

01

Необычный излучающий джозефсоновский вихрь

© А.С. Малишевский, С.А. Урюпин

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: malish@lebedev.ru

Поступило в Редакцию 2 апреля 2024 г.
В окончательной редакции 13 июня 2024 г.
Принято к публикации 31 июля 2024 г.

Изучены бегущие вихри в джозефсоновском переходе, помещенном в замедляющую среду. Показано, что в такой системе, помимо обычных джозефсоновских вихрей, скорость которых ограничена скоростью Свихарта, могут существовать необычные вихри, обладающие большей предельной скоростью. Определены параметры джозефсоновского перехода и внешней среды, при которых эти вихри могут излучать электромагнитные волны в среду вследствие эффекта Вавилова–Черенкова. Характерные частоты этих волн попадают в терагерцовую область и могут плавно перестраиваться, что интересно с точки зрения использования необычных вихрей для создания компактных сверхпроводниковых устройств.

Ключевые слова: жозефсоновский переход, черенковское излучение, терагерцовое излучение.

DOI: 10.61011/JTF.2024.10.58852.109-24

Введение

Терагерцовое излучение в широком смысле сейчас принято связывать с частотным диапазоном электромагнитных волн от ~ 0.1 до ~ 10 THz [1,2]. Поиск источников, детекторов, усилителей и фильтров в этом диапазоне ведется на протяжении нескольких десятилетий. Важным направлением внутри освоения этой области является твердотельная терагерцовая физика [3,4]. Для низкотемпературных приложений могут быть интересны устройства, использующие эффект Джозефсона, в частности, реализующие режим вязкого течения вихрей [5–9], использующие синхронизированные массивы джозефсоновских переходов [10] или служащие гибкими волноводами для перенаправления или расщепления электромагнитных волн [11].

Интересным источником терагерцового излучения являются бегущие вихри в протяженных джозефсоновских переходах, испускающие электромагнитные волны вследствие эффекта Вавилова–Черенкова. Так, в [12–13] описано черенковское излучение волн вихрями в системе, состоящей из двух джозефсоновских переходов, а в [14] описано черенковское излучение в хвосте вихря, бегущего по переходу, образованному массивными сверхпроводниками.

Естественным продолжением идеи черенковского излучения джозефсоновских вихрей является рассмотрение возможности черенковского излучения во внешней среде из перехода в геометрии сэндвича. Интенсивность этого излучения может превосходить интенсивность излучения внутри перехода [15]. Для возможности такого излучения скорость джозефсоновского вихря должна превосходить скорость света в окружающей среде. Для обычных вихрей выполнить такое условие непросто. Ниже показано, что в геометрии сэндвича может суще-

ствовать необычный джозефсоновский вихрь, предельная скорость которого может значительно превышать скорость Свихарта в сэндвиче, что позволяет ослабить требования на величину скорости света в окружающей среде сэндвича замедляющей среде.

