

01.5;03.2

Корреляционный анализ взаимодействия плоских капиллярных волн в режиме развитой волновой турбулентности

© Е.А. Кочурин^{1,2}, П.А. Русских¹¹ Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия² Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

E-mail: kochurin@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 26 февраля 2024 г.

В окончательной редакции 23 марта 2024 г.

Принято к публикации 23 марта 2024 г.

Представлены результаты прямого численного моделирования турбулентности плоских капиллярных волн, распространяющихся вдоль границы жидкости. Используемая модель является полностью нелинейной и учитывает эффекты накачки и диссипации энергии. Вычисленный спектр турбулентности находится в хорошем согласии с аналитической оценкой, полученной на основе теории слабой волновой турбулентности в предположении о доминирующем влиянии резонансных пятиволновых взаимодействий. Проведенный корреляционный анализ непосредственно показал наличие нетривиальных пятиволновых взаимодействий плоских капиллярных волн.

Ключевые слова: капиллярная турбулентность, прямое численное моделирование, конформные переменные.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.13.58165.19907

Известно, что системы нелинейных волн могут переходить в сложное хаотическое состояние (режим волновой турбулентности) в результате резонансных взаимодействий [1]. Условия взаимодействия N волн можно записать в виде

$$\omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) \dots \pm \omega(\mathbf{k}_N) = 0, \quad \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \dots \pm \mathbf{k}_N = 0, \quad (1)$$

где волновой вектор \mathbf{k} и угловая частота ω связаны дисперсионным соотношением $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Соотношения (1) являются следствием малости нелинейных эффектов, при этом число взаимодействующих волн N соответствует нелинейным эффектам порядка $N-1$.

Дисперсионное соотношение для капиллярных волн на поверхности жидкости имеет вид

$$\omega = (\sigma/\rho)^{1/2} k^{3/2}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (2)$$

где σ и ρ — поверхностное натяжение и массовая плотность жидкости соответственно. Условия (1) совместно с соотношением (2) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений. В ситуации, когда эта система имеет нетривиальные решения, может реализоваться процесс каскадной генерации мелкомасштабных гармоник. Такой процесс приводит к хаотизации эволюции волн и развитию волновой турбулентности. В изотропной трехмерной геометрии система уравнений (1) и (2) имеет нетривиальные решения в случае $N = 3$, т.е. доминируют трехволновые резонансные взаимодействия, представляющие собой распад одной волны на две: $1 \rightarrow 2$. Для такой ситуации Захаровым и Филоненко [2] был получен спектр капиллярной турбулентности для фурье-образа функции $\eta(\mathbf{r}, t)$, определяющей форму

поверхности жидкости, $S_\eta(k) = |\eta_k|^2$:

$$S_\eta(k) = C_{3w}^k P^{1/2} (\sigma/\rho)^{-3/4} k^{-15/4}, \quad (3)$$

где C_{3w}^k — безразмерная константа, P — скорость диссипации энергии на единицу площади поверхности. К настоящему моменту времени спектр изотропной капиллярной турбулентности (3) на поверхности жидкости подтвержден с высокой точностью как экспериментально [3,4], так и численно [5–7]. Ситуация существенно отличается в случае анизотропных возмущений поверхности, когда рассматриваемые волны распространяются в одном направлении, т.е. являются коллинеарными. В такой ситуации условия резонансного взаимодействия (1) для $N = 3$ и 4 перестают выполняться (система имеет только тривиальные решения) [8]. Тривиальные резонансные взаимодействия не приводят к генерации новых волн различных масштабов [1]. Экспериментальное исследование [9], проведенное для коллинеарных волн на поверхности ртути, свидетельствует о доминирующем влиянии пятиволновых резонансных взаимодействий $N = 5$, соответствующих четвертому порядку нелинейности. Для резонансов такого высокого порядка условия взаимодействия волн (1) всегда могут быть выполнены. На основе размерного анализа спектров слабой турбулентности авторы [9] предложили оценку для спектра капиллярной волновой турбулентности в квазиодномерной геометрии:

$$S_\eta(k) = C_{5w}^k P^{1/4} (\sigma/\rho)^{-3/8} k^{-27/8}, \quad (4)$$

где C_{5w}^k — соответствующая безразмерная постоянная.

