

03

Шестиугольник Сатурна как форма внутренних волн Стокса

© Э.Л. Амромин

Federal Way WA 98003, USA
e-mail: amromin@aol.com

Поступило в Редакцию 8 мая 2024 г.
В окончательной редакции 6 июля 2024 г.
Принято к публикации 7 июля 2024 г.

Рассмотрена упрощенная двумерная задача о внутренних волнах Стокса внутри круга с двумя несжимаемыми жидкостями различной плотности и вихрем вокруг центра этого круга; стационарные течения существуют внутри и снаружи волновой поверхности, разделяющей две жидкости. Форма поверхности определена путем решения нелинейных задач теории потенциала. Численные решения для различных соотношений плотности жидкости и радиуса окружности к размеру стороны шестиугольника сравнены с наблюдаемым шестиугольником — образованием на поверхности Сатурна.

Ключевые слова: потенциал скорости, внутренние волны Стокса, скачок плотности в несжимаемой жидкости, итерационный численный метод.

DOI: 10.61011/JTF.2024.10.58856.163-24

Введение

На различных фотографиях поверхности Сатурна виден правильный шестиугольник с четко выраженными углами в 120° . Упрощенная схема такого изображения показана на рис. 1. Соответствующий атмосферный поток был объектом разнообразных численных исследований и гипотез. Между тем многоугольные фигуры появляются в различных потоках. Они могут существовать между вращающимися дисками [1,2] и вокруг вращающихся многолопастных устройств [3]. Эти фигуры не вызваны турбулентностью, хотя такая причина и

предполагалась в некоторых публикациях. Также было отмечено [4], что „устойчивая гексагональная структура может возникнуть . . . , когда динамические неустойчивости в зональной струе нелинейно уравниваются“.

С другой стороны, углы в 120° свойственны различным стационарным волнам Стокса. Вызванные гравитацией волны Стокса изучались в двумерных течениях, начиная с [5]. Почти полный обзор по этой теме можно найти в [6]. Также волны Стокса могут вызываться центробежными силами в осесимметричных потоках [7]. Кроме того, согласно [8], возможны внутренние волны Стокса, вызванные скачком плотности внутри потоков. Ниже будет рассмотрен именно последний вид волн.

1. Внутренние волны Стокса внутри круга

Рассмотрим упрощенную ситуацию с двумя жидкостями разной плотности внутри круга радиуса R_+ . Согласно [9], внутри шестиугольника Сатурна имеются два вихря, но только один из них дает существенный вклад в скорости вдоль контура шестиугольника. Предположим, что внутренняя жидкость плотности ρ_- занимает ядро вихря максимального радиуса R_- , равного длине стороны шестиугольника, и введем полярные координаты с радиусом r , нормированным на R_- ; тогда $R_- = 1.0$. Ввиду рассматриваемого масштаба планетарного течения оно должно быть турбулентным. Тогда, как показано в [10], с использованием асимптотического решения уравнений Рейнольдса [11] окружную скорость внутри ядра вихря можно аппроксимировать формулой

$$U_{\theta-} = r[1 - \ln(r)]. \quad (1)$$

Здесь $U_{\theta-}$ нормировано на ωR_- , где ω — частота вращения. Эта формула получена в предположении о

