

## Излучение в графене: кинетический подход

© В.А. Церюпа, Д.В. Чурочкин, В.В. Дмитриев, С.А. Смолянский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия  
e-mail: dmitrievvv@sgu.ru

Поступило в Редакцию 17 января 2024 г.  
В окончательной редакции 17 января 2024 г.  
Принято к публикации 17 января 2024 г.

Кратко суммированы последние результаты кинетической теории излучения в графене, состоящего как из квазиклассической составляющей, генерируемой плазменными токами, так и квантовой компоненты, порождаемой прямым взаимодействием с носителями, возбуждение которых внешним полем описано непертурбативными методами. Достигнутый уровень развития теории позволяет говорить о качественном уровне согласия с имеющимися экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** непертурбативная кинетика, сильные поля, графен, квазиклассическое и квантовое излучения.

DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57371.1-24

### Введение

Хорошо известно, что в низкоэнергетическом пределе графен описывается  $D = 2 + 1$  безмассовой двухскоростной квантовополевой моделью [1,2] с неаналитической зависимостью от напряженности внешнего электрического поля уже в области слабых полей (например, [3]). Это приводит к экспериментальной доступности в исследовании генерации электрон-дырочной плазмы (ЭДП) во внешних полях (эффект Ландау–Зинера [4,5]), аналогом которого в КЭД сильного поля является эффект Заутера–Швингера [6,7]. На этом уровне достигнуто хорошее согласие с экспериментом [8,9]. Проблемы возникают на этапе согласования  $D = 2 + 1$  динамики графена с  $D = 3 + 1$  динамикой взаимодействия внутренних токов с плазменным квазиклассическим полем и с квантовым полем, генерируемым прямым взаимодействием с носителями. Решение этой проблемы было намечено в работе [10] путем полуфеноменологической  $D = 3 + 1$  модификации КЭД в графене.

В настоящей работе мы реализуем этот подход в рамках непертурбативной кинетической теории как на уровне самосогласованного описания взаимодействия с плазменным полем (проблема обратной реакции (разд. 2)), так и при взаимодействии ЭДП с квантованным полем (разд. 3). Аналогичную проблему приходится рассматривать и при написании излучения (квазиклассического и квантового) во внешние области пространства по отношению к плоскости графена. Итоги работы кратко обсуждаются в Заключение.

### 1. Кинетическое уравнение

Основное кинетическое уравнение (КУ) в графене в приближении самосогласованного поля было получено

в непертурбативном базисе в работе [11] по аналогии с электрон-позитронной плазмой в КЭД сильного поля (например, [12]).

В этих работах эффективное электрическое поле с векторным потенциалом  $A^{(k)}(t)$  (индексы  $k = 1, 2$  соответствуют двум пространственным измерениям трехмерного евклидова пространства) и напряженностью поля  $E^{(k)}(t) = -(1/c)\dot{A}^{(k)}(t)$  предполагается пространственно однородным и зависящим от времени. В общем случае оно состоит из внешнего и внутреннего (плазменного) полей,

$$A^{(k)}(t) = A_{ex}^{(k)}(t) + A_{in}^{(k)}(t). \quad (1)$$

Для оценки эффективности создания ЭДП достаточно использовать приближение внешнего поля  $E(t) = E_{ex}(t)$ , в то время как самосогласованное описание колебаний плазмы нуждается в использовании полного поля.

Основное КУ описывает возбуждения в графене в терминах квазичастиц с квазиэнергией  $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{P^2}$  ( $v_F = 10^6$  м/с — скорость Ферми,  $\mathbf{p} = (p^{(1)}, p^{(2)}, 0)$  — импульс квазичастиц) и квазиимпульсом  $P^{(k)} = p^{(k)} - (e/c)A^{(k)}(t)$  с помощью функции распределения  $f(\mathbf{p}, t)$ . Это КУ учитывает условие электронейтральности электронной и дырочной подсистем  $f(\mathbf{p}, t) = f_e(\mathbf{p}, t) = f_h(-\mathbf{p}, t)$  и может быть записано либо в форме интегродифференциального уравнения немарковского типа [11]:

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t dt' \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') \quad (2)$$

или в эквивалентной форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t),$$

$$\dot{u}(\mathbf{p}, t) = \lambda(\mathbf{p}, t)[1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} v(\mathbf{p}, t),$$

$$\dot{v}(\mathbf{p}, t) = \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} u(\mathbf{p}, t), \quad (3)$$

