*11.2*

# Хаотические колебания в системе двух связанных автогенераторов с выделенной инерционностью

© *Л.А. Морозова, С.В. Савельев*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Фрязино, Московская обл., Россия
E-mail: mila-morozova.ludmila@yandex.ru

*Поступило в Редакцию 20 мая 2024 г.*
*В окончательной редакции 20 мая 2024 г.*
*Принято к публикации 31 мая 2024 г.*

На примере модели генератора с выделенной инерционностью проведено теоретическое исследование двух связанных автогенераторов при емкостной связи, их последовательной одночастотной синхронизации, хаотизации и двухчастотной синхронизации при адиабатическом изменении величины связи между парциальными автогенераторами. Определены параметры автогенераторов и значения коэффициента связи, при которых реализуются указанные режимы работы связанных автогенераторов. Представлены результаты численных исследований, иллюстрирующие условия возбуждения одночастотных, хаотических и двухчастотных колебаний в системе связанных автогенераторов.

**Ключевые слова:** генератор с выделенной инерционностью, величина связи, система двух связанных автогенераторов.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.18.58630.19998

Хаотические режимы колебаний систем связанных автогенераторов исследовались рядом авторов (см., например, [1,2]). Они всегда привлекали к себе внимание исследователей как большим разнообразием колебательных процессов, так и качеством генерируемых хаотических колебаний (см., например, [3–9]).

Особый интерес представляют связанные системы с возможностью хаотической динамики парциальных автогенераторов как обладающие наибольшим набором колебательных режимов, включающих и регулярные, и хаотические колебания на основе многочастотной динамики [3,4]. Однако в подавляющем большинстве работ основное внимание уделялось системам связанных автогенераторов с сильно различающимися собственными частотами и определяющими параметрами, при этом вводились дополнительные элементы и внешние сигналы, облегчающие генерацию хаоса в связанных системах автогенераторов.

Так, в [5,6] исследовалось влияние фильтра нижних частот на синхронизацию хаотических колебаний пары однонаправленно связанных автогенераторов хаотического сигнала, что изменяет фазу общих колебаний для расширения зоны хаоса на плоскости управляющих параметров.

В [7,8] изучена система связанных автогенераторов Кислова–Дмитриева при неидентичности управляющих параметров и отмечено, что основным сценарием колебаний при переходе к хаосу является разрушение квазипериодического режима.

В работе [9] изучалась синхронизация хаотических колебаний в системе двух взаимно связанных неидентичных генераторов Ресслера, каждый из которых находится в режиме винтового хаоса. При этом отмечалась основополагающая роль различия параметров парциальных автогенераторов для перехода к развитым хаотическим колебаниям.

Из приведенного обзора видно, что система связанных автогенераторов при равенстве парциальных частот составляющих практически не исследовалась. Таким образом, представляет интерес установить, какие режимы колебаний могут быть присущи системам двух связанных автогенераторов с одинаковыми парциальными частотами и каков возможный сценарий развития колебательного процесса в такой системе при переходе к хаосу.

В настоящей работе приводятся результаты численного анализа системы двух связанных автогенераторов с выделенной инерционностью для случая практического равенства парциальных частот.

Математическая модель генератора с выделенной инерционностью (ГВИ) была предложена в [10]. Модель интересна тем, что она адекватно описывает динамику усилительного каскада на мощном биполярном транзисторе, работающем в режиме большого сигнала. Параметры модели генератора соответствуют реальным параметрам систем на мощных транзисторах и могут быть использованы при расчете реальных схемных построений, как это было продемонстрировано в работах [11,12]. Хаотические колебания таких систем обладают близким к нормальному распределению плотности вероятности и имеют широкий частотный диапазон, что позволяет решать реальные задачи по созданию генераторов хаоса с высоким энергетическим потенциалом. Поэтому система связанных ГВИ может являться наиболее яркой прототипной моделью для исследования сложной динамики связанных генераторов с близкими частотами.