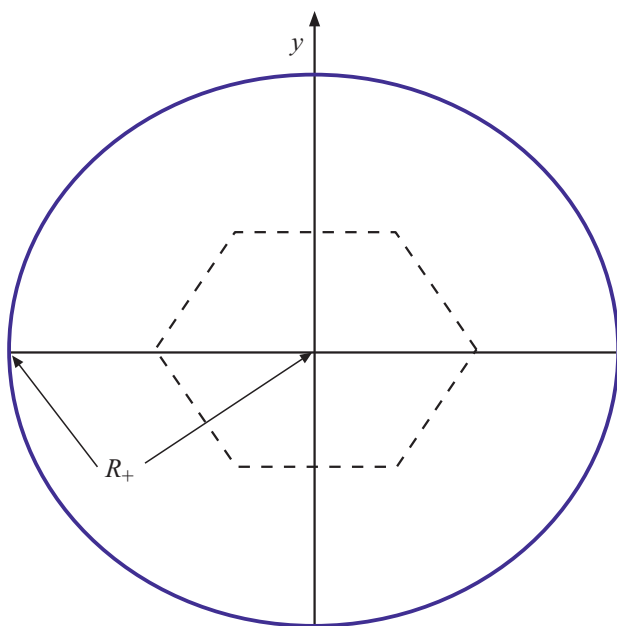


Рис. 1. Эскиз шестиугольника внутри круга. Стороны шестиугольника слегка криволинейны, но углы составляют 120° .

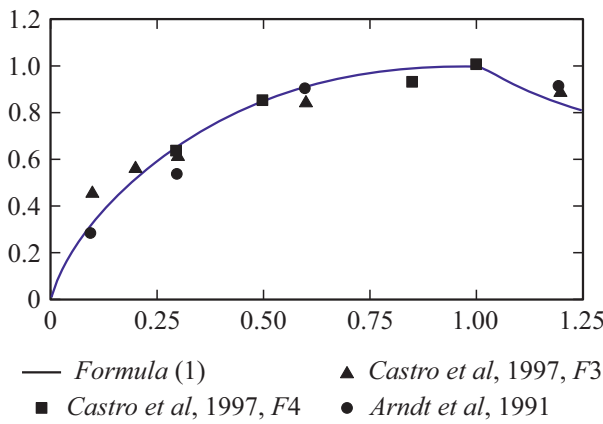


Рис. 2. Сравнение формулы (1) с распределениями нормированной измеренной азимутальной скорости по радиусу вихря.

незначительной зависимости турбулентных напряжений от координат. На рис. 2 можно видеть, что формула (1) хорошо согласуется с экспериментальными данными работ [12,13].

Внешняя жидкость имеет плотность $\rho_+ = \epsilon\rho_-$ и тоже вращается. Граница S между двумя жидкостями разной плотности непроницаема, а давление по обе стороны от S должно быть одинаковым. Следовательно, S будет свободной поверхностью. Весь поток не является безвихревым, но возмущения потока, вызванные зависимостью S от азимута θ , можно определять с помощью потенциалов скорости. Один из потенциалов определен внутри шестиугольника. Он удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию

$$\frac{\partial\Phi_-}{\partial N} + r[1 - \ln(r)]N_r = 0. \tag{2}$$

Здесь N_r — радиальная компонента нормали к S . Надо ввести еще один потенциал скорости вне S . Этот потенциал должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial\Phi_+}{\partial N} + r[1 - \ln(r)]N_r = 0 \tag{3}$$

на S и при $r = R_+$. Однако, как указано в [8], рассматривая внутренние волны Стокса с углами на гребнях 120° , необходимо ввести некоторую изначально неизвестную циркуляцию (или некоторые вихри) во внешнем потоке вблизи углов 240° . Поэтому в Φ_+ , кроме потенциала монополей интенсивности Q_+ , входит потенциал вихрей изначально неизвестной интенсивности γ , и ее можно определить с помощью асимптотики

$$\lim_{s \rightarrow 0} U_+ = \sqrt{s}, \tag{4}$$

выведенной в [8] с использованием конформных отображений. Здесь абсцисса s отсчитывается от гребня (кстати, согласно [9], зоны высокой завихренности должны располагаться вблизи каждого угла шестиугольника). Решение уравнений (2) и (3) упрощается совпадением распределений скорости по всем частям шестиугольника.