где

$$\lambda(\mathbf{p}, t) = \frac{e v_F^2 [E^{(1)}(t)P^{(2)} - E^{(2)}(t)P^{(1)}]}{\varepsilon^2(\mathbf{p}, t)}, \quad (4)$$

$$\theta(\mathbf{p}; t, t') = \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t d\tau \varepsilon(\mathbf{p}, \tau). \quad (5)$$

Предполагается, что внешнее поле включается в момент времени  $t = t_0$ . Процедура перехода от КУ (2) к системе уравнений (3) приведена в работе [11]. Некоторые свойства КУ в форме (2) и (3) и их решения для различных моделей поля обсуждаются в работах [11,13].

Функция распределения  $f(\mathbf{p}, t)$  позволяет вычислить средние значения физических величин. Например, плотность числа квазичастиц и плотность энергии равны

$$n(t) = 2N_f \int [dp] f(\mathbf{p}, t), \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_{eh}(t) = 2N_f \int [dp] \varepsilon(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t), \quad (7)$$

где  $[dp] = d^2p(2\pi\hbar)^{-2}$  и  $N_f = 4$  — число различных сортов квазичастиц (две точки Дирака и два псевдоспиновых состояния), факторы 2 в (6) и (7) обусловлены равенством вкладов электронов и дырок. Полная плотность энергии квазичастичных возбуждений

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{eh}(t) + \mathcal{E}_{pol}(t) \quad (8)$$

включает в себя также плотность энергии поляризации [11]

$$\mathcal{E}_{pol}(t) = -N_f \hbar \int [dp] \lambda(\mathbf{p}, t) v(\mathbf{p}, t). \quad (9)$$

Полная плотность тока  $j^{(k)}(t)$  состоит из токов проводимости и поляризации [11],

$$j^{(k)}(t) = j_{cond}^{(k)}(t) + j_{pol}^{(k)}(t), \quad (10)$$

$$j_{cond}^{(k)}(t) = 2N_f e \int [dp] v_g^{(k)}(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t), \quad (11)$$

$$j_{pol}^{(k)}(t) = -N_f e \int [dp] v_{pol}^{(k)}(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \quad (12)$$

где

$$v_g^{(k)}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\partial p^{(k)}} = \frac{v_F^2 P^{(k)}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)}, \quad (13)$$

$$v_{pol}^{(k)}(\mathbf{p}, t) = \varepsilon(\mathbf{p}, t) \frac{\partial \lambda(\mathbf{p}, t)}{\partial E^{(k)}(t)} = \frac{v_F^2}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} \begin{cases} P^{(2)}, & k = 1, \\ -P^{(1)} & k = 2, \end{cases} \quad (14)$$

при этом  $\mathbf{v}_g \mathbf{v}_{pol} = 0$ . Токи (11), (12) определяются эффективным полем (1). Из формул (12) и (9) следует, что вспомогательные функции  $u(\mathbf{p}, t)$  и  $v(\mathbf{p}, t)$  в системе (3) описывают поляризационные эффекты в плотностях тока и энергии соответственно. Знак в правой части поляризационного тока (12) обуславливает подавление тока проводимости (11) (см. ниже).

## 2. Проблема обратной реакции

Следующий уровень описания учитывает обратную реакцию (ОР), связанную с генерацией внутренних плазменных токов и полей  $E_{in}^{(k)}(t) = -(1/c)\dot{A}_{in}^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ). Проблема возникает на этапе формулирования уравнения Максвелла, где напряженность электрического поля  $E_{in}^{(k)}$  сопоставляется с плотностью плазменного тока. Предположение о фундаментальности природы стандартной  $D = 3 + 1$  КЭД заставляет ввести некоторую размерную модификацию в динамику графена.

Такого рода видоизменения были предложены в работе [10]. Волновая функция носителей  $\psi(\mathbf{x}, t)$  ( $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ) размерности  $D = 2 + 1$  модифицировалась до случая  $D = 3 + 1$  пространства-времени по определению как

$$\psi(\mathbf{x}, z; t) = \psi(\mathbf{x}, t) \frac{1}{\sqrt{d}} \varphi(z) e^{ip^{(3)}z/\hbar}, \quad z = x^{(3)}, \quad (15)$$

где  $d \simeq 10^{-8}$  см — толщина графенового слоя. Безразмерная функция  $\varphi(z)$  описывает распределение носителей в поперечном направлении и удовлетворяет условиям нормировки и конфаймента ( $\varphi(z = 0, d) = 0$ ). В дальнейшем детали этого распределения игнорируются, так что  $\varphi(z) e^{ip^{(3)}z/\hbar} \rightarrow 1$ , что приводит к  $D = 3 + 1$  модифицированной волновой функции

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = d^{-1/2} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (16)$$

Этот результат приводит к следующему правилу размерной модификации средних величин типа  $a$ :

$$\langle \tilde{a} \rangle = d^{-1} \langle a \rangle, \quad (17)$$

где  $\langle a \rangle$  соответствует  $D = 2 + 1$  теории.