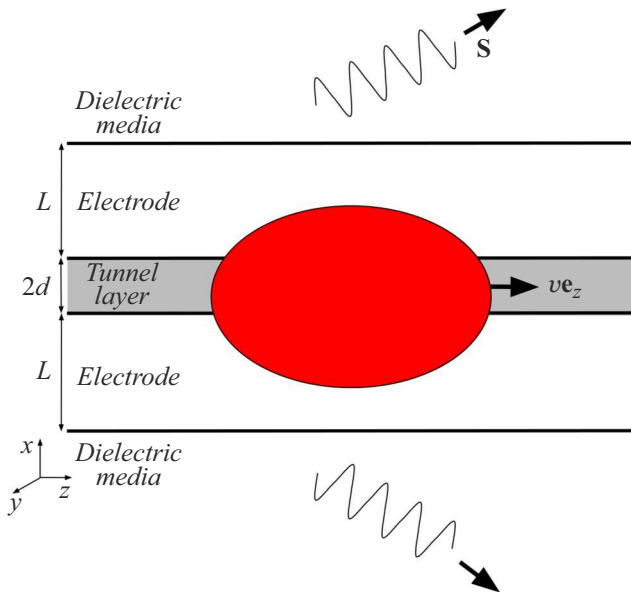
1. Основные уравнения

Рассмотрим протяженный джозефсоновский сэндвич, окруженный замедляющей средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_m (см. рисунок). Сэндвич образован плоскими сверхпроводящими электродами, занимающими области $-d - L < x < -d$ и $d < x < d + L$, которые разделены тонким туннельным слоем шириной $2d$. Примем, что магнитное поле имеет только одну компоненту: $\mathbf{H} = H_y \mathbf{e}_y$, а электрическое поле — две: $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_z \mathbf{e}_z$. Предполагается, что поля и разность фаз $\varphi(z, t)$ сверхпроводящего параметра порядка на джозефсоновском переходе не зависят от координаты y .

Решение уравнений Максвелла во всех пяти областях структуры с учетом граничных условий при $x = \pm d$ и $\pm d \pm L$ позволяет записать интегродифференциальное уравнение, описывающее эволюцию разности фаз. Для вихря, бегущего со скоростью $v > 0$, оно имеет вид [16]:

$$\omega_J^2 \sin \psi(\xi) + v^2 \psi''(\xi) = v_S^2 \frac{d}{d\xi} \int d\xi' q(\xi - \xi') \frac{d\psi(\xi')}{d\xi'}, \quad (1)$$

где ω_J — джозефсоновская плазменная частота, $\psi(\xi) = \varphi(z, t)$, $\xi \equiv z - vt$, v_S — скорость Свихарта в случае массивных электродов, когда $L = \infty$. Фурье-образ



Поперечное сечение джозефсоновского сэндвича в плоскости xOz . Элементарный вихрь (схематично показанный в виде эллипса) движется вдоль оси Oz со скоростью v_{ez} . Магнитное поле направлено вдоль оси Oy . Снаружи сэндвича показаны черенковские волны, распространяющиеся от боковых поверхностей в глубь внешней диэлектрической среды. Стрелки указывают направление плотности потока энергии излучения S .

ядра $q(\xi)$ имеет вид

$$q(k) \equiv \text{th} \left(\frac{L}{\lambda} \right) \frac{R(k) - \text{cth} (L/\lambda)}{R(k) - \text{th} (L/\lambda)}, \quad (2)$$

где λ — лондоновская глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводящие электроды, $R(k) \equiv c_m^2 \kappa / \lambda v^2 k^2$, $c_m \equiv c / \sqrt{\epsilon_m}$ — скорость света во внешнем диэлектрике,

$$\kappa \equiv \sqrt{|1 - v^2/c_m^2|} |k| [\theta(c_m - v) - i \theta(v - c_m) \text{sgn} k],$$

$\theta(\cdot)$ — функция Хэвисайда. Соотношение (2) записано в пределе

$$\lambda |k| \ll 1, \quad (3)$$

что отвечает рассмотрению вихрей, у которых характерный пространственный масштаб изменения вдоль оси Oz значительно превышает λ .

Зная разность фаз, отвечающую конкретному вихрю, можно определить структуру электромагнитного поля во всей системе. В частности, магнитное поле внутри туннельного слоя, созданное бегущим вихрем, имеет следующий вид:

$$H_J(\xi) = -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \int d\xi' q(\xi - \xi') \frac{d\psi(\xi')}{d\xi'},$$

где ϕ_0 — квант магнитного потока. При $x = \pm d \pm L$, т.е. на внешних границах сэндвича, магнитное поле равно

$$H_s(\xi) = \int d\xi' h(\xi - \xi') H_J(\xi'), \quad (4)$$

а фурье-образ ядра h дается выражением

$$h(k) \equiv \frac{1}{\text{sh} (L/\lambda)} \frac{1}{\text{cth} (L/\lambda) - R(k)}. \quad (5)$$

Вне сэндвича фурье-компоненты полей зависят от координаты x как $\exp[-\kappa(|x| - x_s)]$, где $x_s \equiv d + L$. Вследствие этого поля досветовых вихрей, когда $v < c_m$ и κ — действительная величина, убывают при удалении в глубь диэлектрика. В свою очередь, поля сверхсветовых вихрей, когда $v > c_m$ и κ — чисто мнимая величина, имеют вид волн, уходящих от сэндвича.

