01

Аналитическое решение для населенностей энергетических уровней щелочных металлов в условиях оптической накачки при перемешивании подуровней возбужденного состояния

© Ф.С. Свиридов[1,2], А.К. Вершовский[1¶]

[1] ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Академический университет им. Ж.И. Алферова,
Санкт-Петербург, Россия

¶ e-mail: antver@mail.ioffe.ru

Поступила в редакцию 29.11.2024 г.
В окончательной редакции 29.11.2024 г.
Принята к публикации 12.12.2024 г.

Аналитически решена система балансных уравнений, описывающая населенности энергетических уровней основного состояния и общую населенность возбужденного состояния щелочных металлов при оптической накачке в условиях, когда столкновения с буферным газом вызывают полное перемешивание подуровней возбужденного состояния. Такая ситуация реализуется в целом ряде квантовых сенсоров — таких, как стандарты частоты, гироскопы, магнитометры, использующих в качестве чувствительного элемента ячейку с парами щелочного металла и буферным инертным газом. Приводится сравнение с экспериментом. Результаты могут быть использованы для спектроскопического неразрушающего контроля газового состава таких ячеек.

Ключевые слова: оптически детектируемый магнитный резонанс, оптическая накачка, релаксация.

DOI: 10.61011/OS.2024.12.59804.7375-24

Введение

Среди квантовых оптических сенсоров особое место по распространенности и разнообразию занимают сенсоры, основанные на различных модификациях оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР) в основном состоянии щелочных металлов. Развитие компактных источников лазерной накачки — полупроводниковых лазеров с распределенной обратной связью, а затем с вертикальными резонаторами, обусловило возможность разработки миниатюрных оптических квантовых сенсоров [1], таких как микроразмерные стандарты частоты [2,3], квантовые магнитометры [4–8] и датчики поворота или гироскопы [9,10]. Основным чувствительным элементом во всех этих устройствах является прозрачная ячейка, содержащая атомы щелочного металла, а также буферный инертный газ или смесь инертных газов, замедляющий диффузию атомов к стенкам ячейки, а следовательно, и релаксацию подуровней основного состояния щелочного металла.

Одной из наиболее сложных задач при производстве миниатюрных квантовых сенсоров является изготовление ячеек со строго выдерживаемыми давлениями компонент газовой смеси [11,12] и их неразрушающий контроль, который после герметизации (отпайки) ячейки может быть произведен только спектроскопическими средствами [13,14]. Каждый буферный газ вызывает свойственные только ему сдвиг и уширение спектральных линий, поэтому в случае одно- или двухкомпонентной газовой смеси исследование этих параметров может дать полную информацию о ее составе [15].

Этот метод предполагает сканирование лазерного излучения по частоте в окрестности D_1- или D_2-линий поглощения и детектирование поглощения в ячейке. При этом параметры линии поглощения оказываются искажены процессами оптической (в первую очередь сверхтонкой) накачки: для просветления среды за счет сверхтонкой оптической накачки требуется на много порядков меньшая интенсивность, чем для ее „традиционного“ для оптической спектроскопии просветления за счет насыщения оптического перехода. Величина просветления при этом оказывается частотно зависимой, что приводит к искажениям контура спектральной линии. Учет этих искажений требует расчета населенностей в условиях присутствия оптической накачки и буферного газа. Такие расчеты проводились многократно, начиная с основополагающих работ [16–18] и вплоть до последнего времени [19–21]; решение конкретной задачи для ^{87}Rb приведено в [22]. В настоящей работе предлагается простая модель для такого расчета и приводятся ее универсальные, т.е. действительные для любых щелочных металлов, аналитические решения.

Теория

Как уже было сказано, рабочая ячейка содержит атомы щелочного металла, а также буферный инертный газ

(или смесь инертных газов), замедляющий пристеночную релаксацию. При этом определяющим механизмом релаксации становится обмен спиновыми состояниями между атомами металла. Ввиду того, что сечения столкновения с атомами (молекулами) буферного газа для возбужденных состояний на порядки превышают сечения для основного состояния, в ячейках с буферными газами или газовыми смесями уже при давлениях порядка 3–10 Torr происходит так называемое перемешивание подуровней возбужденного состояния — за время, которое атом проводит в возбужденном состоянии, населенности подуровней этого состояния успевают выровняться за счет столкновений [18]. В результате скорости заселения подуровней основного состояния оказываются одинаковы (в чем легко убедиться, просуммировав вероятности переходов на каждый подуровень основного состояния со всех подуровней возбужденного состояния, см. далее), и разность их населенностей обусловлена только разностью скоростей оптического возбуждения — так называемая откачка („depopulation pumping“).