Для определения S необходимо использовать условие непрерывности давления при переходе через S . Его можно записать как

$$U_-^2 = \epsilon U_+^2 \tag{5}$$

вдоль всей S . Необходимость выполнения уравнения (5) приводит к отклонению сторон шестиугольника от отрезков между вершинами. Процедура определения этих отклонений $h(s)$ аналогична процедурам, описанным в [8] для других задач теории потенциала со свободной границей. Такие задачи нелинейны, и для их решения необходимы итерации. В ходе каждой итерации квазилинеаризация уравнений (2) и (3) с использованием возмущений обоих потенциалов с малыми интенсивностями q_- и q_+ приводит к уравнениям

$$q_+ = 2d(hU_+)/ds, \quad q_- = -2\frac{d(hU_-)}{ds}. \tag{6}$$

Кроме того, условие

$$U_- \int_0^s q_+ ds + U_+ \int_0^s q_- ds = 0 \tag{7}$$

выполняется вдоль S .

Поскольку основная часть возмущений скорости представляет собой интеграл Коши интенсивности q_- или q_+ , квазилинеаризация уравнения (5) приводит к уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu q_+ - q_-}{s - \tau} d\tau + 2h[(\mu - 1)(1 - \ln|r|)]2U_+ d\mu = 2(U_- - \mu U_+) \tag{8}$$

вдоль верхней горизонтальной стороны шестиугольника. Здесь $\mu = \sqrt{\epsilon}$. Дальнейшее упрощение уравнения (8) возможно обращением интегралов Коши, и

$$\mu q_+ - q_- + \frac{F\{s\}}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{(\mu - 1)(1 - \ln|r|)}{U_-} \left(\int_0^\tau q_- d\xi \right) - 2U_+ d\mu \right] \frac{d\tau}{(s - \tau)F\{\tau\}} = 2\frac{F\{s\}}{\pi} \int_0^1 \frac{(U_- - \mu U_+)}{(s - \tau)F\{\tau\}} d\tau \tag{9}$$

Здесь $F\{s\} = \sqrt{s(1-s)}$. Однако, как указано в [14], такое обращение возможно только при выполнении дополнительного условия

$$\int_0^1 \left[\frac{(1 - \ln|r|)}{U_-} (1 - \mu) \left(\int_0^\tau q_- d\xi \right) + 2(U_+ d\mu) \right] \times \frac{d\tau}{F\{\tau\}} + 2 \int_0^1 \frac{(U_- - \mu U_+)}{F\{\tau\}} d\tau = 0, \tag{10}$$

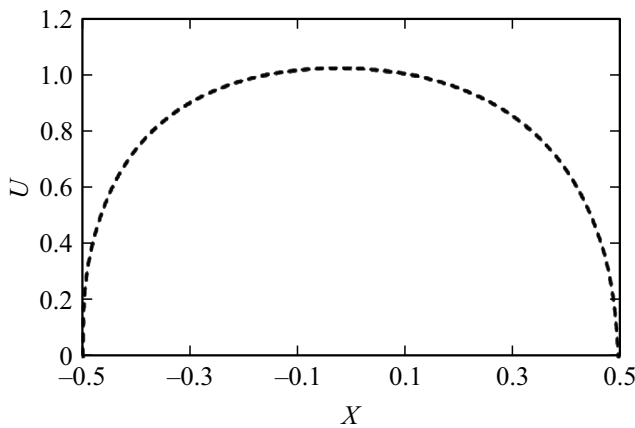


Рис. 3. Пример распределения U_+ вдоль S .

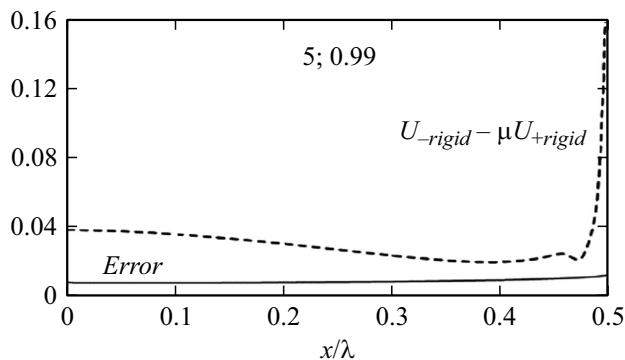


Рис. 4. Иллюстрация сходимости алгоритма. Сплошная линия, отмеченная как „error“, соответствует модулю разности $U_- - \mu U_+$ после 7 итераций.

