В выбранной для рассмотрения атомной цепочке потенциальная энергия атомов 1, 2 и далее является периодической функцией координаты x .

Сдвиг накапливается за счет независимых перескоков атомов в соседние вакансии при их термофлуктуационном переходе через потенциальный барьер U_0 . Роль внешней силы заключается в увеличении вероятности таких перескоков по направлению силы и уменьшению вероятности обратного процесса. При сравнительно небольших напряжениях сдвига теория дает уравнение ньютоновского течения, и процесс такого сдвига возможен при сколь угодно малом напряжении, но соответственно с малой скоростью деформации. Коэффициент трансмиссии, характеризующий „успешность“ перехода через барьер, полагается равным единице, туннельными эффектами пренебрегается.

Коэффициент ньютоновской вязкости η по Эйрингу равен

$$\eta = \frac{k_B T}{\nu_0 a^3} e^{U_0/(k_B T)}, \quad (1)$$

где ν_0 — частота тепловых колебаний атомов, равная по порядку величины $10^{12}–10^{13} \text{ s}^{-1}$ (инфракрасная область); a — среднее межатомное расстояние; U_0 — потенциальный барьер для перехода атома из одного равновесного положения в другое (рис. 2).

В оригинальной модели [28]

$$\nu_0 = (2\pi k_B T / \hbar) F_1 / F,$$

где F_1 и F — суммы состояний активированного комплекса (переходного состояния на вершине потенциального барьера) и исходного состояния атома.

Однако конкретная величина свободного объема (удельная или на моль твердого тела) в данной структурной модели не учитывается. Между тем в различных теоретических моделях стеклования, как это было показано выше, величина свободного объема имеет принципиальное значение для величины вязкости.

Эйринг вводит далее свободный объем v_f в расчете на одну молекулу через сумму состояний F для атома (кинетической единицы) в неактивированном состоянии и сумму состояний F_1 активированного комплекса (переходного состояния). Предполагается, что $F \sim v_f$, а в числе состояний активированного комплекса F_1 учитывается, что исключена одна степень свободы — поступательное движение по координате реакции. При этом уменьшено и подпространство координат, что вызывает некоторые сомнения. В итоге свободный объем входит в выражение для частоты ν_0 , и благодаря этому коэффициент вязкости оказывается зависимым от v_f следующим образом [28]:

$$\eta = v_f^{1/3} (2\pi \cdot m_k \cdot k_B T)^{1/2} / a^3 \exp(U_0 / k_B T), \quad (2)$$

где m_k — масса кинетической единицы.

Таким образом, в теории Эйринга вязкость увеличивается с увеличением свободного объема, что противоречит самой концепции его роли в вязком течении.

3. Уточненная структурная модель вязкого течения по Эйрингу с учетом величины свободного объема

Рассмотрим упрощенную модель, в которой свободный объем в виде отдельных вакансий статистически, но сравнительно равномерно (в макроскопическом масштабе) распределен в объеме кристалла с простой кубической решеткой (рис. 3).

Если расстояние между атомами равно a , то число узлов решетки N в единичном кубе равно a^{-3} . Пусть из них N_v узлов представляют собой вакансии, т.е. концентрация вакансий $n_v = N_v / N$. Малая концентрация вакансий в твердых телах вплоть до плавления позволяет рассматривать их как одиночные, не взаимодействующие объекты.

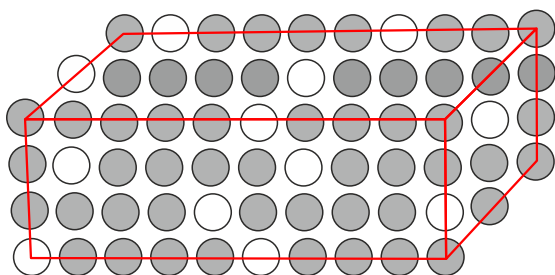


Рис. 3. Модель трехмерного кристалла с вакансиями.

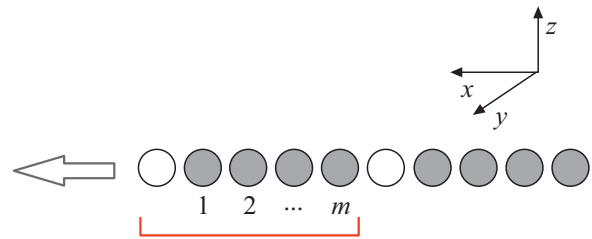


Рис. 4. Повторяющаяся „структура“ из одной вакансии и m атомов.

Модель Эйринга фактически является одномерной. Две плоскости сдвигаются относительно друг друга за счет независимого сдвига цепочек атомов, в которых атомы „перескакивают“ только в вакансии данной цепочки (рис. 2). Выбор направления цепочки определяется направлением сдвига. Оставаясь в рамках этой модели, рассмотрим одну из атомных цепочек.

При строго равномерном распределении вакансий цепочка представляет собой повторяющуюся структуру из отдельных вакансий, перемежающихся атомами числом m (рис. 4).

В действительности m является средней величиной. Перескоки внутри каждой структуры можно считать независимыми. В левой структуре они начинаются с перескока атома 1 в вакансию слева; тогда атом 2 получает возможность перескочить в открывшуюся вакансию, и т.д. Правая структура независимо „совершает“ ту же манипуляцию, но продвинуться влево на одно межатомное расстояние сможет только тогда, когда на месте атома m первой структуры останется вакансия. Именно тогда все структуры в цепочке и цепочка в целом передвинутся на величину a .