В недавней работе [10] спектр турбулентности (4) был воспроизведен численно в рамках сильно нелинейной

плоскосимметричной модели. Следует отметить, что в ситуации вырожденной одномерной геометрии доминирующую роль в развитии волновой турбулентности могут играть так называемые когерентные структуры (солитоны или ударные волны), как, например, в работах [11,12]. Такие структуры могут существенно влиять на спектр наблюдаемой турбулентности. Таким образом, количественное согласие результатов работы [10] со спектром (4) недостаточно для уверенной демонстрации доминирующего влияния резонансных пятиволновых взаимодействий: необходимо непосредственно показать, что резонансы (1) для $N = 5$ действительно наблюдаются при прямом численном моделировании. Целью настоящей работы является решение именно такой задачи. На основе корреляционных функций высокого порядка будет показано, что взаимодействие нелинейных капиллярных волн с высокой точностью описывается условиями (1).

Рассмотрим кратко детали вычислительной модели для описания волновой капиллярной турбулентности. Движение жидкости считается плоскосимметричным, т.е. полная физическая модель является двумерной. Введем декартову систему координат $\{x, y\}$ так, чтобы уравнение $y = \eta(x, t)$ определяло отклонение свободной поверхности от невозмущенного состояния $y = 0$. Движение жидкости считается потенциальным, а ее эволюция описывается нестационарным уравнением Бернулли и кинематическим граничным условием (детали приведены в [10]). В основе модели лежит конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость новых конформных переменных $\{u, v\}$, т.е. изначально независимые координаты $\{x, y\}$ рассматриваются теперь в качестве функций $X(u, v)$ и $Y(u, v)$. Поверхность жидкости соответствует линии $v = 0$: $y = Y(u, t)$, $X = u - \hat{H}Y(u, t)$, $\psi = \Psi(u, t)$. Здесь \hat{H} — преобразование Гильберта, определяемое в фурье-пространстве как $\hat{H}f_k = i \text{sgn}(k)f_k$, ψ — значение потенциала скорости на границе жидкости. Форма границы жидкости выражается в неявном виде: $\eta(x, t) = Y[X(u, t), t]$. В настоящей работе мы не будем приводить полный вывод уравнений движения [13] и для краткости запишем только итоговую модельную систему

$$Y_t = (Y_u \hat{H} - X_u) \frac{\hat{H}\Psi_u}{J} - \hat{\gamma}_k Y, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_t = & \frac{(\hat{H}\Psi_u)^2 - \Psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J} \right) \Psi_u \\ & + \frac{X_u Y_{uu} - Y_u X_{uu}}{J^{3/2}} + F(k, t) - \hat{\gamma}_k \Psi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $J = X_u^2 + Y_u^2$ — якобиан конформного преобразования, $\hat{\gamma}_k$ — оператор вязкости, $F(k, t)$ — случайная вынуждающая сила, действующая на больших масштабах. При записи уравнений (5) и (6) мы перешли к безразмерным переменным, положив $\sigma = 1$ и $\rho = 1$. Дифференциальные и интегральные операторы в уравнениях (5) и (6) рассчитываются на основе спектральных