а необходимость выполнения уравнения (10) связана с определением изменения $d\mu$ параметра μ во всей задаче. После решения уравнений (7)–(10) можно найти функцию $h(s)$ интегрированием одного из уравнений (6) и откорректировать S . Такую коррекцию S можно интерпретировать как движение против градиента во вспомогательном пространстве переменных, определяющих поверхность S . Хотя аналитическое описание этой поверхности может существовать, общий подход заключается в ее пошаговой коррекции с использованием M точек, распределенных по рассматриваемой части S . Обозначим координаты этих точек как

$$x_m^{k+1} = x_m^k + \alpha h_m^k N_{x_m}^k, \quad y_m^{k+1} = y_m^k + \alpha h_m^k N_{y_m}^k, \quad (11)$$

где верхние индексы указывают номер итерации, а нижние — номер точки. Определение $h(s)$ позволяет вычислить компоненты антиградиента h_m^k на S , но из-за сильной нелинейности задачи движение по этому антиградиенту приходится осуществлять малыми шагами. Поэтому в уравнение (11) вводится положительный множитель $\alpha \ll 1$. Пример рассчитанного распределения скорости показан на рис. 3. Координата X отсчитывается

от центра шестиугольника, а ось x перпендикулярна оси y , показанной на рис. 1.

Иллюстрация сходимости итерации приведена на рис. 4 для $R_+ = 5$ и $\varepsilon = 0.99$. В качестве начального приближения к неизвестной поверхности S был выбран правильный шестиугольник. Распределения U_{+rigid} и U_{-rigid} вдоль него были подставлены в уравнение (5), и соответствующая разность $U_- - \mu U_+$ сопоставлена на рис. 4 с аналогичной разницей вдоль S , полученной после семи итераций.

2. Качественное сравнение с наблюдениями

Сравнение наблюдаемой [15] и расчетной формы шестиугольника показано на рис. 5. Их стороны очень похожи.

Максимальное отклонение стороны шестиугольника от отрезка между двумя его вершинами A аналогично высоте классической волны Стокса, тогда как длина отрезка аналогична длине волны λ . Эти аналогии позволяют провести некоторые сравнения. Отношение A/λ для двумерных гравитационных волн Стокса уменьшается от 0.142 для течения бесконечной глубины до 0.098 для течения минимальной глубины (согласно [16] — глубины, минимальной для существования этих стационарных волн). Помня об аналогии между упомянутой выше глубиной и расстоянием между шестиугольником и окружающим кругом, можно обнаружить ту же тенденцию на рис. 6.

Более подробные изображения поверхности S (поверхности этих внутренних волн) представлены на рис. 7. При $x = \lambda/2$ претерпевает скачок от 0 до $-\tan(\pi/6)$. Формы S , показанные на рис. 1 и 5, соответствуют $\{R_+ = 4, \varepsilon = 0.99\}$. Между тем $R_+ = 4$ близко к отношению диаметра Сатурна к наблюдаемому [17] размеру его шестиугольника.

Представленное на рис. 5 сравнение является качественным. Тем не менее оно позволяет выдвинуть гипотезу о том, что шестиугольник представляет собой разновидность внутренних волн Стокса. Лабораторные эксперименты с некоторыми полигональными структурами в жидкостях (например, [3,18,19]) дают более сомнительные результаты. Анализ несимметричных потенциальных возмущений одной жидкости (аналогичных рассматриваемым в [2], но вызванных спутником) не привел автора к получению какой-либо многоугольной фигуры.