2. Неизлучающий необычный джозефсоновский вихрь

Сначала рассмотрим досветовые вихри, скорость которых меньше c_m . Тогда в пределе $R(k) \gg \text{cth} (L/\lambda)$ имеем $q(\xi) \simeq \text{th} (L/\lambda) \delta(\xi)$, а уравнение (1) описывает обычный джозефсоновский вихрь в случае электродов конечной толщины:

$$\psi = 4 \arctg (\exp(-k_J \xi)), \quad (6)$$

где $k_J \equiv \omega_J / \sqrt{V_S^2 - v^2}$, $V_S \equiv v_S \text{th}^{1/2} (L/\lambda)$ [17,18]. Заметим, что наложенное выше ограничение на $R(k)$ и неравенство (3) требуют, чтобы скорость вихря не была слишком близкой к c_m и V_S . В соответствии с (4) и (5) магнитное поле на границе сэндвича в $\sim R(k_J) \text{sh} (L/\lambda) \gg 1$ раз меньше, чем поле внутри туннельного слоя.

Можно рассмотреть и другой предел, когда $R(k)$ мало, а именно $R(k) \ll \text{th} (L/\lambda)$.

В этом случае $q(\xi) \simeq \text{cth} (L/\lambda) \delta(\xi)$, а уравнение(1) описывает необычный джозефсоновский вихрь. Форма этого вихря также определяется выражением (6), в которое, однако, вместо k_J входит новая величина $K_J \equiv \omega_J / \sqrt{U_S^2 - v^2}$, $U_S \equiv v_S \text{cth}^{1/2} (L/\lambda)$. Обсуждение степени точности выражения (6) для необычного вихря приведено в Приложении.

Анализ условий $\lambda K_J \ll 1$ и $R(K_J) \ll \text{th} (L/\lambda)$ показывает, что при $c_m < U_S$ необычный вихрь может двигаться со скоростями доходящими до скорости c_m . Если $c_m = U_S$, то скорость вихря может доходить до значений $v_R = U_S [1 - \mathcal{O}((\lambda/\lambda_J)^2)]$. При увеличении c_m до некоторого предельного значения скорость вихря также ограничена сверху величиной v_R . При значениях c_m , больших этого предельного значения, неравенство (3) и условие малости $R(k)$ нельзя выполнить совместно, т.е. необычный вихрь не реализуется.

Таким образом, необычный вихрь может двигаться со скоростями, доходящими до скорости c_m . Предельная скорость движения необычного вихря $\simeq U_S$, которая в $U_S/V_S = \text{cth} (L/\lambda) > 1$ раз превосходит скорость V_S . Это отличие особенно заметно для сравнительно тонких электродов.

Другим важным свойством необычного вихря является соотношение магнитных полей внутри джозефсоновского перехода и на границах сэндвича: $H_S \simeq H_J \operatorname{ch}^{-1}(L/\lambda)$. В отличие от обычного вихря, теперь спадание поля внутри электродов определяется фактором, который в случае тонких электродов может быть порядка единицы. При этом основная энергия электромагнитного поля распределена во внешнем диэлектрике, и можно говорить о сильной связи полей внутри джозефсоновского перехода и вне сэндвича. Отметим, что указанное соотношение магнитных полей приводит к тому, что рассматриваемый нами необычный вихрь несет один квант магнитного потока подобно обычному вихрю в джозефсоновском переходе с массивными электродами.

3. Излучающий необычный джозефсоновский вихрь

Возможность черенковского излучения джозефсоновских вихрей давно исследуется как теоретически, так и экспериментально. Движение описанного выше необычного джозефсоновского вихря тоже может приводить к черенковскому излучению, если его скорость превышает c_m . Считая, как и ранее, величину $R(k)$ малой:

$$|R(k)| \ll \operatorname{th}(L/\lambda), \quad (7)$$

ядро $q(k)$ можно представить в виде суммы $\operatorname{cth}(L/\lambda)$ и мнимого слагаемого, пропорционального $|R(k)|$. Это слагаемое учитывает поле черенковского излучения, созданного вихрем.