Теперь можно написать уравнение Максвелла для ОР в графене:

$$\dot{E}_{in}^{(k)}(t) = -4\pi \tilde{j}^{(k)}(t) = -4\pi d^{-1} j^{(k)}(t), \quad (18)$$

где  $D = 2 + 1$  плотности токов проводимости и поляризации определены уравнениями (10)–(12).

Система КУ (2) (или (3)) и уравнение Максвелла (18) описывает самосогласованную эволюцию ЭДП и внутреннего поля. Здесь можно выделить две стадии процессов обратной реакции: возбуждение ЭДП, которое ограничено периодом действия внешнего поля, и период свободной эволюцией системы, которая имеет вид периодических самосогласованных плазменных колебаний [11]. Ниже мы исследуем ОР графена в модели поля одиночного гауссовского импульса.

$$E_{ex}(t) = E_0 e^{-t^2/2\tau^2}. \quad (19)$$

В случае электрон-позитронной и партонной плазмы механизм ОР был хорошо изучен на основе непертурбативной кинетической теории в большом числе работ,

начиная с работы [14]. Принципиальная особенность графена — это безмассовость теории. Это приводит к практически безынерционному ответу системы и резкому ослаблению эффекта памяти в кинетическом описании. В результате, внутреннее плазменное поле сильно растет и почти компенсирует внешнее поле, так что эффективное поле оказывается сильно подавленным. Это ведет к подавлению образования ЭДП.

Эти особенности очень хорошо раскрываются при численном исследовании проблемы ОР в графене. Напряженности электрических полей (внешнего ( $E_{ex}$ ), внутреннего ( $E_{in}$ ) и эффективного ( $E$ )) показана на рис. 1, 2: суммарное поле  $E = E_{ex} + E_{in}$  сильно подавлено. После выключения внешнего поля появляются колебания плазмы, но они слабо выражены.

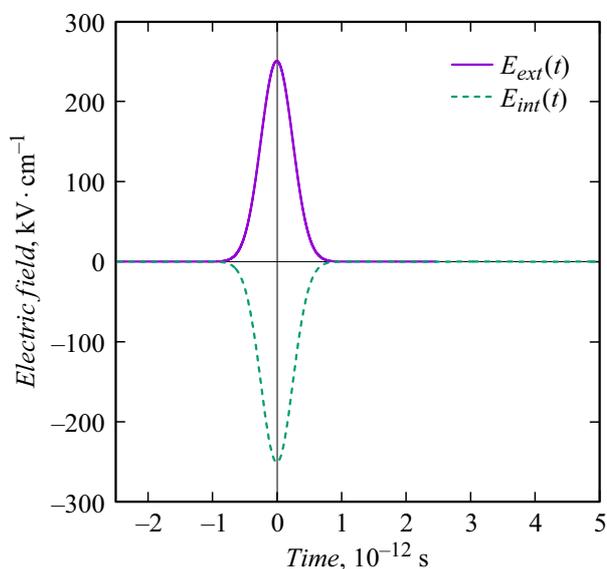


Рис. 1. Эволюция электрических полей в графене.

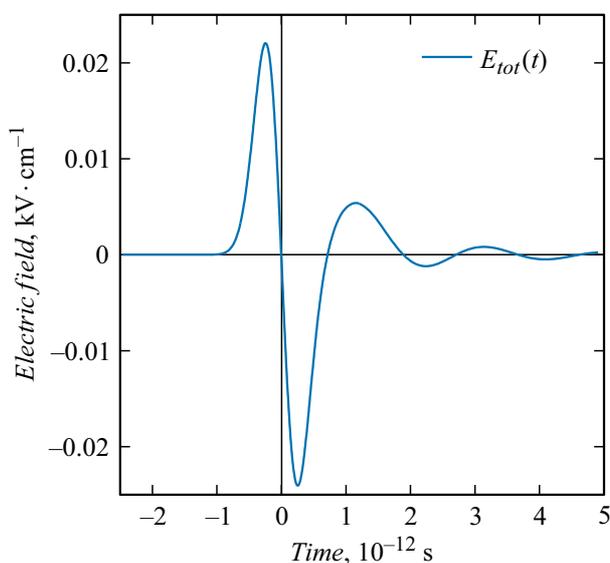


Рис. 2. Эволюция результирующего поля в графене.