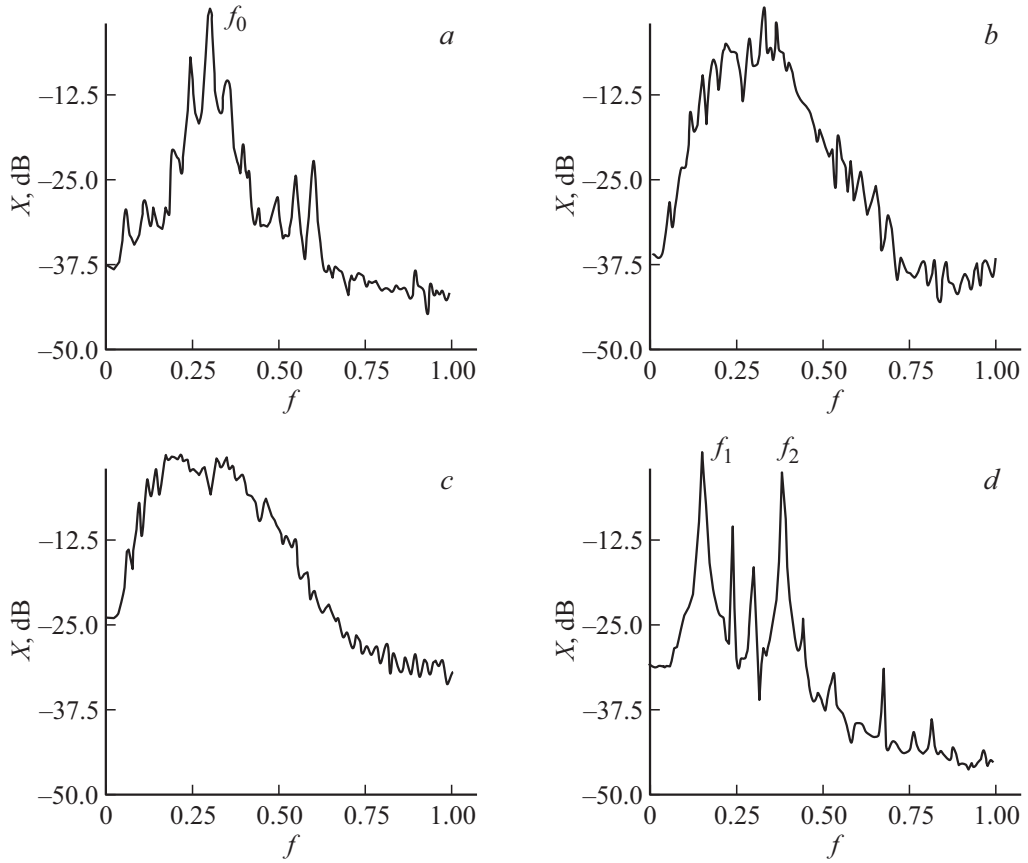



**Рис. 1.** Динамика колебательного процесса системы двух связанных ГВИ при изменении коэффициента связи между парциальными генераторами: $k = 0.1$ ($a$), 0.42 ($b$), 0.53 ($c$) и 0.61 ($d$).

С использованием результатов работы [10] систему уравнений двух связанных автогенераторов с выделенной инерционностью можно представить при емкостной связи в виде

$$\dot{X}_i = Y_i + (m_{1i} - m_{2i})X_i - X_i Z_i + kX_j, \quad X_i \le q_i,$$

$$\dot{X}_i = Y_i - m_{2i}X_i - q_i Z_i, \quad X_i > q_i,$$

$$\dot{Y}_i = -X_i,$$

$$\dot{Z}_i = -g_i Z_i + g_i F_i(2X_i - m_{2i}W_i)(2X_i - m_{2i}W_i)^2,$$

$$F_i(a) = \begin{cases} 1, & a \ge 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases}$$

$$\dot{W}_i = X_i - m_{2i}W_i, \qquad (1)$$

где $i$, $j = 1, 2$; $i \ne j$; $k$ — коэффициент связи; $X$, $Y$, $Z$, $W$ — безразмерные напряжение на входе нелинейного усилителя, ток в цепи обратной связи, напряжение на выходе однополупериодного инерционного преобразователя, ток во входном контуре соответственно; $m_1$, $m_2$, $q$, $g$ — параметры возбуждения, диссипации, ограничения и инерционности; $F(a)$ — единичная функция Хевисайда.

Решение системы (1) проводилось для малой расстройки по параметрам инерционности $g_1 = 0.045$, $g_2 = 0.05$ и равенства остальных параметров парциальных автогенераторов, значения которых соответствовали [10], т. е. $m_1 = 1.6$, $m_2 = 0.2$, $q = 1$, что удовлетворяет условию равенства парциальных частот.

На рис. 1 приведены спектрограммы, позволяющие проследить развитие колебательного процесса в системе (1) при изменении параметра связи $k$. Первоначально при малой связи ($k = 0.1$) в системе реализуется периодическое движение (П) в виде устойчивого предельного цикла на основе частоты $f_0$, равной частоте автономных колебаний парциальных автогенераторов (рис. 1, $a$).

Режим периодического движения существует в системе вплоть до достижения коэффициентом связи значения $k = 0.4$, при этом увеличение связи приводит к смене периодических режимов движения различной кратности. При $k = 0.4$ в системе начинается развитие сложного колебательного процесса, которое завершается возникновением хаотических колебаний на основе частоты $f_0$ (рис. 1, $b$).