В теории Эйринга эффективное число перескоков n каждого атома по направлению действия силы в единицу времени, т.е. разность числа перескоков по и против действия силы, при ньютоновском течении равно

$$n \approx \frac{\nu_0 a^3 \sigma_{sh}}{k_B T} e^{-U_0 / (k_B T)}, \quad (3)$$

где σ_{sh} — напряжение сдвига.

При этом каждый перескок рассматривается как сдвиг всей атомной цепочки на величину a , и n совпадает со скоростью деформации. В действительности, как было показано выше, перескока одного атома внутри каждой „структуры“ недостаточно для сдвига всей цепочки — единичные перескоки должны, некоторым образом, накопиться. Чтобы „гусеница“ передвинулась на один шаг, надо, чтобы все ее „ноги“ по очереди сделали этот шаг. Ситуация похожа на сдвиг кристалла с единичной краевой дислокацией. Линия дислокации передвигается по плоскости скольжения, область сдвига движется вслед за ней, но макроскопически ничего не происходит. Сдвиг в виде моноатомной ступеньки на поверхности кристалла реализуется только тогда, когда линия дислокации выйдет на поверхность.

В нашей модели повторяющиеся вакансии в структуре аналогичны набору линий дислокаций в одной плоскости скольжения. Их можно рассматривать как одномерные дислокации, а сдвиг является кооперативным процессом, как движение обычных дислокаций в кристалле. Принципиальное отличие заключается в атермическом механизме перестройки атомной структуры при движении дислокаций и термофлуктуационном при вязком течении.

С нашим уточнением модели сдвиг всей цепочки на величину межатомного расстояния произойдет только после m перескоков по направлению силы (независимо в каждой структуре), и скорость деформации равна не n , а n/m . Соответственно в итоговой формуле для вязкости появится дополнительный коэффициент, уточненное значение вязкости η_1 равно

$$\eta_1 = \eta m, \quad (4)$$

где вязкость η задается формулой (1), а модель Эйринга фактически предполагает $m = 1$.

Чтобы определить величину m , обратимся к трехмерной модели кубической решетки со статистически равномерным распределением единичных вакансий (рис. 3). В единичном кристалле с кубической решеткой, содержащем N атомов, содержится $N^{2/3}$ атомных цепочек длиной $N^{1/3}$. По ним случайно распределено N_v вакансий. На одну цепочку приходится в среднем вакансий $N_1 = N_v/N^{2/3}$, и расстояние между ними в среднем равно $N^{1/3}/N_1 = N/N_v = n_v^{-1}$, где n_v — концентрация вакансий.

Отсюда среднее расстояние между вакансиями равно an_v^{-1} , и

$$m = n_v^{-1}, \quad (5)$$

и с учетом формул (1) и (4) это дает следующее выражение для ньютоновской вязкости в уточненной модели:

$$\eta_1 = k_B T / (v_0 a^3 n_v) \exp\left(\frac{U_0}{k_B T}\right). \quad (6)$$

Вязкость не зависит от размеров кристалла (т.е. N), поэтому свободный объем входит в формулу (6) в виде концентрации вакансий.

Можно строго рассчитать среднее значение величины m в атомной цепочке, полагая вероятность W_v встретить в данном узле вакансию равной $W_v = n_v$, а вероятность W_a встретить атом $W_a = 1 - n_v$. В этом случае мы получаем среднее значение $\langle m \rangle = n_v^{-1}$, т.е. тот же результат.

В модели Эйринга не рассматриваются перескоки атомов в вакансии между плоскостями сдвига и в данной плоскости перпендикулярно сдвигу (рис. 3). Рассмотрим теперь и эти возможности.

Чтобы атом в цепочке, направленной по сдвигу (ось x на рис. 4), перепрыгнул в ближайшую вакансию, необходимо, чтобы он не имел возможности перепрыгнуть в вакансию одной из соседних цепочек, т.е. по оси y или z .

При этом в нашей модели вакансии по этим осям могут находиться только с одной из сторон рассматриваемой атомной цепочки (что соответствует реально малой плотности вакансий). В обоих случаях вероятность отсутствия вакансий по оси y или z равна

$$W_y^1 = W_z^1 = m/(m+1) = 1 - 1/(1+n_v^{-1}) \approx 1.$$

Вероятность перескока атома по оси x можно теперь записать как произведение вероятностей, и за счет малой концентрации вакансий она практически не меняется по сравнению с одномерным случаем:

$$W_x = e^{-U/(k_B T)} W_y^1 W_z^1 \approx e^{-U/(k_B T)}, \quad (10)$$

где по теории Эйринга $U = U_0 \pm \delta A$; δA — элементарная работа напряжения сдвига против направления сдвига или по его направлению.

Возможные перескоки атомов в вакансии соседних цепочек перпендикулярно направлению сдвига увеличивают или уменьшают величину m в этой цепочке. Однако величина m имеет статистический характер, а вероятность таких „поперечных“ перескоков не зависит от величины приложенного напряжения сдвига и непосредственно на вязкость не влияет.

Заметим, что наше уточнение касается не только ньютоновской вязкости, но и всей модели Эйринга, включая область неньютоновского течения.

Предложенная геометрическая модель справедлива и при второй интерпретации свободного объема, связывающей в один процесс возникновение вакансии и переход в нее молекулы, которую „посетила“ флуктуация (рис. 1, б). В этом случае величина m меняется не только от одной „структуры“ к другой, но и во времени в каждой структуре, но это не сказывается на наших общих выводах.