Рассмотрим (рис. 1) схему подуровней основного состояния атома щелочного металла с ядерным спином $I = 3/2$. К таким атомам относятся ^{7}Li, ^{23}Na, ^{39}K, ^{41}K, ^{87}Rb. Наиболее часто в схемах квантовых сенсоров используется атом ^{87}Rb, и в дальнейшем под атомом щелочного металла будем подразумевать именно его. Следующими по степени используемости в квантовой сенсорике являются атомы цезия Cs с ядерным спином $I = 7/2$, ^{87}Rb ($I = 5/2$) и изотопы калия ^{39}K и ^{41}K ($I = 3/2$). Решения для них находятся аналогичным образом. Каждый сверхтонкий уровень $F = I \pm 1/2$ основного ($S_{1/2}$) и возбужденного ($P_{1/2}$) состояний в магнитном поле расщепляется на $2F + 1$ магнитных (или зеемановских) подуровней с проекциями момента $m_F = -F,\ F+1,\ \ldots,\ F-1,\ F$. Общее количество этих подуровней $N = 2(2I + 1)$, соответственно в случае ^{87}Rb $N = 8$. При комнатной температуре зеемановские подуровни основного состояния заселены равномерно, поскольку сверхтонкое расщепление основного состояния $5S_{1/2}$ для ^{87}Rb (6.8 GHz) и $6S_{1/2}$ для Cs (9.2 GHz) в энергетической шкале не превышает 10^{-3} от тепловой энергии kT. Благодаря перемешиванию подуровней возбужденного состояния их можно рассматривать как один уровень с населенностью n_e и скоростью распада Γ. В результате мы получаем систему из $N + 1$ линейных балансных уравнений для населенностей вида

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}n_i = -p_i n_i - \gamma n_i + \frac{\gamma}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} n_i + \frac{\Gamma}{N} n_e = 0, \\ \frac{d}{dt}n_e = -\Gamma n_e + \sum\limits_{i=1}^{N} p_i n_i = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$, n_i — населенности зеемановских подуровней основного состояния, γ — темновая (т.е. измеренная в отсутствие света накачки) скорость релаксации в основном состоянии, $p_i \sim C_i P(\omega) I_p$ — скорость оптической откачки с уровня i, ω — частота света, I_p — интенсивность света накачки, $P(\omega)$ — распределение, соответствующее форме линии поглощения, коэффициенты C_i пропорциональны квадратам модулей дипольных матричных элементов: $C_i \sim |d_{fi}|^2$.

Значения коэффициентов C_i для всех возможных переходов D_1-линии в атоме ^{87}Rb приведены в табл. 1, в атоме Cs — в табл. 2. Эти значения с точностью до константы могут быть рассчитаны по формуле

$$|d_{fi}| \sim \sqrt{2F_1 + 1} \begin{Bmatrix} I & J_1 & F_1 \\ 1 & F_2 & J_2 \end{Bmatrix} C^{F_2 m_{F2}}_{F_1 m_{F1} 1 p}, \tag{2}$$

где $p = 0, \pm 1$ — поляризация, I — спин ядра атома, J — полный электронный момент, F — полный момент атома, индексы 1, 2 обозначают начальное и конечное состояния соответственно. В формуле использованы $6j$-символы и коэффициенты Клебша–Гордана [23,24]. Значение $p = 0$ соответствует $\pi_{\|}$-поляризации света (линейной с азимутом, параллельным полю), значения $p = -1$ и $p = +1$ — круговым поляризациям σ^- ($\Delta m_F = -1$) и σ^+ ($\Delta m_F = +1$) соответственно.

На рис. 2 коэффициенты скоростей оптической откачки C_i, приведенные в табл. 1 и 2, представлены графически. Из графиков видно, что во всех рассмотренных случаях эффект оптической накачки отсутствует, когда интенсивности излучений с круговыми σ^+ и σ^- равны (следовательно, сумма этих излучений представляет собой линейно поляризованное излучение с интенсивностью $I_{\pi\perp} = I_{\sigma^+} + I_{\sigma^-} = 2I_{\sigma^+} = 2I_{\sigma^-}$), и каждая из этих интенсивностей равна интенсивности излучения с линейной $\pi_{\|}$-поляризацией ($I_{\sigma^+} = I_{\sigma^-} = I_{\pi\|}$), откуда следует $I_{\pi\perp} = 2I_{\pi\|}$. Это условие выполняется при накачке линейно поляризованным излучением, плоскость поляризации которого расположена под углом $\varphi_M = \arccos(1/\sqrt{3})$ к магнитному полю (так называемый „магический угол“ [25]). С увеличением значения магнитного момента и соответственно числа задействованных подуровней коэффициенты приближаются к классическому пределу.