Для количественного анализа рассматриваемое течение должно быть трехмерным, а также там надо будет учитывать силу тяжести. Возможно, это осуществимо в осесимметричном подходе, описанном в [20], но при этом необходимо будет использовать некоторую информацию о дне потока и вместо внешнего жесткого круга рассматривать жесткую внутреннюю сферу. Однако метод решения задачи свободной поверхности будет

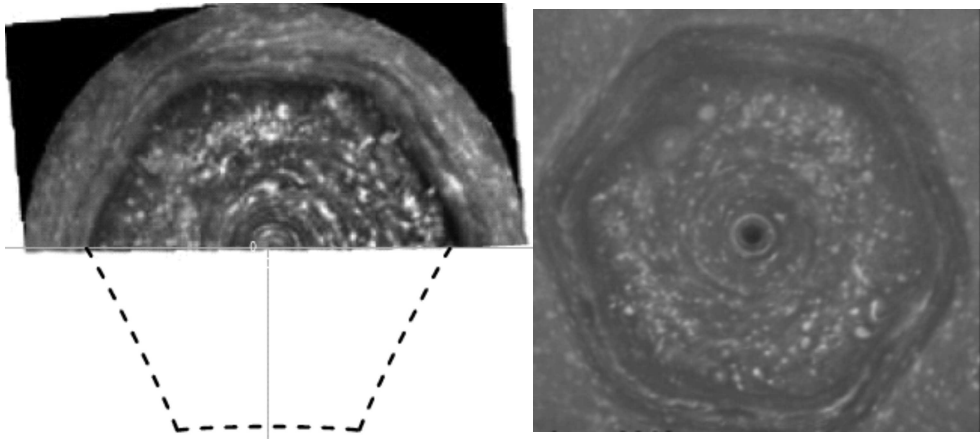


Рис. 5. Сравнение расчетной форма шестиугольника (пунктирная кривая в нижней части левого рисунка) и фотографии шестиугольника Сатурна

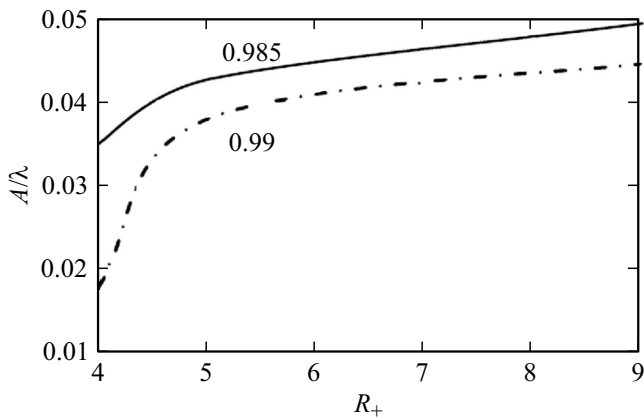


Рис. 6. Влияние радиуса окружности на крутизну волны. Цифры у кривых показывают соответствующие соотношения плотности.

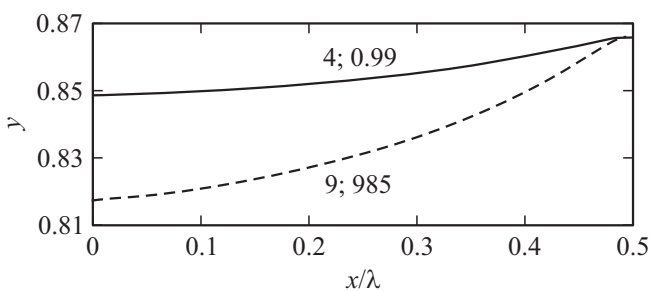


Рис. 7. Формы сторон шестиугольника для $\{R_+ = 4, \epsilon = 0.99\}$ и $\{R_+ = 9, \epsilon = 0.985\}$.

совершенно аналогичным, это будет просто еще одна модификация метода Иванова.