Дальнейшее движение по параметру $k$ приводит к тому, что система из режима странного аттрактора на основе одной частоты ($\text{СА}_1$) переходит в режим генерации хаотических колебаний на основе двухчастотного движения ($\text{СА}_2$), что проявляется в спектральном представлении как двугорбость спектральной характе-

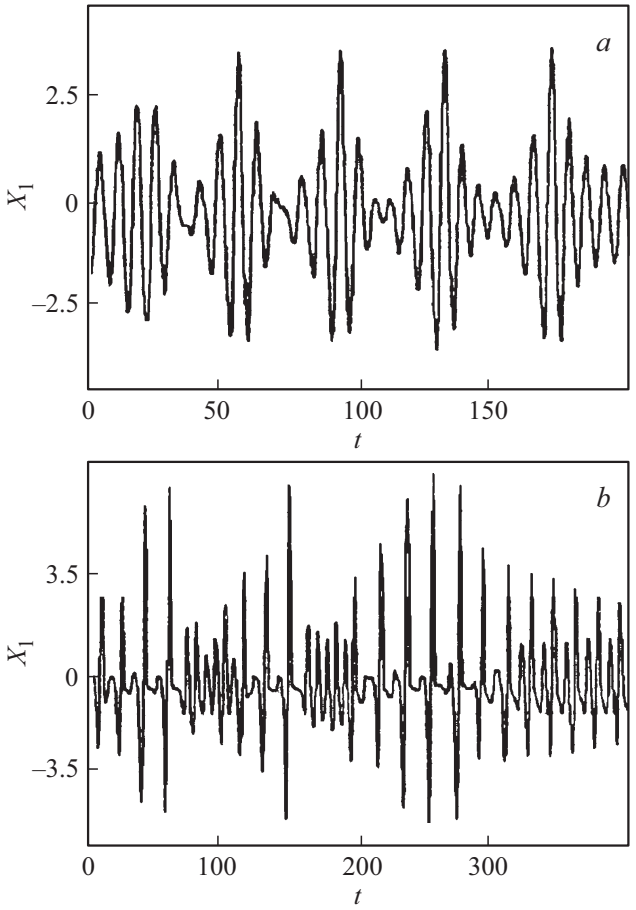



**Рис. 2.** Временны́е реализации $X_1$, соответствующие колебаниям системы связанных ГВИ при $k = 0.42$ ($СА_1$) ($a$) и $k = 0.56$ ($СА_2$) ($b$).

ристики переменной $X_1$ (рис. 1, $c$). Следующий этап эволюции режимов колебаний представлен на рис. 1, $d$. При превышении значения $k = 0.56$ режим $СА_2$ сменяется двухмодовым регулярным движением ($Т_2$) на основе частот $f_1$ и $f_2$, $f_1 < f_0 < f_2$. Увеличение коэффициента связи приводит к структурным перестройкам резонансных торов в фазовом пространстве системы, причем большему значению коэффициента связи соответствует меньшее количество спектральных составляющих в спектре мощности колебаний системы. Двухчастотная динамика системы демонстрирует возникновение дополнительных областей синхронизации в системе связанных ГВИ при высокой величине коэффициента связи.

Для анализа процессов, происходящих в исследуемой системе, рассмотрим временны́е реализации колебаний. Изменение переменной $X_1$ для $СА_1$ представлено на рис. 2, $a$, а для $СА_2$ — на рис. 2, $b$. Эти данные позволяют наиболее детально проследить механизм перехода $СА_1 – СА_2$.

Случай $СА_1$ характеризуется режимом нерегулярной перемежаемости между цугами колебаний различного периода. Увеличение параметра связи $k$ приводит к последовательной смене состояний системы в виде устойчивых предельных циклов, периоды колебаний которых последовательно увеличиваются на единицу. Система связанных ГВИ демонстрировала аддитивное увеличение кратности периода колебаний на единицу при переходе от устойчивого периодического движения с периодом $n/f_0$ к периодическому движению $(n+1)/f_0$, где $n = 1, 2, \ldots$. При каждом последующем переходе к устойчивому циклу с нарастанием периода колебаний на единицу расстояние между критическими значениями изменяемого параметра $k$ уменьшалось. В численном эксперименте максимальное значение $n = 5$ при значении $k = 0.39$.