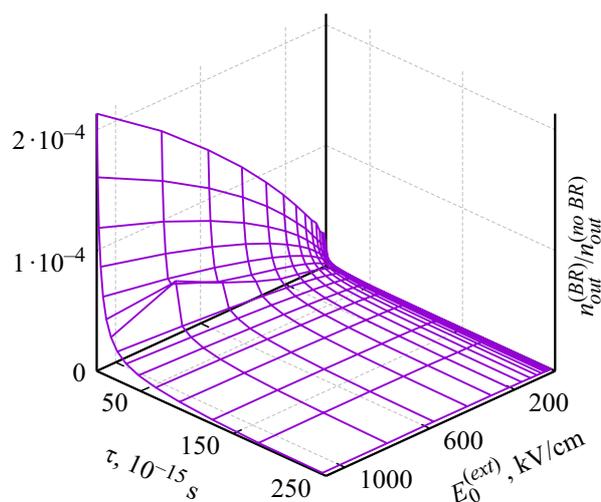


Рис. 3. Коэффициент истощения плотности частиц.

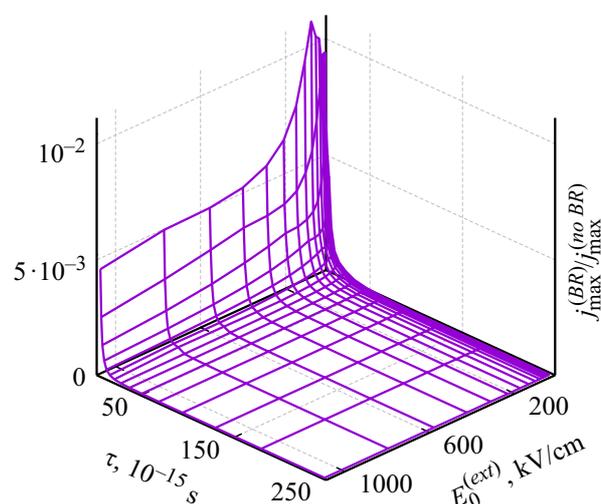


Рис. 4. Коэффициент истощения плотности токов.

Это приводит к истощению ЭДП. Для характеристики эффективности этого процесса введем коэффициент истощения по плотностям частиц в аут-состоянии и коэффициент истощения амплитуды токов:

$$\xi^{(n)} = \frac{n_{BR}^{out}}{n^{out}}, \quad \xi^{(j)} = \frac{j_{BR}^{max}}{j^{max}}, \quad (20)$$

где  $n_{BR}^{out}$  и  $j_{BR}^{max}$  вычисляются с учетом ОР, а в  $n^{out}$  и  $j^{max}$  ОР не учитывается (рис. 3, 4). На этих рисунках видно, что оба коэффициента истощения (20) очень малы при широком изменении параметров внешнего поля (19). Вывод об истощении ЭДП вследствие действия ОР находится в качественном согласии с результатами полуфеноменологической теории каскадных процессов в электрон-позитронной плазме (обзор [15]), подтверждающий идею Н. Бора о невозможности достижения критической напряженности поля  $E_c = m^2/e$  в полях, способных рождать электрон-позитронную плазму.

Удается восстановить на качественном уровне  $E_0$ - и  $\tau$ -зависимости в определениях (20) плотностей:

$$n^{out} \propto E_0^{3/2} \tau, \quad n_{BR}^{out} \propto E_0^2, \quad (21)$$

$$j^{max} \propto E_0^{3/2} \tau, \quad j_{BR}^{max} \propto E_0 \tau^{-1}. \quad (22)$$

Эти оценки приводят к следующим результатам для коэффициентов истощения

$$\xi^{(n)} \propto E_0^{1/2} \tau^{-1}, \quad \xi^{(j)} \propto E_0^{-1/2} \tau^{-2}. \quad (23)$$

### 3. Квазиклассическое и квантовое излучения

Квазиклассическое излучение (ККИ) во внешних областях относительно плоскости графена определяется внутренними плазменными токами. Плотность энергии этого излучения на большом расстоянии от плоскости графена равна (см. Приложение)

$$\mathcal{E}_{QCR}(t, z) = \frac{\pi}{c^2} j^2(t_{ret}), \quad (24)$$

где  $t_{ret} = t - z/c$  — время запаздывания и  $\mathbf{j}(t)$  — это  $D = 2 + 1$  плотность тока в графене. Как и следовало ожидать, ККИ является относительно слабым (рис. 5).