В уравнениях (1) первое слагаемое описывает откачку под действием света, второе и третье — спиновую релаксацию подуровней основного состояния, четвертое — релаксацию возбужденного состояния, которое рассматривается как один уровень без сверхтонкой структуры. Если сложить все уравнения (1), то получим условие сохранения количества атомов в системе

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} n_i + n_e\right) = 0. \tag{3}$$

Примем следующее условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{N} n_i + n_e = 1. \tag{4}$$

Прямое решение системы (1) по мере увеличения количества уровней становится все более сложным

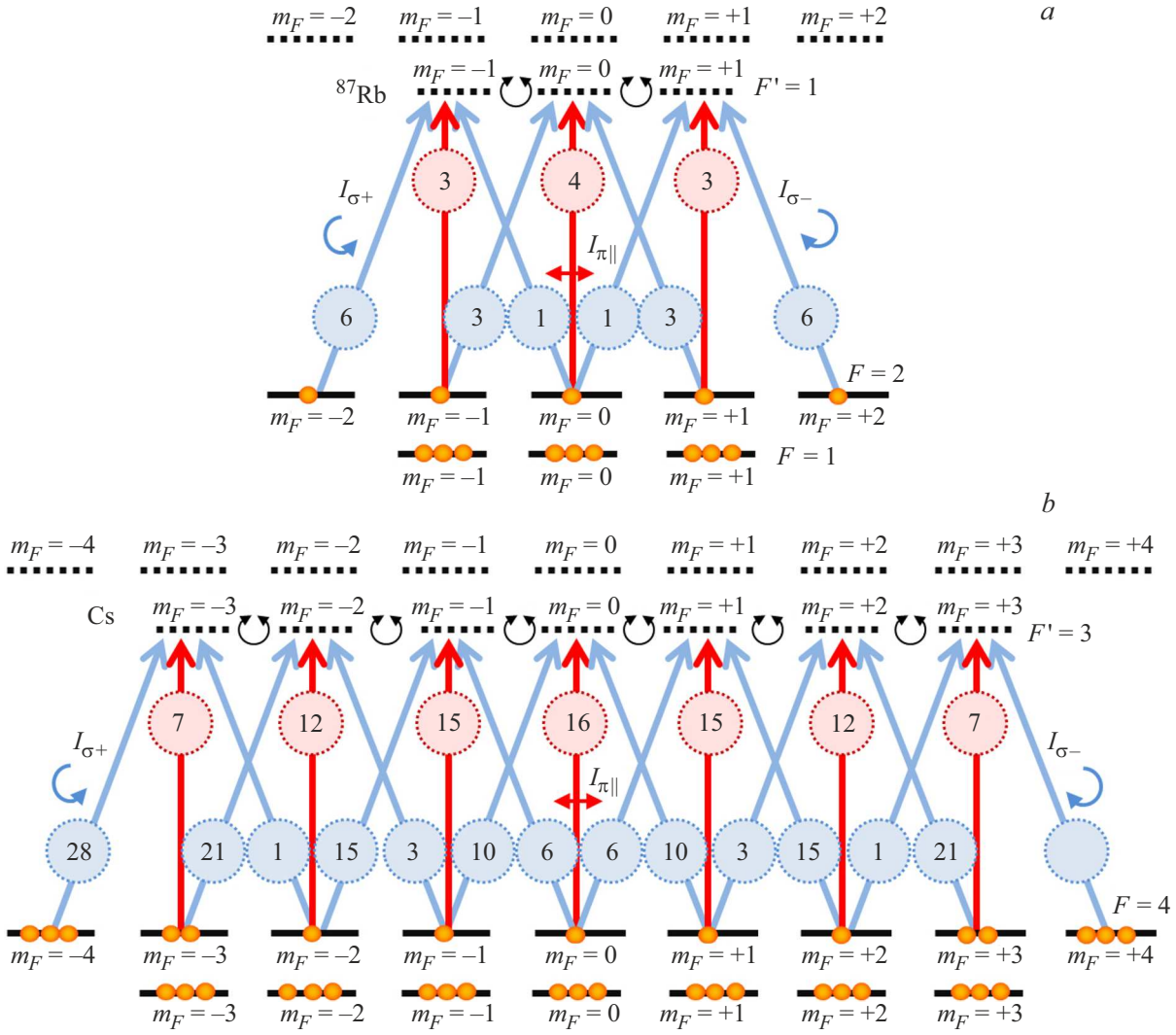


Рис. 1. Схемы зеемановских подуровней основного состояния атомов щелочных металлов: (*a*) рубидия ^{87}Rb и (*b*) Cs. Цифрами на стрелках обозначены относительные вероятности возбуждения под воздействием света с круговыми (σ^+, σ^-) и линейной ($\pi_\|$, $\mathbf{E} \| \mathbf{B}$) поляризациями, резонансного переходу $F = I + 1 \to F' = I - 1$.