С понижением температуры концентрация вакансий уменьшается (хотя равновесная структура не успевает установиться), и растет m , т.е. длина структурной единицы. По мнению некоторых исследователей, увеличение размера кинетической единицы может привести к увеличению потенциального барьера U_0 и дополнительному ускорению процесса стеклования. В нашей модели, как и в модели Эйринга, кинетической единицей является отдельный атом (сегмент структуры стекла или полимера); перескоки кинетических единиц внутри „структуры“ в вакансию являются независимыми процессами. В действительности такая смена положения равновесия в конденсированной среде должна вызывать локальное упругое колебание, возмущающее всю „структуру“ и делающее ее своеобразной кинетической супраединицей. Процесс сдвига „структуры“ на величину межатомного расстояния становится при таком подходе процессом кооперативным, охватывающим все m атомов. Тогда удлинение введенной нами „структуры“ с понижением температуры равноценно увеличению эффективного размера кинетической единицы. Это коррелирует с представлениями Адамса и Гиббса об уменьшении

конфигурационной энтропии по мере приближения к температуре Козмана за счет увеличения числа молекул, входящих в кинетическую единицу [37,47].

4. Роль примесных локальных колебаний решетки

В формулы вязкости (3) и (6) входит частота колебаний ν_0 кинетических единиц, ответственных за процесс стеклования. Выше мы отмечали, что по Эйрингу $\nu_0 = (2\pi k_B T / \hbar) F_1 / F$, где F_1 и F — суммы состояний активированного комплекса (переходного состояния) и исходного состояния кинетической единицы. Многими исследователями ν_0 трактуется как характерная частота колебаний решетки и, сопоставляется, например, с дебаевской частотой [45]. В действительности переход атома в вакансию, т.е. механизм вязкого течения, определяется частотой локальных колебаний на вакансии и их особенностями. Поэтому желательно провести некоторые оценки величины ν_0 .

Интерес к локализованным состояниям на дефектах и неупорядоченности структуры стал активным в середине XX в. [48–55]. Причиной стало понимание зависимости многообразных свойств твердых тел от их реальной структуры, а также появление новых теоретических и экспериментальных методов. Соответственно, в литературе имеются решенные задачи о локальных колебаниях на вакансии, близкие к нашей задаче.

Первые принципиальные расчеты по влиянию дефектов на колебания кристаллической решетки были выполнены И.М. Лифшицем с сотрудниками [48].

Для одномерных кристаллов достаточно простые формулы были получены в работах [51,52]. Авторы, используя развитый ими общий метод функции Грина, решили задачу локальных колебаний в одномерной простой решетке с единичным нуль-мерным дефектом, которым мог быть атом примеси (в т.ч. изотопической). В общем случае дефект отличался от атомов решетки или массой, или аномальной по упругости связью. Используя этот результат и формально полагая массу дефекта равной нулю, авторы [50] записали частоту локальных колебаний на вакансии в виде

$$\omega = 0.5 \omega_L (\gamma_2 / \gamma_1) / (\gamma_2 / \gamma_1 - 1)^{1/2}, \quad (11)$$

где ω_L — максимальное значение акустической частоты колебаний одномерной бездефектной решетки, γ_1 и $\gamma_2 > \gamma_1$ — упругости связей (в гармоническом приближении), соответствующие взаимодействиям атом–атом неискаженной решетки и вакансии — соседний атом. Задача решена в приближении близкого действия методом последовательных приближений. Примесное колебание характеризуется как пульсирующее антисимметричное (между вакансией и соседним с ней атомом).

Предположение, что упругость γ_2 взаимодействия между вакансией и соседним атомом больше, чем между

атомами основной решетки, вызывает некоторые сомнения. Авторы обосновывают это тем, что возникновение вакансии заставляет соседние с ней атомы несколько сблизиться. Однако это меняет силы взаимодействия, но не обязательно упругость. Сама упругость связей при небольшой деформации может считаться постоянной, а при существенном расстоянии между атомами по обе стороны вакансии γ_2 заведомо меньше γ_1 .

Маделунг ранее [49] показал, что в одномерной простой решетке с одиночным дефектом (примесь, вакансия) возможно возникновение локального колебания с отщеплением частоты выше максимальной акустической при условии, что масса M_1 атома примеси меньше массы M атомов основной решетки. Для вакансии с $M_1 = 0$ это условие выполняется.

В решетке с базисом (например, два атома в ячейке с массами M_2 и M_3) при том же условии (M_1 меньше массы любого атома в ячейке) локальные колебания возникают над оптической ветвью. При этом, как и в обычной оптической ветви, при $k = 0$ атомы в ячейках колеблются в противофазе, но амплитуда колебаний вблизи дефекта увеличена.

Щелевые локальные колебания возникают на границах первой зоны Бриллюэна между энергетическими зонами акустических и оптических колебаний при условии $M_2 > M_1 > M_3$. Для вакансии с $M_1 = 0$ это условие не выполняется. Этот случай приведен на рис. 5, *b*.

Резонансные локальные колебания внутри энергетической зоны акустических колебаний (при малом значении волнового вектора) характеризуются большой амплитудой смещения дефекта, что связано с малыми смещениями большого числа соседних атомов.

Все эти случаи приведены на рис. 5, взятом из монографии [49].

Далее мы рассмотрим динамику цепочки атомов, включающей набор введенных выше „структур“. Для полукачественной оценки локальных колебаний мы будем решать задачу по известной схеме, исходя непосредственно из начальных простых соотношений для сил взаимодействий между атомами.