Взаимодействие ЭДП с фотонным полем генерирует квантовое излучение (КИ). Соответствующая система КУ для ЭДП и подсистемы фотонов в графене была получена в работе [16] на динамической основе по аналогии с кинетической теорией электрон-позитронно-фотонной плазмы в сильном внешнем поле [17,18].

Ниже мы рассмотрим только аннигиляционный канал в интеграле столкновений фотонного КУ, пренебрегая обратным влиянием рождения электрон-дырочных пар в результате поглощения фотона [16],

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{K}, t) = & 2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' K_y(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}; t, t') \\ & \times \left\{ f(\mathbf{p}, t') f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') + [f(\mathbf{p}, t') + f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') - 1] \right. \\ & \left. \times F(\mathbf{K}, t') \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где вектор  $\mathbf{k}$  принадлежит плоскости графена,  $\mathbf{K} = (\mathbf{k}, k^{(3)})$  — трехмерный волновой вектор с компонентой  $k^{(3)}$ , ортогональной плоскости графена;  $K = |\mathbf{K}|$ . Здесь ядро фотонного интеграла столкновений равно

$$\begin{aligned} K_y(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t') = & \frac{(eV_F)^2}{2\hbar c K d} \Gamma_{uv}^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) \Gamma_{uv}^{\alpha*}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t') \\ & \times \cos \Theta^{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t'). \end{aligned} \quad (26)$$

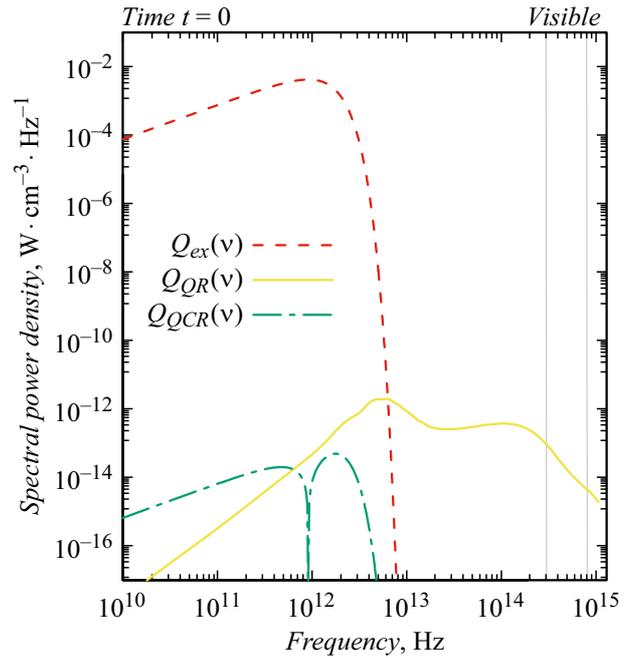


Рис. 5. Спектральные плотности мощности излучения при  $E_0 = 250 \text{ kV/cm}$ ,  $\tau = 2.46 \cdot 10^{-13} \text{ c}$ .

Фаза  $\Theta^{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t')$  соответствует однофотонной аннигиляционной диаграмме

$$\Theta^{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t') = \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t dt [\varepsilon(\mathbf{p}, t) + \varepsilon(\mathbf{p}', t) - c\hbar K]. \quad (27)$$

В случае достаточно медленного процесса можно пренебречь запаздыванием в произведении вершинных функций в (26) и воспользоваться соотношением [16]:

$$\sum_{\alpha} |\Gamma_{uv}^{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t)| = 1. \quad (28)$$

Интеграл по времени в (25) приводит тогда к закону сохранения энергии в элементарном акте аннигиляции (аналогичная ситуация встречается при выводе кинетического уравнения Больцмана [19]). В рассматриваемом случае процесс является неупругим и закон сохранения энергии в интеграле столкновений (25) не выполняется. В приближении (28) ядро интеграла столкновений в КУ (25) будет равно

$$K_y(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t') = \frac{(eV_F)^2}{2\hbar c K d} \cos \Theta^{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t, t'). \quad (29)$$