и громоздким. Уже для $N = 3$ и $i = 1$ оно выглядит следующим образом:

$$n_1 = \frac{\Gamma(\gamma + p_2)(\gamma + p_3)}{\Gamma p_1 p_2 + 3 p_1 p_2 p_3 + \Gamma(p_1 + p_2) p_3 + \gamma^2(3\Gamma + p_1 + p_2 + p_3) + 2\gamma(p_1 p_2 + (p_1 + p_2) p_3 + \Gamma(p_1 + p_2 + p_3))}. \quad (5)$$

Тем не менее это решение может быть существенно упрощено и записано в виде, общем для любых i и N. Если ввести обозначения $W_i = p_i + \gamma$ (полная скорость ухода атомов с уровня i) и $\tau_i = 1/W_i$ (время жизни уровня i), а также A (среднее взвешенное скоростей p_i с весами τ_i):

$$A = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{W_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{W_j} \right)^{-1} = \frac{\Sigma_i (p_i \tau_i)}{\Sigma_j \tau_j}, \quad (6)$$

решением системы (1) будет

$$n_i = \frac{\Gamma}{A + \Gamma} \frac{\tau_i}{\Sigma_j \tau_j},$$

$$n_e = \frac{A}{A + \Gamma}. \quad (7)$$

Полученное решение легко проверить подстановкой в исходную систему: используя условие нормировки (4), заменяем сумму $\sum\limits_i n_i = 1 - n_e$ в первых N уравнениях системы (1), затем подставляем n_i и n_e (7), правые части уравнений принимают вид

$$-\frac{\Gamma}{A + \Gamma}(p_i + \gamma) \frac{\tau_i}{\Sigma_j \tau_j} + \frac{\Gamma}{A + \Gamma} \frac{A + \gamma}{N}, \quad (8)$$

где по определению $(p_i + \gamma)\tau_i = 1$, и тогда

$$A + \gamma = \frac{\Sigma_i (p_i \tau_i)}{\Sigma_j \tau_j} + \gamma = \frac{\Sigma_i (p_i + \gamma) \tau_i}{\Sigma_j \tau_j} = \frac{N}{\Sigma_j \tau_j}. \quad (9)$$

Таблица 1. Коэффициенты скоростей оптической откачки C_i для магнитных подуровней основного состояния атомов рубидия ^{87}Rb при накачке светом D_1-линии со следующими поляризациями: круговая σ^+, круговая σ^-, линейная $\pi_\parallel$ ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$), линейная $\pi_\perp$ ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$). Для наглядности представления значения были умножены на общий знаменатель k

$F \to F'$	m_F	$F' = 1$				$F' = 2$			
		σ^+	σ^-	$\pi_\parallel$	$\pi_\perp$	σ^+	σ^-	$\pi_\parallel$	$\pi_\perp$
$F = 1$	−1	0	5	5	2.5	6	1	3	3.5
	0	5	5	0	5	3	3	4	3
	1	5	0	5	2.5	1	6	3	3.5
k		10				10			
$F = 2$	−2	0	6	0	3	0	2	4	1
	−1	0	3	3	1.5	2	3	1	2.5
	0	1	1	4	1	3	3	0	3
	1	3	0	3	1.5	3	2	1	2.5
	2	6	0	0	3	2	0	4	1
k		10				10			

Таблица 2. Коэффициенты скоростей оптической откачки C_i для магнитных подуровней основного состояния атомов рубидия ^{87}Rb при накачке светом D_1-линии со следующими поляризациями: круговая σ^+, круговая σ^-, линейная $\pi_\parallel$ ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$), линейная $\pi_\perp$ ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$). Для наглядности представления значения были умножены на общий знаменатель k

$F \to F'$	m_F	$F' = 3$				$F' = 4$			
		σ^+	σ^-	$\pi_\parallel$	$\pi_\perp$	σ^+	σ^-	$\pi_\parallel$	$\pi_\perp$
$F = 3$	−3	0	3	9	1.5	28	1	7	14.5
	−2	3	5	4	4	21	3	12	12
	−1	5	6	1	5.5	15	6	15	10.5
	0	6	6	0	6	10	10	16	10
	1	6	5	1	5.5	6	15	15	10.5
	2	5	3	4	4	3	21	12	12
	3	3	0	9	1.5	1	28	7	14.5
k		$7 \times 4 = 28$				$21 \times 4 = 84$			
$F = 4$	−4	0	28	0	14	0	4	16	2
	−3	0	21	7	10.5	4	7	9	5.5
	−2	1	15	12	8	7	9	4	8
	−1	3	10	15	6.5	9	10	1	9.5
	0	6	6	16	6	10	10	0	10
	1	10	3	15	6.5	10	9	1	9.5
	2	15	1	12	8	9	7	4	8
	3	21	0	7	10.5	7	4	9	5.5
	4	28	0	0	14	4	0	16	2
k		$21 \times 4 = 84$				$15 \times 4 = 60$			

Этим обеспечивается равенство нулю выражения (8), последнее равенство системы также легко проверяется прямой подстановкой значений (7).

