

Динамика теплового перепутывания пар кубитов в трехкубитной модели Тависа–Каммингса

© А.Р. Багров, Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева,
443086 Самара, Россия
e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

Поступило в Редакцию 20 декабря 2023 г.
В окончательной редакции 20 декабря 2023 г.
Принято к публикации 20 декабря 2023 г.

Найдено точное решение модели, состоящей из трех идентичных кубитов, один из которых находится в свободном состоянии, а два других заперты в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействуют с выделенной модой этого резонатора. На основе точного решения проведен расчет отрицательностей пар кубитов для двух начальных состояний кубитов W-типа и теплового состояния поля резонатора. Исследовано влияние интенсивности теплового шума резонатора и параметров, задающих начальное состояние кубитов на степень их перепутывания в процессе дальнейшей эволюции. Показано, что в случае малых интенсивностей теплового поля резонатора для одного из рассматриваемых начальных состояний кубитов наблюдается эффект мгновенной смерти перепутывания, в то время как для другого начального состояния кубитов такой эффект отсутствует. Установлено также, что при увеличении интенсивности теплового поля эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место для обоих состояний.

Ключевые слова: кубиты, истинно перепутанные состояния W-типа, тепловое поле, однофотонные переходы, перепутывание, отрицательность, мгновенная смерть перепутывания.

DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23

Введение

Многокубитные квантовые перепутанные состояния являются основным ресурсом физики квантовых вычислений, квантовых коммуникаций, квантовой криптографии, квантовой метрологии и т.д. [1–6]. Трудности экспериментального и теоретического описания перепутанных состояний существенно возрастают с увеличением числа кубитов в системе. Поэтому в настоящее время особое внимание уделяется теоретическому и экспериментальному изучению трехкубитных систем (см. ссылки в [7]). Важность изучения таких систем обусловлена также тем, что они могут быть использованы для создания универсальных трехкубитных вентилях, являющихся альтернативой универсальному двухкубитному вентилю контролируемого отрицания и однокубитным вращениям при квантовых вычислениях. Для трехкубитных систем существуют три типа чистых состояний: сепарабельные или полностью разделенные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния [8–13]. Состояние является сепарабельным, если трехкубитный вектор состояния является тензорным произведением трех однокубитных векторов состояния. Если трехкубитное состояние можно представить в виде тензорного произведения вектора состояния двух перепутанных кубитов и вектора состояния третьего кубита, то мы имеем бисепарабельное состояние. Состояния, которые не являются ни сепарабельными, ни бисепарабельными, называются истинно перепутанными. Для трехкубитной системы существуют два неэквивалентных

класса истинно перепутанных состояний, так называемые состояния Гринбергера–Хорна–Цайлингера (GHZ-состояния) и состояния Вернера (W-состояния). Для трехкубитных смешанных состояний также существуют сепарабельные, бисепарабельные или истинно запутанные состояния. Истинно перепутанные состояния GHZ-типа можно использовать для детерминированной телепортации или плотного кодирования, а W-состояния кубитов используются при квантовой обработке информации. В последние годы истинно перепутанные состояния GHZ- и W-типа получены экспериментально для трехкубитных систем различной физической природы: сверхпроводящих джозефсоновских колец, ионов в магнитных ловушках, квантовых точек и др. (см. ссылки в [1–17]). Для генерации, контроля и управления перепутанными состояниями кубитов обычно используют электромагнитные поля резонаторов. Соответственно для теоретического описания динамики перепутывания кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями резонаторов, используют модель Тависа–Каммингса и ее обобщения (см. ссылки в [18]). В последнее время большое внимание уделяется изучению динамики кубитов, взаимодействующих с тепловыми полями резонаторов. Это связано с тем, что тепловые фотоны всегда присутствуют в резонаторах, которые имеют конечные температуры. В зависимости от физической природы кубитов температуры резонаторов варьируются от нано- и милликельвинов до комнатных температур. Взаимодействие с тепловыми полями резонаторов приводит к осцилляциям Раби параметров перепутывания кубитов