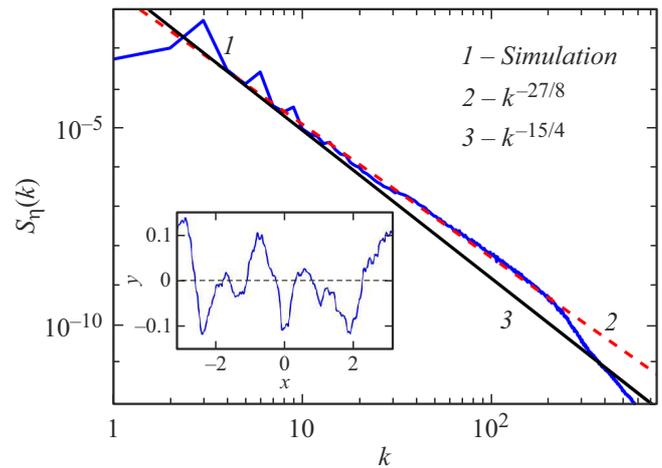


Рис. 1. Пространственный спектр турбулентности, рассчитанный в стационарном состоянии (кривая 1). Линия 2 соответствует спектру (4), линия 3 — спектру Захарова–Филоненко (3). На вставке показана вычисленная форма поверхности в режиме квазистационарного хаотического состояния (волновой турбулентности) в некоторый момент времени.

методов с полным числом фурье-гармоник 8192, т.е. граничные условия являются периодическими. Интегрирование по времени осуществляется явным методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с шагом $dt = 2.5 \cdot 10^{-6}$. Все расчеты, представленные в работе, выполнены в периодической области длиной $L = 2\pi$. Расчеты показывают, что под воздействием внешней вынуждающей силы система достаточно быстро (за время порядка 100–200 безразмерных единиц) переходит в режим квазистационарного хаотического движения (волновая турбулентность) (детали приведены в работе [10]). Пространственный спектр турбулентности, рассчитанный в стационарном состоянии, показан на рис. 1. Можно видеть, что спектр действительно приобретает степенной характер с показателем, близким к $-27/8$, т.е. спектр близок к оценке (4). При этом форма границы жидкости демонстрирует достаточно сложное нерегулярное поведение (см. вставку к рис. 1).

Для анализа волновых взаимодействий воспользуемся корреляционными функциями, широко используемыми в статистической физике [14]. Для анализа трехволнового взаимодействия построим коррелятор третьего порядка $B(k_1, k_2)$ (так называемая бикогеренция)

$$B(k_1, k_2) = \frac{|\langle \eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_1+k_2}^* \rangle|}{[\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_1+k_2}|^2 \rangle]^{1/2}}, \quad (7)$$

где η_k — пространственное преобразование Фурье функции $\eta(x, t)$, вычисленное в момент времени t , $\langle f \rangle$ означает усреднение по времени функции f , а звездочка соответствует комплексному сопряжению. Знаменатель в формуле (7) подобран таким образом, чтобы величина $B(k_1, k_2)$ менялась от 0 (нет корреляций) до 1 (полная