В ячейках с парами щелочного металла соотношение Γ/γ в зависимости от давления буферного газа может составлять $\Gamma/\gamma \sim 10^5 - 10^7$. Таким образом, можем полагать, что в ячейках с тепловыми атомами $\Gamma/\gamma \gg 1$. Поскольку оптимизация параметров квантового сенсора требует выполнения условия $p_i \sim k\gamma$, где $k = 3-5$ [26], также можем считать, что $\Gamma/A \gg 1$ — в ячейках любых используемых на практике размеров это справедливо при всех технически достижимых мощностях лазерной накачки. Тогда решение (7) сводится к

$$n_i \sim \frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j},$$

$$n_e \sim 0. \qquad (10)$$

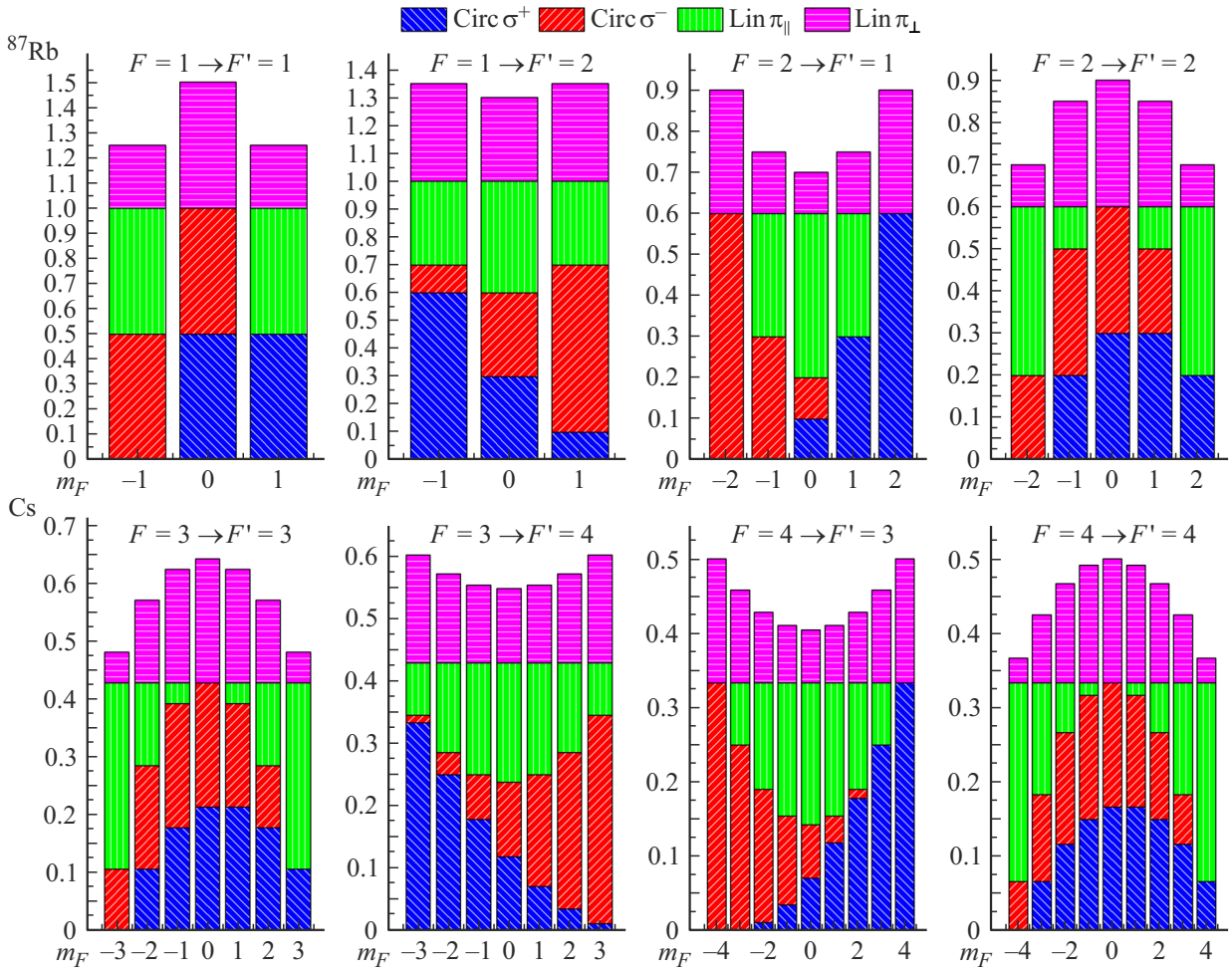


Рис. 2. Диаграммы коэффициентов скоростей оптической откачки C_i, приведенных в табл. 1 и 2, для магнитных подуровней основного состояния атомов рубидия ^{87}Rb и цезия Cs при накачке светом D_1-линии со следующими поляризациями: круговая σ^+, круговая σ^-, линейная $\pi_\parallel$ ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$), линейная ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$).