Появление здесь толщины  $d$  образца графена в полученном ИС вызвано использованием того же нормировочного объема  $V = Sd$  в разложении векторного потенциала по плоским волнам

$$\hat{A}^{(\pm)\alpha}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\hbar c}{V}} \sum_{\mathbf{K}} \frac{1}{2\sqrt{2K}} \epsilon_i^{\alpha}(\pm\mathbf{K}) \hat{A}^{(\pm)}(\pm\mathbf{K}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (30)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $i = 1, 2$ , а  $\epsilon_i^\alpha$  — поляризационная тетрада, поперечная к вектору  $\mathbf{K}$ . Итоговая система КУ в электрон-дырочном и фотонном секторах записана в термодинамическом пределе  $V \rightarrow \infty$  при фиксированной толщине образца. В итоге фотонное КУ в аннигиляционном канале (25) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{K}, t) &= \Lambda(K) \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \cos \Theta^{(+)}(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}; t, t') \\ &\times \{f(\mathbf{p}, t')f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') + [f(\mathbf{p}, t') + f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') - 1] \\ &\times F(\mathbf{K}, t')\} = C(\mathbf{K}, t), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $C(\mathbf{K}, t)$  — интеграл столкновений и

$$\Lambda(K) = \frac{(eV_F)^2}{\hbar c K d}. \quad (32)$$

Учитывая сходство математических структур интегродифференциальных КУ (2) и (31), нетрудно записать фотонное КУ (31) в форме системы интегродифференциальных уравнений, аналогичной (3):

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{K}, t) &= \Lambda(K) \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{U}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= [f(\mathbf{p}, t') + f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') - 1] F(\mathbf{K}, t') + f(\mathbf{p}, t') \\ &\times f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') - \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, \tau) + \varepsilon(\mathbf{p}', t) - c\hbar K] V(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{V}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, \tau) + \varepsilon(\mathbf{p}', t) - c\hbar K] U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t). \end{aligned} \quad (33)$$

Эта система удобна для численного изучения проблемы квантового излучения. Функция распределения носителей  $f(\mathbf{p}, t)$  рассматривается здесь как решение КУ (2) (или системы (3)).

Для сравнения полученных результатов характеристик ККИ и КИ на основе кинетической теории с экспериментальными результатами [20] выберем параметры внешнего поля в модели (19) как  $E_0 = 250 \text{ kV/cm}$  и  $\tau = 246 \text{ fs}$ , которые близки к параметрам поля работы [20].

Спектральные плотности мощности ККИ ( $Q_{QCR} = \dot{\epsilon}_{QCR}$ , (24)) и КИ

$$Q_{QR}(v) = \frac{4\pi\hbar}{c^3} v^3 \dot{F}(v) \quad (34)$$

представлены на рис. 5. Поле ККИ имеет узкий спектр с резкой границей в высокочастотной области, тогда как спектр КИ гораздо более широкий и достигает ультрафиолетовой спектральной области. В рассмотренной ситуации диапазон видимого света достигает только КИ. Этот результат близок к экспериментально наблюдаемому [20].

Излучение направлено в обе стороны от поверхности графена и ортогонально к ней.

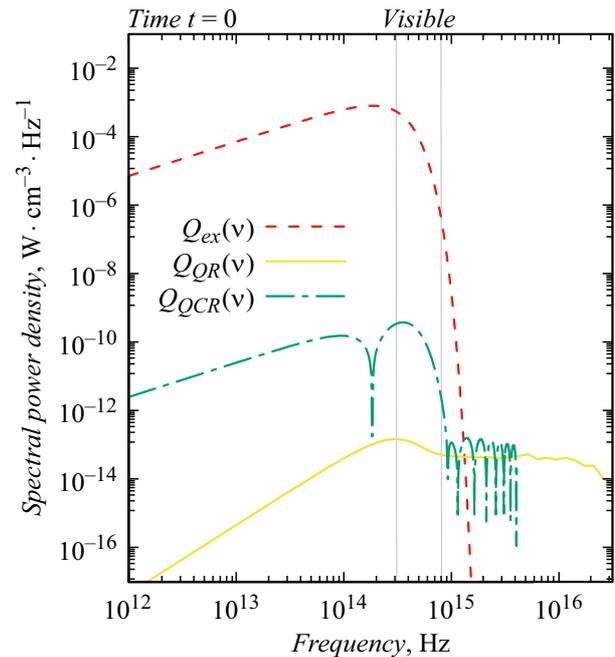


Рис. 6. Спектральные плотности мощности излучения при  $E_0 = 100 \text{ kV/cm}$ ,  $\tau = 1.23 \cdot 10^{-15} \text{ с}$ .