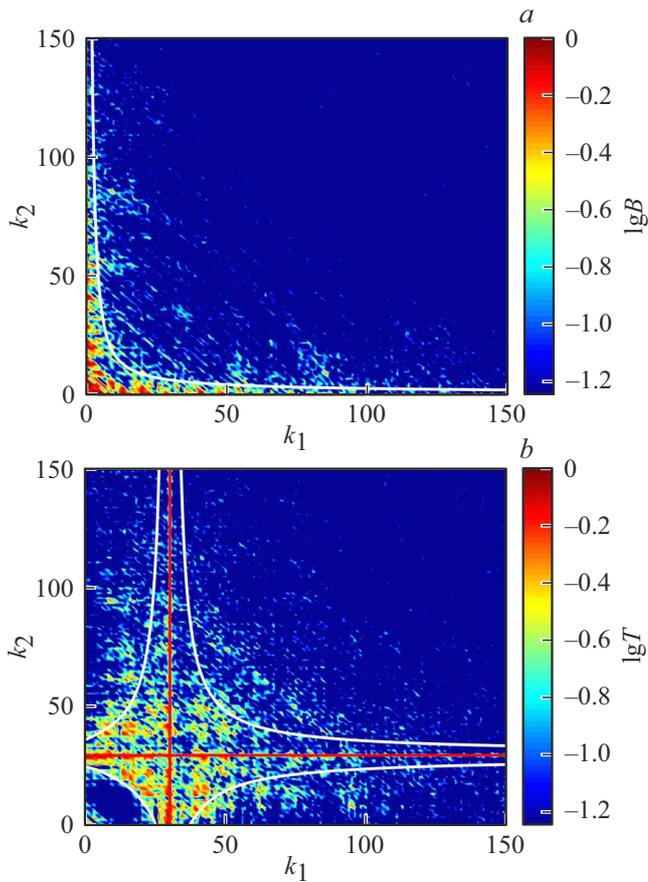


Рис. 2. Вычисленные корреляционные функции третьего (а) и четвертого (b) порядка в логарифмическом масштабе. Красные сплошные линии соответствуют тривиальным решениям системы (1), белые сплошные линии ограничивают области квазирезонансов. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

корреляция). Для $N = 3$ система (1) имеет только тривиальные решения: $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$. На рис. 2, а показана бикогеренция (7), вычисленная на основе данных прямого численного моделирования (усреднение по времени проводилось в узком интервале времени $\Delta t = 0.1$). Из рисунка видно, что корреляции обнаруживаются только вблизи осей координат, соответствующих тривиальным решениям. Такие корреляции возникают в результате эффекта нелинейного уширения частоты, при котором уравнения (1) обращаются в неравенство внутри некоторой области δ : $\omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) \dots \pm \omega(\mathbf{k}_N) \leq \delta$, а взаимодействие волн называют квазирезонансным. Данная область ограничена белыми сплошными линиями на рис. 2, а. Таким образом, вычисленная корреляционная функция (7) действительно показывает, что в системе имеются только тривиальные трехволновые взаимодействия, а также узкая область квазирезонансов, в которой происходит взаимодействие коротких волн с длинными. Такие квазирезонансы не могут обеспечить локальный переход энергии от больших масштабов к малым.

Анализ волновых резонансов следующего (четвертого) порядка будет строиться на основе коррелятора четвертого порядка (трикогеренция)

$$T(k_1, k_2, k_3) = \frac{|\langle \eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3}^* \eta_{k_1+k_2-k_3}^* \rangle|}{[\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_3} \eta_{k_1+k_2-k_3}|^2 \rangle]^{1/2}}. \quad (8)$$

Коррелятор (8) показывает вероятность рассеяния волн: $2 \rightarrow 2$. Для удобства графического представления трикогеренции зафиксируем один из волновых векторов: $k_3 = 30$. Вычисленный коррелятор (8) показан на рис. 2, b. На графике ярко выражены тривиальные решения $k_1 = k_3$ и $k_2 = k_3$, а также видна достаточно широкая область квазирезонансного взаимодействия. Каких-либо нетривиальных решений не наблюдается. Таким образом, построенные корреляторы (7) и (8) демонстрируют хорошее согласие с условиями (1) для $N = 3$ и 4.

Рассмотрим теперь коррелятор пятого порядка (квадрокogerенция)

$$Q(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{|\langle \eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3} \eta_{k_4}^* \eta_{k_1+k_2+k_3-k_4}^* \rangle|}{[\langle |\eta_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3}|^2 \rangle \langle |\eta_{k_4} \eta_{k_1+k_2+k_3-k_4}|^2 \rangle]^{1/2}}, \quad (9)$$

описывающий взаимодействия типа $3 \rightarrow 2$. Для демонстрации коррелятора (9) зафиксируем теперь два волновых числа: $k_3 = 15$ и $k_4 = 40$. Результат вычисления квадрокogerенции показан на рис. 3. Наблюдаемая картина принципиально отличается от представленной на рис. 2. В случае $N = 5$ система (1) действительно имеет точное нетривиальное решение, показанное сплошной красной линией на рис. 3. Найденные по формуле (9) корреляции локализованы в узкой области вблизи нетривиального решения системы (1). Отметим, что полученный результат находится в очень хорошем согласии с результатом экспериментальной работы [9],