Если выполнено условие

$$|R(k)| \ll \operatorname{sh}(2L/\lambda)(1 - v^2/U_S^2)/2, \quad (8)$$

то обратным влиянием излучения на вихрь можно пренебречь. Тогда в первом приближении будем считать, что излучающий необычный вихрь имеет прежнюю форму (см. (6)) с характерным пространственным масштабом K_J^{-1} . Неравенство (3), условие малости R (7) и условие малости радиационных потерь (8) всегда можно выполнить совместно при скоростях вихря, близких к c_m .

Зная магнитное поле H_s (4), созданное вихрем на поверхности сэндвича, из уравнений Максвелла можно найти поле черенковской волны в окружающем диэлектрике:

$$H(x, \xi) = H_s \left(\xi + \sqrt{\frac{v^2}{c_m^2} - 1}(|x| - x_s) \right) = \frac{\phi_0 K_J}{2\pi\lambda \operatorname{sh}(L/\lambda)} \times \operatorname{sch} \left(K_J \left(\xi + \sqrt{\frac{v^2}{c_m^2} - 1}(|x| - x_s) \right) \right), \quad |x| > x_s. \quad (9)$$

Отвечающая такой волне мощность излучения, приходящаяся на единицу длины вдоль оси Oy , равна интегралу вдоль оси Oz от x -компоненты плотности потока

энергии, вычисленному по обеим боковым поверхностям сэндвича:

$$P = \frac{\phi_0^2 \omega_J}{4\pi^3 \lambda^2} \mathcal{P}, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{P} \equiv c_m \sqrt{v^2 - c_m^2} / \operatorname{sh}^2(L/\lambda) v \sqrt{U_S^2 - v^2}$$

— безразмерный параметр, определяющийся толщиной электродов и близостью скорости вихря к c_m и U_S . Возникновение множителя $(U_S^2 - v^2)^{-1/2}$ в выражении для мощности связано с тем, что в силу (9) вклад в поток излучения дают все участки поверхностей сэндвича, приходящиеся на характерный размер необычного вихря $\sim K_J^{-1}$.

При небольшом превышении скорости света во внешнем диэлектрике мощность зависит от скорости как $\propto \sqrt{v - c_m}$, а излучение направлено под малым углом $\simeq \sqrt{2(v - c_m)/c_m}$ к поверхности сэндвича. С увеличением скорости необычного вихря мощность монотонно возрастает, при этом излучение все больше отклоняется от поверхностей электродов, и диаграмма излучения расширяется.

Заключение

Кратко суммируем свойства необычного джозефсоновского вихря.

Во-первых, необычный джозефсоновский вихрь может быть экспериментально обнаружен в „стандартной“ геометрии джозефсоновского сэндвича. Предполагается, что такой плоский сверхпроводящий сэндвич окружен замедляющей диэлектрической средой. В зависимости от соотношения скорости вихря и скорости света во внешней среде этот вихрь может быть как неизлучающим, так и излучающим.

Во-вторых, форма необычного джозефсоновского вихря подобна форме обычного джозефсоновского вихря (2π -кинка). Их важное отличие связано с тем, что они имеют разные характерные пространственные масштабы: $\sim \sqrt{U_S^2 - v^2}/\omega_J$ и $\sim \sqrt{V_S^2 - v^2}/\omega_J$, соответственно. Эти масштабы определяются разными предельными скоростями необычного и обычного джозефсоновских вихрей — U_S и V_S . Эти скорости могут сильно отличаться в случае тонких электродов ($L \ll \lambda$), когда U_S превосходит V_S в $\operatorname{cth}(L/\lambda) \gg 1$ раз.