Фактически мы рассматриваем одномерный кристалл с периодически расположенными вакансиями (рис. 6). Нас интересуют колебания по пути реакции, т.е. продольные колебания по оси x . Такая одномерная задача, естественно, не отражает в полной мере колебания трехмерного кристалла с вакансиями.

Для удобства расчета поместим вакансию в середину „структуры“ и будем считать m четным числом ($m = 2q$), что при огромном значении m вполне допустимо. Пронумеруем атомы в структуре от 1 до $(2q + 1)$, присвоив вакансии номер $(q + 1)$. Первый атом в „структуре“ поместим в начало координат. Расстояние между соседними атомами основной решетки обозначим a , расстояние между атомами около вакансии с номерами q и $(q + 2)$ обозначим b .

Используем гармоническое приближение. В отличие от модели [50], будем рассматривать не формальную

упругость связи между вакансией с нулевой массой и ближайшим к ней атомом, а упругость связи между атомами, разделенными вакансией, т.е. с номерами q и $(q+2)$.

Наша задача близка к учебной задаче динамики одномерного кристалла со сложной решеткой, в которой атомы одинаковые, но чередуются два значения упругости межатомной связи: γ_1 и $\gamma_2 < \gamma_1$ (рис. 7, а).

В этом случае при анализе продольных колебаний по оси x возникают две ветви закона дисперсии: аку-

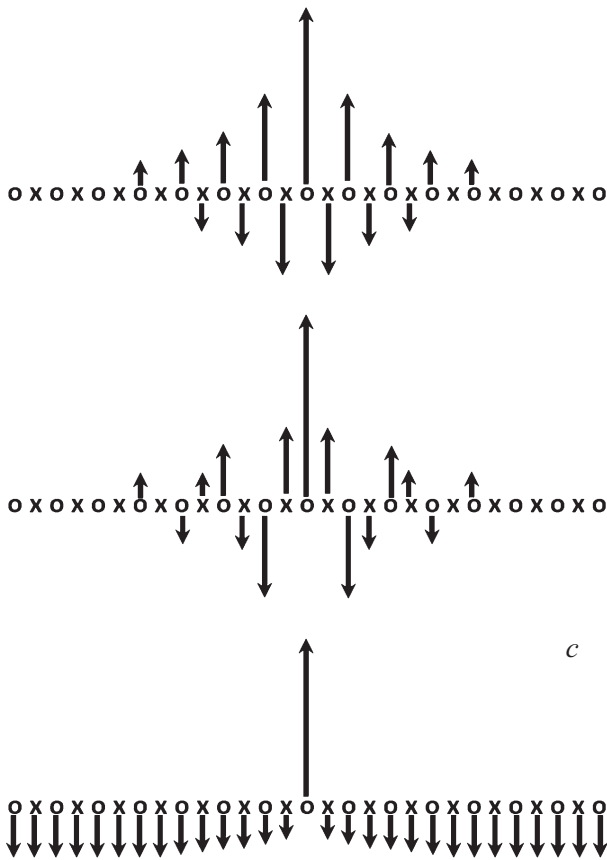


Рис. 5. Сопоставление фаз и амплитуд локальных колебаний на нулевом дефекте и длинноволновых колебаний остальных атомов одномерного кристалла с двухатомным базисом [50].

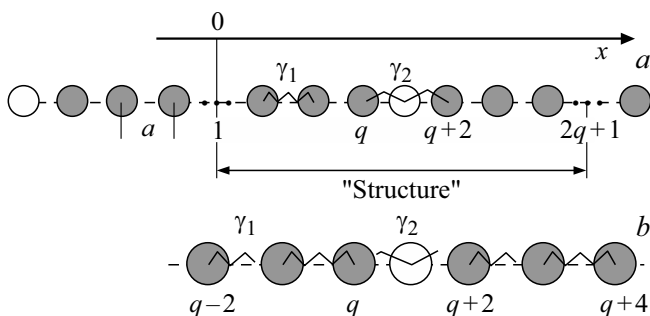


Рис. 6. а) Модель атомной цепочки, состоящей из „структур“; б) область локальных колебаний.

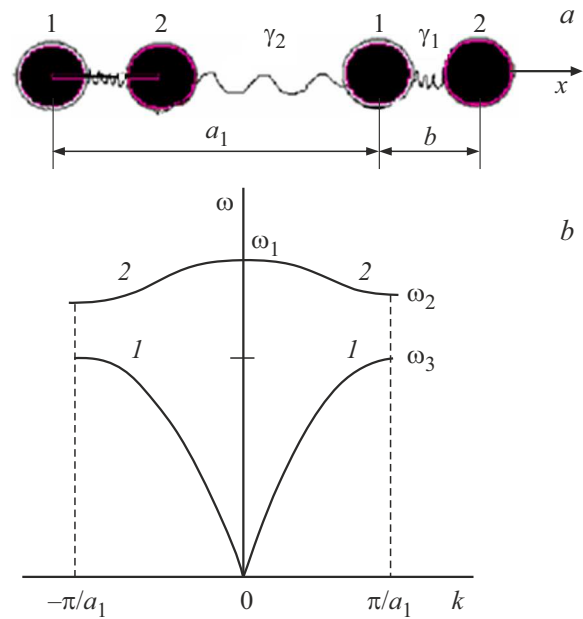


Рис. 7. а) Одномерный кристалл (сложная решетка); б) акустическая (1) и оптическая (2) ветви закона дисперсии в первой зоне Бриллюэна.