Таким образом, в отсутствие учета конечного времени релаксации возбужденного состояния результат предельно упрощается: населенность каждого уровня при чистой „откачке“ равна отношению времени жизни этого уровня к сумме времен жизни всех уровней.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости населенностей уровней основного состояния атома рубидия ^{87}Rb от интенсивности света I/γ, вычисленные согласно (7) соответственно для левой циркулярной поляризации и для линейной поляризации, параллельной магнитному полю.

Рассмотрим также предельный случай сильной интенсивности света накачки ($\Sigma p_i/N \gg \gamma$). Пусть на систему падает свет σ^+-поляризации. В таком случае существует единственный зеемановский подуровень i_0, не взаимодействующий с оптической накачкой — для ^{87}Rb это подуровень $m_F = 2$, для которого соответствующая скорость $C_{i0} = 0$. Следовательно, можно ожидать, что большая часть атомов будет находиться именно в этом состоянии. В предельном случае $I \to \infty$ это количество будет зависеть от отношения релаксации возбужденного состояния к темновой релаксации, Γ/γ. Выполняя предельный переход $I \to \infty$ в выражениях для населенностей (7), находим

$$n_i = \frac{\Gamma}{(N-1)\gamma + \Gamma}\delta_{i,i_0},$$
$$n_e = \frac{(N-1)\gamma}{(N-1)\gamma + \Gamma}. \qquad (11)$$

В ячейках с парами щелочного металла и буферным газом $\Gamma/\gamma \gg 1$ и $n_{i0} \approx 1$.

Эксперимент

Полученные зависимости были нами проверены экспериментально. Для этого были измерены профили поглощения в ячейке, содержащей пары рубидия ^{87}Rb и ~ 30 Torr буферного газа (смесь Ar и Ne), в окрестности D_1-линии поглощения. Использовался полупроводнико-

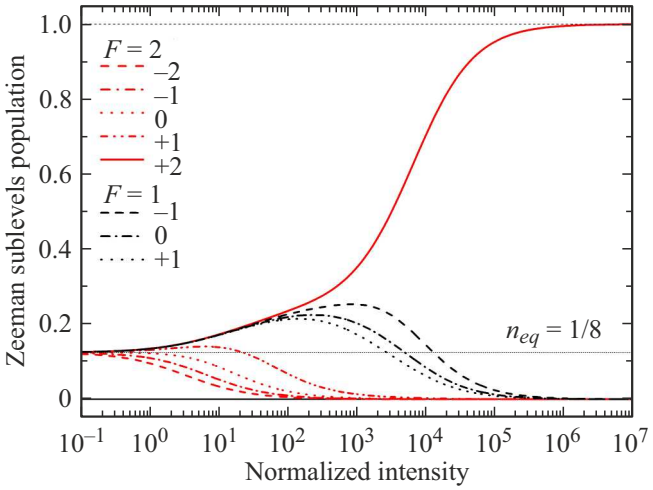


Рис. 3. Населенности уровней атома рубидия ^{87}Rb в зависимости от интенсивности света. Оптическая накачка циркулярно поляризована (σ^+-поляризация), частота света накачки резонансна низкочастотному переходу $F = 2 \to F' = 1$, распределение $P(\omega)$ считается лоренцевым с шириной $\gamma_L = 400$ MHz. Интенсивность света нормирована на темновую скорость релаксации γ, отношение $\Gamma/\gamma = 10^6$.

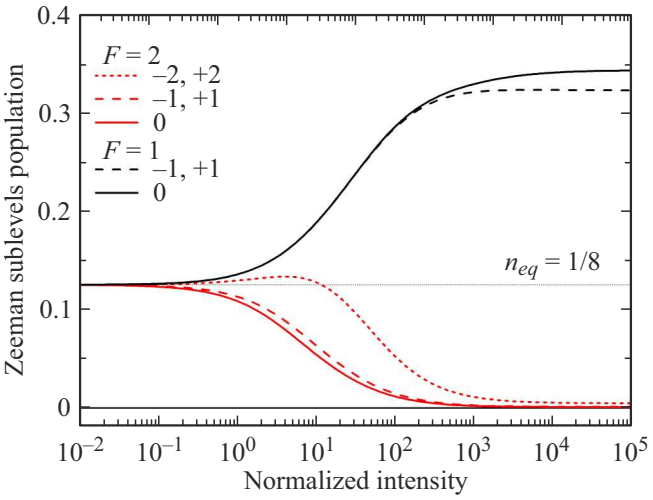


Рис. 4. Населенности уровней рубидия ^{87}Rb в зависимости от интенсивности света. Азимут линейной поляризации оптической накачки параллелен магнитному полю ($\pi_\parallel$-поляризация), остальные параметры те же, что на рис. 3.