В-третьих, реализовать излучение электромагнитных волн в глубь окружающей среды вследствие эффекта Вавилова-Черенкова проще для необычного вихря. Это излучение возникает тогда, когда скорость вихря превосходит скорость света во внешней среде. Скорость необычного вихря ограничена сверху величиной U_S , поэтому необходимое условие возникновения черенковского излучения можно записать как $U_S > c_m$, что эквивалентно $\epsilon_m > \epsilon(\lambda/d) \operatorname{th}(L/\lambda)$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость туннельного слоя. Для типичных джозефсоновских переходов, у которых ширина туннельного

слоя составляет несколько нанометров, ϵ — несколько единиц, а $\lambda \sim 100$ nm, это условие для электродов толщиной $\gtrsim \lambda$ выполнимо, если величина $\epsilon_m \sim 100$. Требование на ϵ_m можно ослабить для случая тонких электродов, когда выполнение неравенства можно обеспечить при существенно меньших значениях ϵ_m . Так, при $\epsilon = 4$, $d = \lambda/25$ и $L = \lambda/3$ имеем $\epsilon_m > 32$.

В-четвертых, характерные частоты излучения необычного джозефсоновского вихря можно оценить как νK_J . Так как типичные значения джозефсоновских плазменных частот порядка сотен гигагерц, частоты излучения необычного вихря $\sim \omega_J / \sqrt{(U_S/v)^2 - 1}$ попадают в терагерцовый диапазон. Заметим, что частота излучения зависит от скорости движения вихря и ее можно плавно перестраивать.

В заключение оценим мощность черенковского излучения необычного вихря. Для использованных выше значений $\epsilon = 4$, $d = \lambda/25$ и $\lambda = 100$ nm из (10) имеем для мощности излучения со всей высоты L_y сэндвича вдоль оси Oy : $PL_y \simeq \mathcal{P}(L_y/\lambda_J) 10^{-3}$ W, где $\lambda_J \equiv \omega_J v_s$ — джозефсоновская длина. Используя условие малости радиационных потерь вихря (8), можно написать следующую оценку сверху: $\mathcal{P} \ll (\lambda/\lambda_J) \text{cth}^{1/2}(L/\lambda)$. Так как типичные значения $\lambda_J \sim 100\lambda$, приведенные оценки указывают на то, что мощность излучения попадает в микроваттную область. Для оценки величины \mathcal{P} предположим, что $L = \lambda/3$, $U_S = 1.2c_m$, $\lambda/\lambda_J = 0.01$, а скорость вихря достаточно близка к порогу черенковского излучения, а именно $(v/c_m) - 1 = 6 \cdot 10^{-7}$. Тогда $\mathcal{P} \simeq 0.014$, поэтому для сэндвича высотой $L_y = \lambda_J$ мощность излучения составляет $\simeq 14 \mu\text{W}$.

Эти характеристики необычного вихря указывают на то, что он может послужить основой для создания компактного твердотельного источника терагерцового излучения с перестраиваемой частотой.

Приложение

Для определения поправки к разности фаз необычного вихря, реализующегося в пределе $R(k) \ll \text{th}(L/\lambda)$, фурье-образ ядра $q(\xi)$ представим в виде $q(k) = \text{cth}(L/\lambda) + \delta q(k)$, где

$$\delta q(k) \equiv \text{sh}^{-2}(L/\lambda) [R^{-1}(k) - \text{cth}(L/\lambda)]^{-1}.$$

Ноль знаменателя $\delta q(k)$ отвечает досветовой поверхностной волне. Учет малого затухания этой волны далее позволяет вычислить вклад от полюса. Разность фаз на джозефсоновском переходе ищем в виде $\psi(\xi) \simeq 4 \arctg(\exp(-K_J \xi)) + \delta\psi(\xi)$, где $\delta\psi(\xi)$ — поправка первого приближения по $\delta q(\xi)$. Тогда из уравнения (1) имеем:

$$\delta\ddot{\psi}''(\xi) - \left(1 - \frac{2}{\text{ch}^2 \xi}\right) \delta\ddot{\psi}(\xi) = -\frac{4v_s^2 K_J^2 R(K_J)}{\pi\omega_J^2 \text{sh}^2(L/\lambda)} I\left(\frac{2\xi}{\pi}, p\right), \quad (\text{П1})$$

где $\delta\ddot{\psi}(\xi) \equiv \delta\psi(\xi)$, $\xi \equiv K_J \xi$, $p \equiv R(K_J) \text{cth}(L/\lambda)/2$, $I(b, p) \equiv I_1(b, p) + I_2(b, p)$,

$$I_1(b, p) \equiv \text{v.p.} \int_0^\infty du \frac{u}{u - \pi p} \frac{\sin(bu)}{\text{ch } u},$$

$$I_2(b, p) \equiv -\pi^2 p \frac{\cos(\pi p b)}{\text{ch}(\pi p)}. \quad (\text{П2})$$

Максимальные по модулю значения $I_1(b, p)$ порядка единицы, а вклад $I_2(b, p)$ от полюса много меньше единицы, так как $p \ll 1$.