стическая и оптическая, с запрещенной зоной между ними (рис. 7, б). Если обозначить A_1 и A_2 амплитуды колебания с частотой ω атомов типа 1 и 2 на рис. 7, а, то при волновом векторе $k \ll \pi/a_1$, где a_1 — вектор элементарной трансляции одномерного кристалла, $A_1 = -A_2$. Это означает, что в длинноволновых колебаниях, т.е. при практически той же фазе, атомы 1 и 2 колеблются навстречу друг другу относительно общего центра тяжести, аналогично внутримолекулярным колебаниям. Частота при этом максимальна (рис. 7, б) и равна $\omega_1 = [2(\gamma_1 + \gamma_2)/M]^{1/2}$.

В рассматриваемом нами случае, в отличие от приведенной выше задачи, между участками со „слабой“ связью (с вакансией) располагается огромное число нормально взаимодействующих атомов.

Полагаем, что для атомов от № 1 до № $(q-2)$ и от № $(q+4)$ до № $(2q+1)$, которые в приближении близкого действия „не ощущают“ наличия вакансии, выполняется закон дисперсии для одномерной простой решетки

$$\omega_L = 2(\gamma_1/M)^{1/2} |\sin(ka/2)|. \quad (12)$$

Максимальное значение частоты равно $2(\gamma_1/M)^{1/2}$.

Длинноволновые колебания основной решетки, с длиной волны существенно больших размеров, чем ее искажения вокруг вакансии (т.е. несколько постоянных решеток), наличие вакансий „не почувствуют“. Известно, что локальные колебания уменьшаются экспоненциально с расстоянием от дефекта. Поэтому внутри нашей „структуры“ выделим дефект, включающий саму вакансию и по два ближайших к ней атома справа и слева (рис. 6, б). Нас интересуют колебания этой

„подструктуры“. Расчет проведен с предположением о центральности действия межатомных сил в гармоническом приближении и в приближении близкодействия.

Обозначим через U и U' амплитуды нормальных колебаний с частотой ω для атомов с номерами $(q-1)$ и $(q+3)$, U_1 и U_2 — для атомов вблизи вакансии с номерами q и $(q+2)$. Считаем колебания атомов номер $(q-2)$ и $(q+4)$ такими же, как колебания атомов основной решетки, их амплитуду обозначим U_0 .

Для силы, действующей на q -й атом, при частоте ω можно записать (учитывая, что первый атом находится в начале координат):

$$\begin{aligned} F &= M\ddot{u}_q = -M\omega^2 U_1 \exp[i(\omega t + ka(q-1))] \\ &= \gamma_1 \{U \exp[i(\omega t + ka(q-2))] \\ &\quad - U_1 \exp[i(\omega t + ka(q-1))]\} \\ &\quad + \gamma_2 \{U_2 \exp[i(\omega t + ka(q-1) + kb)] \\ &\quad - U_1 \exp[i(\omega t + ka(q-1))]\}, \end{aligned}$$

что после сокращений и перехода к косинусам дает

$$U_1[M\omega^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)] + U_2\gamma_2 \cos(kb) + U\gamma_1 \cos(ka) = 0. \quad (13)$$

Аналогично для $(q+2)$ -го атома получим

$$U_2[M\omega^2 - (\gamma_1 + \gamma_2)] + U_1\gamma_2 \cos(kb) + U'\gamma_1 \cos(ka) = 0. \quad (14)$$

Для атомов номер $(q-1)$ и $(q+3)$ формулы имеют следующий вид:

$$U[M\omega^2 - 2\gamma_1] + U_1\gamma_1 \cos(ka) + U_0\gamma_1 \cos(ka) = 0, \quad (15)$$

$$U'[M\omega^2 - 2\gamma_1] + U_2\gamma_1 \cos(ka) + U_0\gamma_1 \cos(ka) = 0. \quad (16)$$

Рассматривая амплитуды колебаний атомов как неизвестные, мы получили 4 уравнения с 5-ю неизвестными. Далее из соображений симметрии можно предположить, что либо $U_1 = U_2$, либо $U_1 = -U_2$, как в случае атомов типа 1 и типа 2 на рис. 7, а.

В первом случае из равенства $U_1 = U_2$ и уравнений (13) и (14) следует равенство $U = U'$, число неизвестных уменьшается до трех (U, U_1, U_0), а число независимых уравнений — до двух. Можно в качестве приближения принять $U = U_0$, тем самым уменьшая область деформаций вокруг вакансии. Тогда мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} U_1[M\omega^2 - (\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_2 \cos(kb)] + U\gamma_1 \cos(ka) = 0, \\ U[M\omega^2 - 2\gamma_1 + \gamma_1 \cos(ka)] + U_1\gamma_1 \cos(ka) = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Тривиальное решение $U_1 = U = 0$ исключаем. В таком случае детерминант системы равен нулю, откуда для $x = M\omega^2$ получаем квадратное уравнение (аналогично упомянутой выше учебной задаче).

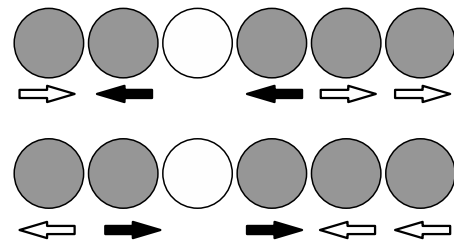


Рис. 8. Направления колебаний атомов одномерного кристалла вокруг вакансии при $k = 0$ и $\omega_2 = (2\gamma_1/M)^{1/2}$.