Заключение

Шестиугольник, наблюдаемый над Сатурном, изучался многими учеными, однако использованные ими кон-

цепции не были подкреплены достаточными доказательствами, поэтому альтернативное исследование уместно, и здесь этот шестиугольник рассматривается как поверхность внутренней волны Стокса, возникающей между двумя жидкостями различной плотности. Течение моделируется как индуцированное осесимметричным вихрем, а деформации поверхности шестиугольника описываются потенциалами безвихревых течений. Описанная итерационная процедура решения соответствующей нелинейной задачи проверена сравнением с решениями других задач о волнах Стокса с углами в 120° на гребнях.

Можно считать, что сравнение форм рассчитанных и наблюдаемых шестиугольников показывает хорошее их соответствие, поскольку рассмотренная модельная задача о внутренних волнах позволила воспроизвести шестиугольную структуру, между тем как степень отклонения сторон шестиугольника от отрезков на фотографиях даже трудно оценить.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] S.D. Abrahamson, J.K. Eaton, D.J. Koga. Phys. Fluids, **1**, 241 (1989).
- [2] E.L. Amromin, S.I. Kovinskaya. J. Fluids and Structures, **34**, 84 (2012).
- [3] T.R.N. Jansson, M.P. Haspang, K.H. Jensen, P. Hersen, T. Bohr. Phys. Rev. Lett., **96**, 174502 (2006).
- [4] R. Morales-Juberías, K.M. Sayanagi, T.E. Dowling, A.P. Ingersoll. Icarus, **211**, 1284 (2011).
- [5] J.H. Michel. Phil. Magazine, **36** (5), 430 (1893).
- [6] X. Zhong, S.J. Liao. Fluid Mechanics, **843**, 653 (2018).
- [7] Э.Л. Амромин. Известия РАН, **31** (6), 105 (1996).

- [8] Э.Л. Амромин. ЖТФ, **93** (1), 53 (2023).
DOI: 10.21883/JTF.2023.01.54063.212-22 [E.L. Amromin. Tech. Phys., **93** (1), 48 (2023).
DOI: 10.21883/TP.2023.01.55439.212-22]
- [9] M. Rostami, V. Zeitlin, A. Spiga. *Icarus*, **297**, 59 (2017).
- [10] E.L. Amromin. *Phys. Fluids*, **19**, 118108 (2007).
- [11] Л.И. Седов. *Механика сплошной среды* (Наука, М., 1976), т. II.
- [12] R.E.A. Arndt, V.H. Arakeri, H. Higuchi. *J. Fluid Mech.*, **229**, 269 (1991).
- [13] E. Castro, A. Crespo, F. Manuel, D.H.J. Fruman. *ASME J. Fluids Eng.*, **119**, 759 (1997).
- [14] П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л.С. Раковщик, В.Я. Стеценко. *Интегральные уравнения* (Наука, М., 1968)
- [15] K. Baines, M. Flasar, N. Krupp, T. Stallard. *Saturn in the 21st Century* (Cambridge University Press, 2019)
- [16] Э.Л. Амромин, А.Н. Иванов, Д.Ю. Садовников. *МЖГ, Известия РАН*, **29**, 125 (1994).
- [17] S.K. Atreya, T.C. Owen, S.J. Bolton, T. Guillot. *Int. Planetary Probe Workshop, IPPW-3, ESA SP-WPP263* (2006).
- [18] R. Bergmann, L. Tophoj, T.A.M. Homan, P. Hersen, A. Andersen, T. Bohr. *J. Fluid Mech.*, **679**, 415 (2011).
- [19] A.C.V. Aguiar, P.L. Read, R.D. Wordsworth, T. Salter, Y.H. Yamazaki. *Icarus*, **206**, 755 (2010).
- [20] R. Plougonven, V. Zeitlin. *Phys. Fluids*, **14**, 1259 (2002).