Ситуация, изображенная на рис. 5, не является универсальной и может быть очень различной в зависимости от параметров внешнего поля (рис. 6). Представленная теория позволяет делать необходимые предсказания в этих случаях.

Нужно заметить, что излучение (квазиклассическое и квантовое) приводит к невозполнимым потерям энергии, привносимой внешним полем. В настоящей работе эти потери не учитываются.

## Заключение

Работа кратко суммирует результаты развития последовательной кинетической теории процессов излучения в графене, включающей непертурбативное описание рождения ЭДП, механизм обратной реакции при генерации внутренних токов и квазиклассического плазменного поля, а также квантового поля, возбуждаемого прямым взаимодействием с носителями в аннигиляционном канале. Существенным элементом такого описания является использование методов КЭД [10], позволяющими совместить  $D = 2 + 1$  динамику графена с  $D = 3 + 1$  динамикой ККИ и КИ. Достигнутый уровень описания излучения в графене позволяет говорить о качественном согласии с экспериментами [20]. Можно ожидать, что дальнейшее развитие кинетической теории (например, учет процесса обратной реакции фотонной подсистемы в аннигиляционном канале) позволит выйти на количественный уровень описания процессов излучения в графене. В частности, было бы интересно сравнить механизмы истощения внешнего поля в графене и

простейшей модели полупроводника, где также возможно непертурбативное кинетическое описание электрон-дырочных возбудений [21,22].

**Приложение**

Плазменные токи в графене генерируют квазиклассическое излучение во внешние, по отношению к плоскости  $S$  графена, области пространства. Характеристики этого излучения можно найти, используя модель пространственно однородных токов в бесконечной проводящей плоскости [23].

Исходным является выражение для запаздывающего векторного потенциала  $A_{ret}^k(r, t)$  поля излучения в точке  $z$ , расположенной на расстоянии  $z$  от плоскости графена [24].

$$A_{ret}^k(r, t) = \frac{1}{c} \int_{S_d} \frac{d^3x}{\rho} \tilde{j}^{(k)}(t - \rho/c) = \frac{1}{c} \int_S j^{(k)}(t - \rho/c). \tag{П1}$$

где  $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ , а  $d$  — толщина образца графена. Последнее равенство (П1) записано с учетом правила соответствия (17). Поскольку теперь  $rdr = \rho d\rho$ , из (П1) получаем

$$A_{ret}^k(r, t) = \frac{2\pi}{c} \int_z^\infty j^{(k)}(t - \rho/c). \tag{П2}$$

Вводя единичный вектор  $\mathbf{e}^{(3)}$  в направлении, перпендикулярном плоскости  $S$ , можно получить из (П2) напряженность электрического и магнитного полей в точке наблюдения  $z$

$$\mathbf{E}_{rad}(t_0) = -\frac{2\pi}{c} \mathbf{j}(t_0), \tag{П3}$$

$$\mathbf{B}_{rad}(t_0) = -\frac{2\pi}{c} [\mathbf{e}^{(3)}, \mathbf{j}(t_0)], \tag{П4}$$

где  $t_0 = t - z/c$  — время запаздывания. Отсюда следует выражение для вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S}_{rad}(t_0) = c \mathcal{E}_{rad}(t_0) \mathbf{e}^{(3)}, \tag{П5}$$

где плотность энергии квазиклассического излучения равна

$$\mathcal{E}_{rad}(t_0) = \frac{\pi}{c^2} j^2(t_0). \tag{П6}$$

Рассмотрим теперь КИ во внешних областях пространства („вверх“ и „вниз“) относительно плоскости графена  $S$ .

Поскольку речь идет о том, чтобы распространить кинетическое описание фотонного излучения во внешние области, целесообразно воспользоваться методом функции Грина математической физики, рассматривая плоскость графена как активную зону излучения, описываемую фотонным КУ (31).