Для $k = 0$ (длинноволновые колебания) имеем два решения:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = (2\gamma_1/M)^{1/2}. \quad (18)$$

При подстановке этих значений частоты в одно из уравнений (17) получаем соответственно:

- при ω_1 $U_1/U = 1$, атомы по бокам вакансии колеблются в фазе;

- при ω_2 $U_1/U = -1$, что означает, что атомы вокруг вакансии колеблются в противофазе со своими соседями (рис. 8), аналогично колебаниям в оптической ветви рис. 7 при $k = 0$.

Оба значения частоты находятся внутри энергетической зоны акустических колебаний (резонансные колебания).

Во втором случае из предположения, что $U_1 = -U_2$ и уравнений (13) и (14) следует равенство $U = -U'$. Из (15) и (16) вытекает $U_0 = 0$. Получаем два независимых уравнения относительно U и U_1 . Стандартный расчет дает два положительных значения частоты, зависящих от γ_1 и γ_2 . Знак отношения U/U_1 , т. е. симбатность или асимметричность колебаний атомов вокруг вакансии, определяется при этом знаком величины $(\gamma_1 - 2\gamma_2)$.

Таким образом, важной особенностью локальных колебаний на вакансии является их антисимметричность, отмеченная еще в работе [49], способствующая при длинноволновых колебаниях переходу атомов в вакансию.

Дальнейший анализ может включать рассмотрение различных значений параметра b . Из расчетов ряда авторов следует, что размер вакансии должен быть заметно меньше межатомного расстояния. Представляет также интерес вариация упругих констант, учитывающая конкретный потенциал межатомного взаимодействия. В работах последних лет (e.g., [54–57]), использующих более точные теоретические методы, в основном применительно к трехмерным ионным кристаллам, полупроводникам и металлам, важную роль играет выбор модельного потенциала межатомного взаимодействия, в т. ч. с дальним взаимодействием. Характер межатомного взаимодействия определит и соотношение упругостей связей γ_1 и γ_2 .

Наиболее продвинутые модели позволяют численно моделировать фазовые переходы, определять материальные характеристики среды [58–61].

В упомянутых выше работах [54–57] в основном уделено внимание реальным трехмерным решеткам, в т.ч. с дальнедействием и при большой концентрации примесей. Для нашей проблемы вязкого течения в области стеклования существенными являются выводы о наличии определенных критериев по характеристикам нуль-мерного дефекта, при которых появляются локальные колебания, а также критической концентрации дефектов, начиная с которой локальные колебания начинают взаимодействовать. Эти выводы качественно можно увязать с размером вакансии в „структуре“ и температурной зависимостью длины структуры.

5. Выводы

1. Сформулировано различие в двух типах моделей, описывающих роль свободного объема в процессе вязкого течения. В первом случае (модель Френкеля–Эйринга) свободный объем представляет собой вакансию, столкнувшись с которыми, кинетические единицы имеют возможность за счет тепловых флуктуаций перейти в другое равновесное положение. Освободившееся место (вакансия) сохраняется и доступно для перехода в нее следующей соседней кинетической единицы. Во втором случае вакансия создается самим атомом в процессе его теплового колебательного движения. Атом в этом случае может успеть или не успеть перейти в им же созданную вакансию, т.е. сменить равновесное положение. Вакансия исчезает и возникает в другом месте структуры.

2. Предложено уточнение классической структурной модели вязкого течения по Эйрингу, рассматривающее каждый элементарный сдвиг не как единичный акт перехода одного атома через барьер, а как кооперативный процесс последовательных перескоков в группе атомов („структуре“). Процесс аналогичен движению одномерных дислокаций, но происходит за счет термофлуктуационного перехода через потенциальный барьер. Такой подход применим и к моделям второго типа, но параметр m приобретает двойной статистический смысл (пространственный и временной).

3. Уточнение модели приводит к обратно пропорциональной зависимости коэффициента ньютоновской вязкости от концентрации вакансий (относительного свободного объема).

4. С уменьшением температуры концентрация вакансий уменьшается, и длина введенной нами „структуры“ увеличивается. Кооперативный характер всех возмущений в конденсированной среде в действительности делает единичный сдвиг „структуры“ процессом в принципе кооперативным. В таком случае ее удлинение равноценно увеличению эффективного размера кинетической единицы. По мнению некоторых исследователей, увеличение размера кинетической единицы может привести к увеличению потенциального барьера U_0 и дополнительному ускорению процесса стеклования. Это

также коррелирует с представлениями Адамса и Гиббса об уменьшении конфигурационной энтропии по мере приближения к температуре Козмана за счет увеличения числа молекул, входящих в кинетическую единицу.