вый лазер с внешним резонатором производства компании VitaWave (Троицк, Москва). Поскольку контуры поглощения, соответствующие переходам с одного сверхтонкого уровня основного состояния, плохо разрешены (вставка на рис. 5), мы сравнивали экспериментально измеренное интегральное поглощение (суммарную площадь контуров $F = 2 \to F = 1, 2$) с результатом расчета по (7) и (12):

$$\int K(\omega)d\omega = \int \sum_{i=1}^{N} C_i n_i(\omega)d\omega. \qquad (12)$$

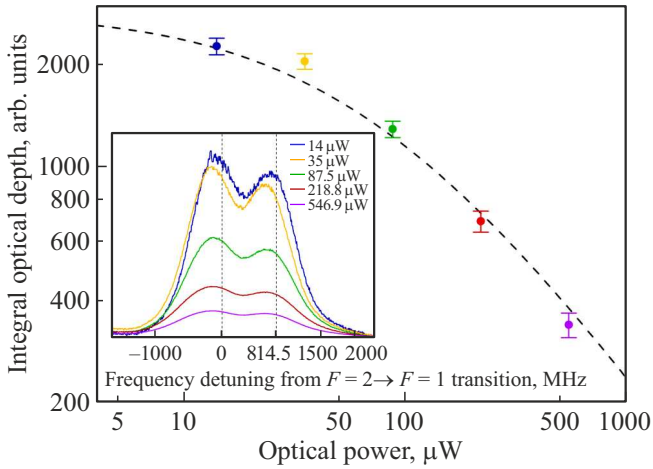


Рис. 5. Оптическая плотность паров рубидия ^{87}Rb в окрестности D_1-линии поглощения в ячейке, содержащей ~ 30 Torr буферного газа (смесь Ar и Ne), в зависимости от интенсивности света. Штриховая линия — теория, точки — эксперимент. На вставке — контуры поглощения при интенсивностях, соответствующих экспериментальным точкам на графике.

При этом были учтены искажающие контур эффекты сверхтонкой накачки (рис. 4). При сравнении производилась подгонка теоретической кривой по параметру интенсивности.

Рисунок 5 демонстрирует хорошее совпадение теории с экспериментом. Избыточный разброс точек связан с погрешностью определения базовой линии в условиях конечного диапазона непрерывной перестройки лазера. Отметим, что такое совпадение с экспериментом не удается получить для каждого отдельного контура.

Выводы

Нами получено аналитическое решение системы линейных балансных уравнений для населенностей уровней — общее для любого их количества и, следовательно, для любых значений ядерного спина I, т.е. для любых щелочных металлов. Полученное решение проверено сравнением с экспериментом, проведенным на ячейке с ^{87}Rb. Результаты могут быть использованы для расчета спектральных характеристик поглощения в ячейках миниатюрных квантовых сенсоров, в том числе при спектроскопическом неразрушающем контроле газового состава таких ячеек.

Финансирование работы

Настоящее исследование финансировалось в рамках темы FFUG-2024-0039 ФТИ им. А.Ф. Иоффе.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] C.L. Degen, F. Reinhard, P. Cappellaro. Rev. Mod. Phys., **89** (3), 035002 (2017). DOI: 10.1103/RevModPhys.89.035002

[2] S. Knappe, P. Schwindt, V. Shah, L. Hollberg, J. Kitching, L. Liew, J. Moreland. Opt. Express, **13** (4), 1249 (2005). DOI: 10.1364/OPEX.13.001249

[3] J. Kitching. Appl. Phys. Rev., **5** (3), 238 (2018). DOI: 10.1063/1.5026238

[4] D. Budker, M. Romalis. Nature Physics, **3**, 227 (2007). DOI: 10.1038/nphys566

[5] T.H. Sander, J. Preusser, R. Mhaskar, J. Kitching, L. Trahms, S. Knappe. Biomed. Opt. Express, **3** (5), 981 (2012). DOI: 10.1364/BOE.3.000981

[6] H. Korth, K. Strohbehn, F. Tejada, A.G. Andreou, J. Kitching, S. Knappe, S.J. Lehtonen, S.M. London, M. Kafel. J. Geophys. Res. Space Physics, **121** (8), 7870 (2016). DOI: 10.1002/2016JA022389

[7] E. Boto, N. Holmes, J. Leggett, G. Roberts, V. Shah, S.S. Meyer, L.D. Muñoz, K.J. Mullinger, T.M. Tierney, S. Bestmann, G.R. Barnes, R. Bowtell, M.J. Brookes. Nature, **555**, 657 (2018). DOI: 10.1038/nature26147