Фотонное КУ (31) с интегралом столкновений  $C(\mathbf{K}, t)$ :

$$\dot{F}(\mathbf{K}, t) = C(\mathbf{K}, t), \tag{П7}$$

справедливое на плоскости графена  $S$ , продолжим в обе области свободного пространства ( $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ ,  $x^{(3)} = z$ ),

$$\begin{aligned} \hat{L}(\mathbf{X}, t)F(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t) &\equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + c\mathbf{e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) F(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t) \\ &= Q(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t) \equiv C(\mathbf{K}, t)\delta(z/d), \end{aligned} \tag{П8}$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{K}/K$ . Определим теперь функцию Грина уравнения (П8)

$$\hat{L}(\mathbf{X}, t)G(\mathbf{X} - \mathbf{X}', t - t') = \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}')\delta(t - t'). \tag{П9}$$

Отсюда можно найти фурье-образ функции Грина уравнения ( $\varepsilon > 0$ ):

$$G(\mathbf{K}, \omega) = \frac{-i}{\omega + i\varepsilon - cK}. \tag{П10}$$

Теперь можно записать решение КУ (П8) через функцию источника  $Q(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t)$ ,

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t) = \int d^3X dt' G(\mathbf{X} - \mathbf{X}', t - t') Q(\mathbf{X}', \mathbf{K}, t'). \tag{П11}$$

Используя определение  $Q(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t)$  (П8) и формулу (П10), отсюда получим

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{K}, t) = \frac{d}{2c} C(\mathbf{K}, t_{ret}), \tag{П12}$$

где  $t_{ret} = t - z/c$  — время запаздывания.

**Конфликт интересов**

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

**Список литературы**

- [1] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 109 (2009).
- [2] A.K. Geim, K.S. Novoselov. *Nat. Mater.*, **6**, 183 (2007).
- [3] B. Dora, R. Moessner. *Phys. Rev. B*, **81**, 165431 (2010).
- [4] L.D. Landau. *Phys. Z. Sowjetunion*, **2**, 46 (1932).
- [5] C. Zener. *Proc. R. Soc. A*, **137** 696 (1932).
- [6] F. Sauter. *Z. Physik*, **73**, 547 (1932).
- [7] J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **82**, 664 (1951).
- [8] A. Scmitt et al. *Nature Phys.*, **19**, 830 (2023).
- [9] A.I. Berdyugin et al. *Science*, **375**, 430 (2022).
- [10] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman. *Eur. Phys. J. Plus*, **138**, 171 (2023).
- [11] S.A. Smolyansky, A.D. Panferov, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. *Particles*, **3**, 456 (2020).
- [12] I.A. Aleksandrov, V.V. Dmitriev, D.G. Sevostyanov, S.A. Smolyansky. *Eur. Phys. J. Special Topics*, **229**, 3469 (2020).
- [13] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, N.T. Gevorgyan, B. Mahato, A.D. Panferov, S.A. Smolyansky, V.A. Tserypa. *Springer Proc. Phys.*, **281**, 187 (2022).

- [14] J.C.R. Bloch, V.A. Mizerny, A.V. Prozorkevich, C.D. Roberts, S.M. Schmidt, S.A. Smolyansky, D.V. Vinnik. *Phys. Rev. D*, **60**, 116011 (1999).
- [15] Н.Б. Нарожный, А.М. Федотов. *УФН*, **185**, 103 (2015).
- [16] S. Gavrilov, D. Gitman, V. Dmitriev, A. Panferov, S. Smolyansky. *Universe*, **6**, 205 (2020).
- [17] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, G. Roeske, S.A. Smolyansky. *Phys. Rev. D*, **84**, 085028 (2011).
- [18] S.A. Smolyansky, A.D. Panferov, S.O. Pirogov, A.M. Fedotov. arXiv:1901.02305v1 (2019).
- [19] L.P. Kadanoff, G. Baym. *Quantum Statistical Mechanics*; Pines, D. eds. W.A. Benjamin (NY., USA, 1962).
- [20] I.V. Oladyshkin, S.B. Bodrov, A.V. Korzhimanov, A.A. Murzanev, Yu.A. Sergeev, A.I. Korytin, M.D. Tokman, A.N. Stepanov. *Phys. Rev. B*, **106**, 205407 (2022).
- [21] S.A. Smolyansky, A.V. Tarakaniv, M. Bonitz. *Contrib. Plasma Phys.*, **49**, 575 (2009).
- [22] M.F. Linder, A. Lorke, R. Schützhold. *Phys. Rev. B*, **97**, 035203 (2018).
- [23] T.A. Abbott, D.J. Griffiths. *Am. J. Phys.* **53**, 1203 (1985).
- [24] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля* (Физматлит, М., 2006)