Вклад в решение уравнения (П1), связанный со слагаемым I_1 в правой части, имеет вид

$$\frac{2v_s^2 K_J^2 R(K_J)}{\pi\omega_J^2 \text{sh}^2(L/\lambda)} \left[f_1(\xi) \int_0^\xi d\xi' I_1\left(\frac{2\xi'}{\pi}, p\right) f_2(\xi') + f_2(\xi) \int_\xi^\infty d\xi' I_1\left(\frac{2\xi'}{\pi}, p\right) f_1(\xi') \right], \quad (\text{П3})$$

где $f_1(\xi) \equiv \text{sech} \xi$, $f_2(\xi) \equiv \text{sh} \xi + \xi \text{sech} \xi$. При этом максимальные по модулю значения величины, стоящей в квадратных скобках, порядка единицы. Поскольку перед квадратной скобкой стоит малый параметр, соответствующий вклад в (П3) дает малую поправку к разности фаз необычного вихря.

Вклад от полюса, связанный с функцией $I_2(b, p)$, дает еще меньший вклад в выражение для $\delta\ddot{\psi}(\xi) \propto R^2(K_J) \cos(2p\xi)$. Малость этой части поправки показывает, что поверхностная волна не оказывает существенного влияния на необычный вихрь.

Выражение (2) записано в пределе (3), т.е. описывает такие распределения разности фаз, которые меняются на масштабах, больших λ . Можно записать более общее выражение для ядра с учетом так называемой пространственной нелокальности. Для получения такого ядра необходимо при решении уравнения Лондонов в сверхпроводящих электродах последовательно учитывать слагаемое, содержащее вторую производную магнитного поля по координате z , что приводит к следующему выражению [19]:

$$q(k) \equiv \frac{\lambda(k)}{\lambda} \text{th}\left(\frac{L}{\lambda(k)}\right) \frac{\lambda(k)R(k)/\lambda - \text{cth}(L/\lambda(k))}{\lambda(k)R(k)/\lambda - \text{th}(L/\lambda(k))}, \quad (\text{П4})$$

где $\lambda(k) \equiv \lambda/\sqrt{1 + \lambda^2 k^2}$. В случае $R(k) \ll \text{th}(L/\lambda)$ можно аддитивно учесть поправки к ядру, связанные как с R , так и с пространственной нелокальностью. Влияние первой поправки описано выше. Остановимся на обсуждении влияния слагаемых $\propto \lambda^2 k^2$ на необычный вихрь. Для этого приближенно запишем

$$q(k) \simeq \text{cth}\left(\frac{L}{\lambda}\right) - \frac{\lambda^2 k^2}{2} \text{cth}\left(\frac{L}{\lambda}\right) \left[1 + \frac{2L}{\lambda \text{sh}(2L/\lambda)}\right]. \quad (\text{П5})$$

Отсюда видно, что учет пространственной нелокальности в первом приближении приводит к появлению малой отрицательной квадратичной поправки к фурье-образу ядра. Известно, что учет такой поправки приводит к двум следствиям [14,15]. Во-первых, форма солитона, получающегося при решении уравнения синус-Гордона, слабо деформируется. Это изменение $\propto \lambda^2$ и исчезает на бесконечности. Во-вторых, в хвосте вихря появляется волна Свихарта, амплитуда которой также мала ($\propto \lambda^2$). Не ставя перед собой задачу изучения черенковского излучения волны Свихарта, можно считать, что в пределе $\lambda K_J \ll 1$ пространственная нелокальность оказывает малое влияние на необычный вихрь.