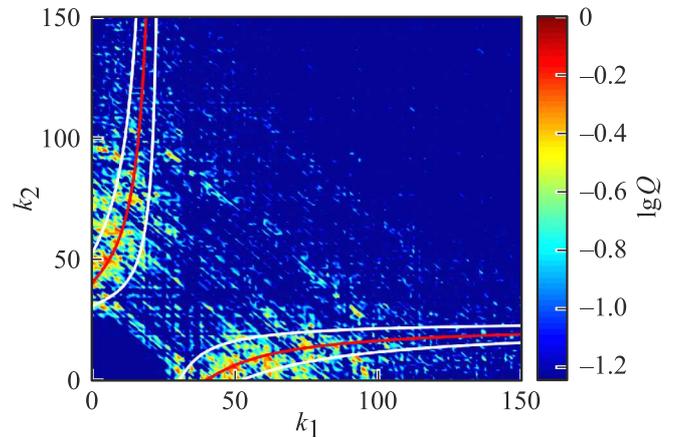


Рис. 3. Вычисленная корреляционная функция пятого порядка (9) в логарифмическом масштабе. Красные сплошные линии соответствуют нетривиальным решениям системы (1), белые сплошные линии ограничивают область квазирезонансов. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

в которой также показана возможность пятиволновых резонансных взаимодействий.

Таким образом, на основе данных прямого численного моделирования в настоящей работе проведен анализ корреляций плоских капиллярных волн в режиме развитой волновой турбулентности. Результаты моделирования не только продемонстрировали хорошее согласие вычисленного спектра турбулентности с теорией слабой турбулентности, но и непосредственно показали возможность реализации нетривиальных пятиволновых взаимодействий плоскосимметричных капиллярных волн.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10012.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V.E. Zakharov, G. Falkovich, V.S. L'vov, *Kolmogorov spectra of turbulence I. Wave turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [2] В.Е. Захаров, Н.Н. Филоненко, ПМТФ, **8** (5), 62 (1967). [V.E. Zakharov, N.N. Filonenko, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **8** (5), 37 (1967). DOI: 10.1007/BF00915178].
- [3] G.V. Kolmakov, M.Yu. Brazhnikov, A.A. Levchenko, L.V. Abdurakhimov, P.V.E. McClintock, L.P. Mezhov-Deglin, *Prog. Low Temp. Phys.*, **16**, 305 (2009). DOI: 10.1016/S0079-6417(08)00006-1].
- [4] E. Falcon, N. Mordant, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **54**, 1 (2022). DOI: 10.1146/annurev-fluid-021021-102043
- [5] A.N. Pushkarev, V.E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 3320 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.3320
- [6] L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu, E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 234501 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.234501
- [7] Y. Pan, D.K.P. Yue, *Phys. Rev. Lett.*, **113**, 094501 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.094501
- [8] E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, E. Falcon, *Письма в ЖЭТФ*, **112** (12), 799 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820240027 [E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, E. Falcon, *JETP Lett.*, **112** (12), 757 (2020). DOI: 10.1134/S0021364020240030].
- [9] G. Ricard, E. Falcon, *Europhys. Lett.*, **135** (6), 64001 (2021). DOI: 10.1209/0295-5075/ac2751
- [10] Е.А. Кочурин, *Письма в ЖЭТФ*, **118** (12), 889 (2023). DOI: 10.31857/S1234567823240047 [E.A. Kochurin, *JETP Lett.*, **118** (12), 893 (2023). DOI: 10.1134/S0021364023603640].
- [11] B. Rumpf, T.Y. Sheffield, *Phys. Rev. E*, **92** (2), 022927 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevE.92.022927
- [12] T.Y. Sheffield, B. Rumpf, *Phys. Rev. E*, **95** (6), 062225 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevE.95.062225
- [13] A.I. Dyachenko, E.A. Kuznetsov, M. Spector, V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A*, **221** (1-2), 73 (1996). DOI: 10.1016/0375-9601(96)00417-3

- [14] W.B. Collis, P.R. White, J.K. Hammond, *Mech. Syst. Signal Process.*, **12** (3), 375 (1998). DOI: 10.1006/mssp.1997.0145