5. В качестве частоты колебаний кинетических единиц, определяющих вязкость и процесс стеклования, следует рассматривать частоту антисимметричных локальных колебаний на вакансиях.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность Я.М. Бельтюкову за высказанные соображения и плодотворное обсуждение модели.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации „Физика наноструктурированных материалов и высокочувствительная сенсорика: синтез, фундаментальные исследования и приложения в фотонике, науках о жизни, квантовых и нанотехнологиях“ (тема № 124031100005-5).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] P.W. Anderson. *Science* **267**, 5204, 1615 (1995).
- [2] В.Л. Гинзбург. *УФН* **169**, 4, 419 (1999). [V.L. Ginzburg. *Phys. — Uspekhi* **42**, 4, 353 (1999).]
- [3] V. Lubchenko, P.G. Wolynes. *Annu. Rev. Phys. Chem.* **58**, 1, 235 (2007).
- [4] V. Lubchenko. *Adv. Phys.* **64**, 3, 283 (2015).
- [5] V.N. Novikov, E. Rössler, V.K. Malinovsky, N.V. Surovtsev. *Europhys. Lett.* **35**, 4, 289 (1996).
- [6] М.В. Волькенштейн, О.Б. Птицын. *ДАН СССР* **103**, 5, 795 (1955).
- [7] Г.М. Баргтнев. *ДАН СССР* **76**, 2, 227 (1951).
- [8] S.V. Nemilov. *Thermodynamic and Kinetic Aspects of the Vitreous State*. Boca Raton—Ann Arbor—London—Tokyo, CRC Press (1995). 222 p.
- [9] D. Gómez, A. Alegría, A. Arbe. *J. Colmenero. Macromolecules* **34**, 3, 503 (2001).
- [10] J.C. Qiao, Y.H. Chen, R. Casalini, J.M. Pelletier, Y. Yao. *J. Mater. Sci. & Technol.* **35**, 6, 982 (2019).
- [11] B. Wang, Z.Y. Zhou, P.F. Guan, H.B. Yu, W.H. Wang, K.L. Ngai. *Phys. Rev.* **102**, 9, 094205 (2020).
- [12] E. Duval, A. Mermet, N.V. Surovtsev, A.J. Dianoux. *J. Non-Crystalline Solids* **235–237**, 203 (1998).
- [13] В.А. Рыжов, В.А. Берштейн. *ФТТ* **50**, 10, 1901 (2008). [V.A. Ryzhov, V.A. Bershtein. *Phys. Solid State* **50**, 10, 1985 (2008).]
- [14] Yu.G. Vainer, A.V. Naumov, M. Bauer, L. Kador. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 18, 185501 (2006).