Уже выписанные здесь поправки к разности фаз указывают на то, что уравнение (1) может иметь необычные решения, которые можно искать, отказавшись от использования приближенных выражений для ядра (2), либо его модификаций. Поиск таких решений представляет самостоятельный интерес для развития электродинамики джозефсоновских переходов.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] X.C. Zhang, J. Xu. *THz Spectroscopy and Imaging*, in: *Introduction to THz Wave Photonics* (Springer, Boston, MA, 2010), p. 49. DOI: 10.1007/978-1-4419-0978-7_3
- [2] A. Rogalski, F. Sizov. *Opto-Electron. Rev.*, **19** (3), 346 (2011). DOI: 10.2478/s11772-011-0033-3
- [3] J. Hesler, R. Prasankumar, J. Tignon. *J. Appl. Phys.*, **126** (11), 110401 (2019). DOI: 10.1063/1.5122975
- [4] M. Zhang, S. Pirandola, K. Delfanazari. *IEEE Trans. Quantum Engineering*, **4**, 1 (2023). DOI: 10.1109/TQE.2023.3266946
- [5] T. Nagatsuma, K. Enpuku, F. Irie, K. Yoshida. *J. Appl. Phys.*, **54** (6), 3302 (1983). DOI: 10.1063/1.332443
- [6] T. Nagatsuma, K. Enpuku, K. Sueoka, K. Yoshida, F. Irie. *J. Appl. Phys.*, **58** (1), 441 (1985). DOI: 10.1063/1.335643
- [7] V.P. Koshelets, P.N. Dmitriev, A.B. Ermakov, A.S. Sobolev, A.M. Baryshev, P.R. Wesselius, J. Mygind. *Supercond. Sci. Technol.*, **14** (12), 1040 (2001). DOI: 10.1088/0953-2048/14/12/312
- [8] N.V. Kinev, K.I. Rudakov, L.V. Filippenko, A.M. Baryshev, V.P. Koshelets. *J. Appl. Phys.*, **125** (15), 151603 (2019). DOI: 10.1063/1.5070143
- [9] B. Chesca, D. John, M. Gaifullin, J. Cox, A. Murphy, S. Savel'ev, C.J. Mellor. *Appl. Phys. Lett.*, **117** (14), 142601 (2020). DOI: 10.1063/5.0021970
- [10] F. Song, F. Müller, T. Scheller, A. Semenov, M. He, L. Fang, A.M. Klushin. *Appl. Phys. Lett.*, **98** (14), 142506 (2011). DOI: 10.1063/1.3576910
- [11] D.R. Gulevich, S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, F.V. Kusmartsev, F. Nori. *J. Appl. Phys.*, **104** (6), 064507 (2008). DOI: 10.1063/1.2979714
- [12] Y.S. Kivshar, B.A. Malomed. *Phys. Rev. B*, **37** (16), 9325 (1988). DOI: 10.1103/PhysRevB.37.9325
- [13] E. Goldobin, A. Wallraff, N. Thyssen, A.V. Ustinov. *Phys. Rev. B*, **57** (1), 130 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevB.57.130
- [14] R.G. Mints, I.B. Snapiro. *Phys. Rev. B*, **52** (13), 9691 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevB.52.9691
- [15] A.S. Malishevskii, S.A. Uryupin. *Phys. Scripta*, **97** (5), 055817 (2022). DOI: 10.1088/1402-4896/ac6546
- [16] A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin, S.G. Uspenskii. *Phys. Lett. A*, **372** (5), 712 (2008). DOI: 10.1016/j.physleta.2007.07.084
- [17] J.C. Swihart. *J. Appl. Phys.*, **32** (3), 461 (1961). DOI: 10.1063/1.1736025
- [18] G.L. Alfimov, A.F. Popkov. *Phys. Rev. B*, **52** (6), 4503 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevB.52.4503
- [19] А.С. Малишевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, С.Г. Успенский. *ЖЭТФ*, **134** (2), 310 (2008). [A.S. Malishevskii, V.P. Silin, S.A. Uryupin, S.G. Uspenskii. *J. Experimental Theor. Phys.*, **107** (2), 263 (2008). DOI: 10.1134/S1063776108080104]