При двухчастотном хаотическом режиме $СА_2$ происходит конкуренция взаимодействующих мод системы, проявляющаяся в том, что в системе хаотически чередуются колебания с частотами $f_1$ и $f_2$ (рис. 2, $b$). В рассматриваемом случае не происходит конкуренции частотных составляющих парциальных автогенераторов. Конкурируют моды системы, при этом рассматриваемая система связанных автогенераторов выступает как единая система с присущими только ей свойствами. В системе равноценных автогенераторов реализуются дополнительные области синхронизации, что проявляется в двухчастотном режиме колебаний.

Для выявления статистических свойств хаотических колебаний в режиме $СА_2$ были проведены расчеты по вычислению распределения плотности вероятности. Расчет гистограммы показал, что при $k = 0.53$ распределение плотности вероятности колебаний близко к нормальному гауссову.

Сценарий развития колебаний при выходе из режима $СА_2$ представляет собой последовательную смену числа комбинационных составляющих с расстановкой $(f_2 - f_1)/h$, где $h = 4, 3, 2$, т.е. переход от двухчастотного хаоса к режиму резонансных торов характеризовался последовательным уменьшением количества комбинационных составляющих с увеличением коэффициента связи $k$ в соответствии с законом, обратным натуральному ряду.

Таким образом, численный эксперимент в системе связанных ГВИ выявил появление вторичных нелинейных резонансов и хаотизацию колебаний в результате перехода от одночастотного к двухчастотному взаимодействию. Рассмотренный сценарий колебаний $П – СА_1 – СА_2 – Т_2$ показывает, что переход к хаотическим колебаниям в исследуемой системе связанных ГВИ для случая практического равенства парциальных частот сопровождается режимом конкуренции мод и перемежаемостью. Динамике системы свойственна закономерность, характерная для затягивания и переключения мод в области хаоса, что проявляется как переход между режимом на базе одночастотных колебаний и режимом на базе двухчастотных колебаний.

## Финансирование работы

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

[1] Б.Е. Железовский, Э.В. Кальянов, Письма в ЖТФ, **35** (14), 18 (2009). [B.E. Zhelezovskii, É.V. Kal'yanov, Tech. Phys. Lett., **35** (7), 647 (2009). DOI: 10.1134/S1063785009070177].
[2] Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов, ЖТФ, **81** (4), 7 (2011). [Yu.P. Emel'yanova, A.P. Kuznetsov, Tech. Phys., **56** (4), 435 (2011). DOI: 10.1134/S106378421104013X].
[3] А.Ю. Немец, Д.М. Ваврив, Вопр. атомной науки и техники, **98** (4), 282 (2015).
[4] V.A. Buts, D.M. Vavriv, Вопр. атомной науки и техники, **116** (4), 213 (2018).
[5] А.А. Прохоров, Е.С. Мчедлова, Письма в ЖТФ, **33** (4), 66 (2007). [A.A. Prokhorov, E.S. Mchedlova, Tech. Phys. Lett., **33** (2), 170 (2007). DOI: 10.1134/S106378500702023X].
[6] А.А. Прохоров, Е.С. Мчедлова, ЖТФ, **78** (11), 77 (2008). [A.A. Prokhorov, E.S. Mchedlova, Tech. Phys., **53** (11), 1463 (2008). DOI: 10.1134/S106378420811011X].
[7] А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов, ЖТФ, **78** (4), 129 (2008). [A.P. Kuznetsov, V.I. Paksyutov, Tech. Phys., **53** (4), 518 (2008). DOI: 10.1134/S1063784208040221].
[8] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич, ЖТФ, **91** (11), 1619 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51519.145-21 [A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, N.V. Stankevich, Tech. Phys., **67** (14), 2174 (2022). DOI: 10.21883/TP.2022.14.55214.145-21].
[9] А.В. Макаренко, ЖТФ, **86** (2), 110 (2016). [A.V. Makarenko, Tech. Phys., **61** (2), 265 (2016). DOI: 10.1134/S106378421602016X].
[10] С.В. Савельев, Журнал радиоэлектроники [Электронный журнал], № 6 (2017). http://jre.cplire.ru/jre/jun17/10/text.pdf
[11] С.В. Савельев, Л.А. Морозова, ЖТФ, **90** (12), 2148 (2020). DOI: 10.21883/JTF.2020.12.50135.418-19 [S.V. Savel'ev, L.A. Morozova, Tech. Phys., **65** (12), 2056 (2020). DOI: 10.1134/S1063784220120245].
[12] С.В. Савельев, Л.А. Морозова, Письма в ЖТФ, **49** (8), 7 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55128.19138 [S.V. Savel'ev, L.A. Morozova, Tech. Phys. Lett., **49** (4), 48 (2023). DOI: 10.21883/TPL.2023.04.55877.19138].