- [15] И.О. Райков, Д.А. Конюх, А.Н. Ипатов, Д.А. Паршин. ФТТ **62**, 11, 1907 (2020). [I.O. Raikov, D.A. Conyuh, A.N. Ipatov, D.A. Parshin. Phys. Solid State **62**, 11, 2143 (2020).]
- [16] M.A. Ramos. Low Temperature Phys. **46**, 2, 104 (2020).
- [17] С.В. Адишев, И.В. Зайцева, В.А. Зыкова, В.К. Малиновский, В.Н. Новиков. Автометрия **59**, 3, 3 (2023).
- [18] Д.А. Конюх, Я.М. Бельтюков. ФТТ **62**, 4, 603 (2020). [D.A. Conyuh, Y.M. Beltukov. Phys. Solid State **62**, 4, 689 (2020).]
- [19] В.А. Рыжов. ФТТ **62**, 5, 814 (2020). [V.A. Ryzhov. Phys. Solid State **62**, 5, 926 (2020).]
- [20] А.О. Савостьянов, И.Ю. Еремчев, А.В. Наумов. Фотоника **17**, 7, 508 (2023). [A.O. Savostianov, I.Yu. Eremchev, A.V. Naumov. Photonics Russia **17**, 7, 508 (2023).]
- [21] A.O. Savostianov, I.Yu. Eremchev, T. Plakhotnik, A.V. Naumov. Phys. Rev. B **110**, 4, 045430 (2024).
- [22] А.О. Савостьянов, А.В. Наумов. Письма в ЖЭТФ **120**, 5, 333 (2024). [A.O. Savostianov, A.V. Naumov. JETP Lett. **120**, 5, 322 (2024).]
- [23] Р.Х. Хасаншин, Д.А. Применко. Изв. РАН. Сер. физ. **86**, 5, 633 (2022). [R.H. Khasanshin, D.A. Primenko. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 5, 526 (2022).]
- [24] К. Судзуки, Х. Фудзимори, К. Хадзимото. Аморфные металлы. Металлургия, М. (1987). 328 с. [K. Suzuki, H. Fujimori, K. Hashimoto. Materials Science of Amorphous Metals. Ohm-sha, Tokyo (1982).]
- [25] А.И. Гусев. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии. Физматлит, М. (2005). 416 с.
- [26] A.J. Batshinski. Z. Physik. Chemie **84**, 6, 643 (1913).
- [27] H. Eyring. J. Chem. Phys. **4**, 4, 283 (1936).
- [28] С. Глестон, К. Лейдлер, Г. Эйринг. Теория абсолютных скоростей реакций. ИЛ, М. (1948). 583 с. [S. Glasstone, K.J. Laidler, H. Eyring. The Theory of Rate Processes. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1941).]
- [29] Р. Поуелл, Г. Эйринг. УФН **27**, 2, 265 (1942). [R.E. Powell, H. Eyring. In: Advances in Colloid Science, v. 1 / Ed. E.O. Kraemer. NY / Interscience Pub. (1942). P. 183]
- [30] Я.И. Френкель. Кинетическая теория жидкостей. Изд. АН СССР, М.-Л. (1945). 592 с.
- [31] A.H. Miller. J. Polym. Sci. A-2 Polym. Phys. **4**, 3, 415 (1966).
- [32] Г.М. Бартенев. Строение и механические свойства неорганических стёкол. Стройиздат, М. (1966). 216 с.
- [33] Ю.С. Липатов. Успехи химии **47**, 2, 332 (1978). [Yu.S. Lipatov. Russ. Chem. Rev. **47**, 2, 186 (1978).]
- [34] А.А. Аскадский, В.И. Кондращенко. Компьютерное материаловедение полимеров. Атомно-молекулярный уровень. Научный мир, М. (1999). 543 с.
- [35] A.K. Doolittle. J. Appl. Phys. **22**, 12, 1471 (1951).
- [36] M.H. Cohen, G.S. Grest. Phys. Rev. B **20**, 3, 1077 (1979).
- [37] L. Berthier, G. Biroli. Rev. Mod. Phys. **83**, 2, 587 (2011).
- [38] Т.В. Тропин, Ю. Шмельцер, В.П. Аксенов. УФН **186**, 1, 47 (2016). [T.V. Tropin, Ju.W.P. Schmelzer, V.L. Aksenov. Phys. — Uspekhi **59**, 1, 42 (2016).]
- [39] С.В. Немиллов. Физ. и хим. стекла **3**, 315 (2010).
- [40] S.V. Nemilov. J. Non-Cryst. Solids **352**, 26–27, 2715 (2006).
- [41] А.И. Слуцкер, А.И. Михайлин, И.А. Слуцкер. УФН **164**, 4, 357 (1994). [A.I. Slutsker, A.I. Mihailin, I.A. Slutsker. Phys. — Uspekhi **37**, 4, 335 (1994).]
- [42] И.В. Разумовская, Г.М. Бартенев. Структурное стеклование как „вымерзание“ характерных акустических частот. В кн. Стеклообразное состояние. Труды V Всесоюз. совещ. по стеклообразному состоянию. Наука, Л. 34 (1971).
- [43] Д.С. Сандитов. ЖЭТФ **142**, 1, 123 (2012). [D.S. Sanditov. JETP **115**, 1, 105 (2012).]
- [44] Д.С. Сандитов, М.И. Ожован. УФН **189**, 2, 113 (2019). [D.S. Sanditov, M.I. Ojovan. Phys. — Uspekhi **62**, 2, 111 (2019).]
- [45] Д.С. Сандитов, А.А. Машанов. ЖТФ **87**, 11, 1658 (2017). [D.S. Sanditov, A.A. Mashanov. Tech. Phys. **87**, 11, 1660 (2017).]
- [46] А.И. Слуцкер, В.И. Веттегрень, В.Б. Кулик, В.Л. Гиляров, Ю.И. Поликарпов, Д.Д. Каров. ФТТ **58**, 4, 798 (2016). [A.I. Slutsker, V.I. Vettegren, V.B. Kulik, V.L. Gilyarov, Yu.I. Polikarpov, D.D. Karov. Phys. Solid State **58**, 4, 824 (2016).]
- [47] G. Adam, J.H. Gibbs. J. Chem. Phys. **43**, 1, 139 (1965).
- [48] И.М. Лифшиц. J. Phys. USSR **7**, 211 (1943).
- [49] О. Маделунг. Физика твердого тела. Локализованные состояния: Наука, М. (1985). 183 с. [O. Madelung. Introduction to Solid-State Theory. Springer-Verlag (1978).]
- [50] А. Марадудин, Э. Монтролл, Дж. Вейсс. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. Мир, М. (1965). 210 с. [A.A. Maradudin, E.W. Montroll, J. Weiss. Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation. Academic Press, New York (1963).]
- [51] E.W. Montroll, R.B. Potts. Phys. Rev. **102**, 1, 72 (1956).
- [52] E.W. Montroll, R.B. Potts. Phys. Rev. **100**, 2, 525 (1955).
- [53] А. Марадудин. Дефекты и колебательный спектр кристаллов. Теоретические и экспериментальные аспекты влияния точечных дефектов и неупорядоченностей на колебания кристаллов. Мир, М. (1968). 432 с. [A.A. Maradudin. Solid State Phys. **18**, 273 (1966) & **19**, 1 (1967).]
- [54] М.А. Мамалуй, Е.С. Сыркин, С.Б. Феодосьев. ФТТ **38**, 12, 3683 (1996). [M.A. Mamalui, E.S. Syrkin, S.B. Feodos'ev. Phys. Solid State **38**, 12, 2006 (1996).]
- [55] Е.С. Сыркин, С.Б. Феодосьев. ФНТ **20**, 6, 586 (1994). [E.S. Syrkin, S.B. Feodos'ev. Low Temperature Phys. **20**, 6, 463 (1994).]
- [56] М.А. Мамалуй, Е.С. Сыркин, С.Б. Феодосьев. ФНТ **24**, 8, 586 (1998). [M.A. Mamalui, E.S. Syrkin, S.B. Feodos'ev. Low Temperature Phys. **24**, 8, 583 (1998).]
- [57] М.А. Мамалуй, Е.С. Сыркин, С.Б. Феодосьев. ФНТ **25**, 1, 72 (1999). [M.A. Mamalui, E.S. Syrkin, S.B. Feodos'ev. Low Temperature Phys. **25**, 1, 55 (1999).]
- [58] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. Изв. РАН. Сер. физ. **75**, 8, 1103 (2011). [A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **75**, 8, 1042 (2011).]
- [59] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев. Изв. РАН. Сер. физ. **77**, 10, 1452 (2013). [A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **77**, 10, 1248 (2013).]
- [60] А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы, М.К. Бадиев. ЖЭТФ **144**, 6, 1239 (2013). [A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, F.A. Kassan-Ogly, M.K. Badiev. JETP **117**, 6, 1091 (2013).]
- [61] К.Ш. Муртазаев, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.А. Магомедов. Изв. РАН. Сер. физ. **86**, 2, 182 (2022). [K.Sh. Murtazaev, A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.A. Magomedov. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 2, 130 (2022).]

Редактор Е.В. Толстякова