[8] O. Alem, K.J. Hughes, I. Buard, T.P. Cheung, T. Maydew, A. Griesshammer, K. Holloway, A. Park, V. Lechuga, C. Coolidge et al. Frontiers in Neuroscience, **17**, 1014 (2023). DOI: 10.3389/fnins.2023.1190310

[9] D. Meyer, M. Larsen. Gyroscopy and Navigation, **5** (2), 75 (2014). DOI: 10.1134/S2075108714020060

[10] А.К. Вершовский, Ю.А. Литманович, А.С. Пазгалев, В.Г. Пешехонов. Гироскопия и навигация, **26** (1), 55-80 (2018). DOI: 10.17285/0869-7035.2018.26.1.055-080 [A.K. Vershovskii, Yu.A. Litmanovich, A.S. Pazgalev, V.G. Peshekhonov. Gyroscopy and Navigation, **9** (3), 162 (2018). DOI: 10.1134/S2075108718030100].

[11] O. Kozlova, S. Guérandel, E. de Clercq. Phys. Rev. A, **83** (6), 062714 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.83.062714

[12] N. Almat, M. Gharavipour, W. Moreno, F. Gruet, C. Affolderbach, G. Mileti. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, **67** (1), 207 (2020). DOI: 10.1109/TUFFC.2019.2940903

[13] G.A. Pitz, A.J. Sandoval, T.B. Tafoya, W.L. Klennert, D.A. Hostutler. JQSRT, **140**, 18 (2014). DOI: 10.1016/j.jqsrt.2014.01.024

[14] A. Andalkar, R.B. Warrington. Phys. Rev. A, **65** (3), 032708 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032708

[15] J. Peng, Z. Liu, K. Yin, S. Zou, H. Yuan J. Phys. D, **55** (36), 365005 (2022). DOI: 10.1088/1361-6463/ac73c0

[16] F.A. Franz. Phys. Rev., **141** (1), 105 (1966). DOI: 10.1103/PhysRev.141.105

[17] F.A. Franz, J.R. Franz. Phys. Rev., **148** (1), 82 (1966). DOI: 10.1103/PhysRev.148.82

[18] W. Happer. Rev. Mod. Phys., **44** (2), 169 (1972). DOI: 10.1103/RevModPhys.44.169

[19] Е.Н. Попов, В.А. Бобрикова, С.П. Воскобойников, К.А. Баранцев, С.М. Устинов, А.Н. Литвинов, А.К. Вершовский, С.П. Дмитриев, В.А. Картошкин, А.С. Пазгалев, М.В. Петренко. Письма в ЖЭТФ, **108** (8), 543–548 (2018). DOI: 10.1134/S0370274X18200043 [E.N. Popov, V.A. Bobrikova, S.P. Voskoboinikov, K.A. Barantsev, S.M. Ustinov, A.N. Litvinov, A.K. Vershovskii, S.P. Dmitriev, V.A. Kartoshkin, A.S. Pazgalev, M.V. Petrenko. JETP Letters, **108** (8), 513 (2018). DOI: 10.1134/S0021364018200122].

[20] К.А. Баранцев, Е.Н. Попов, А.Н. Литвинов. Квант. электрон., 2017, **47** (9), 812–817. [K.A. Barantsev, E.N. Popov, A.N. Litvinov. Quant. Electron., **47** (9), 812 (2017). DOI: 10.1070/QEL16447].

[21] A. Van Lange, P. Van der Straten, D. Van Oosten. J. Phys. B, **53** (12), 125402 (2020). DOI: 10.1088/1361-6455/ab7fc2

[22] А.К. Вершовский, А.С. Пазгалев, Ф.С. Свиридов. Опт. и спектр., **132** (12), 1210–1213 (2024). [A.K. Vershovskii, A.S. Pazgalev, F.S. Sviridov. Opt. Spectrosc. **132** (12), 1210–1213 (2024).

[23] I.I. Sobelman. *Atomic Spectra and Radiative Transitions*, vol. 12 (Springer Science & Business Media, 2012).

[24] D. Varshalovich, A. Moskalev, V. Khersonskii. *Quantum Theory of Angular Momentum* (World scientific, 1988).

[25] S. Schott, A. Steinbacher, J. Buback, P. Nuernberger, T. Brixner. J. Phys. B, **47** (12), 124014 (2014). DOI: 10.1088/0953-4075/47/12/124014

[26] А.К. Вершовский, А.С. Пазгалев. ЖТФ, **78** (5), 116–124 (2008). DOI: 10.3367/UFNe.0179.200906f.0605 [A.K. Vershovskii, A.S. Pazgalev. Technical Physics, **53** (5), 646 (2008). DOI: 10.1134/S1063784208050198].