тов, что ухудшает качество хранящейся в подсистеме кубитов квантовой информации и ведет к появлению дополнительных ошибок. Это означает необходимость детального изучения влияния теплового шума резонатора на динамику перепутывания кубитов, приготовленных изначально в перепутанных состояниях. В результате, в последнее время изучению динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловым шумом резонатора, было посвящено большое количество работ (см. ссылки в [7,19]). Еще одна проблема, которая возникает при взаимодействии кубитов с тепловыми полями резонаторов, — это появление эффекта мгновенной смерти перепутывания, т.е. исчезновение перепутывания кубитов на временах, значительно меньших времени декогеренции. Этот эффект был теоретически предсказан в работах Ю и Эберли [20] при изучении унитарной динамики двух кубитов в резонаторе. Позднее указанный эффект наблюдался экспериментально [21]. Для трехкубитной системы возможность мгновенной смерти перепутывания трех кубитов, взаимодействующих с тепловым полем общего резонатора, была предсказана в работе [22].

В работах [23,24] исследована трехкубитная модель Тависа–Каммингса, в которой два кубита заперты в резонаторе и взаимодействуют с общим полем этого резонатора, а третий кубит находится в свободном состоянии. В качестве количественной меры перепутывания авторы выбрали отрицательности всех возможных пар кубитов в трехкубитной системе. При этом в работе [23] авторы ограничились рассмотрением динамики системы в случае начальных бисепарабельных состояний кубитов и вакуумного состояния поля, а в работе [24] — начальных истинно перепутанных состояний W-типа и фоковских состояний поля. Представляет интерес обобщить результаты работ [23,24] на случай, когда кубиты в резонаторе взаимодействуют с общим тепловым полем.

В настоящей работе мы рассмотрели систему трех идентичных кубитов, два из которых заперты в микроволновом резонаторе и взаимодействуют с модой теплового поля, а третий кубит может свободно перемещаться вне резонатора. В качестве начальных состояний подсистемы кубитов выбраны истинно перепутанные состояния W-типа. Нами найдено точное решение уравнения эволюции для рассматриваемой системы, и на основе точного решения проведен расчет отрицательностей пар кубитов. Показано также различие в поведении параметров перепутывания для различных видов W-состояний.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим систему, состоящую из трех идентичных кубитов A, B и C . Два кубита B и C резонансно взаимодействуют с квантованным электромагнитным полем резонатора. Кубит A может свободно перемещаться вне резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой системы в дипольном приближении и приближении

вращающейся волны можно записать в виде

$$\hat{H}_I = \sum_{i=2}^3 \hbar \gamma (\hat{\sigma}_i^+ \hat{a} + \hat{\sigma}_i^- \hat{a}^+), \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_i \langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i -ом кубите, \hat{a} и \hat{a}^+ — операторы уничтожения и рождения фотонов в моде резонатора, γ — константа, которая характеризует кубит-фотонное взаимодействие. Мы предполагаем, что все кубиты A, B и C имеют одинаковые энергетические щели и константы взаимодействия кубитов B и C с резонатором одинаковы.

Мы будем предполагать, что в начальный момент времени кубиты находятся в одном из следующих истинно перепутанных состояний W-типа:

$$|\Psi(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta \sin \varphi |+, -, +\rangle + \sin \theta \cos \varphi |-, +, +\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |-, -, +\rangle + \sin \theta \sin \varphi |-, +, -\rangle + \sin \theta \cos \varphi |+, -, -\rangle, \quad (3)$$

где параметры θ и φ определяют начальную степень перепутывания кубитов. В качестве начального состояния поля резонатора выберем одномодовое тепловое поле, матрица плотности которого выражается формулой

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (4)$$

Здесь статистический вес p_n имеет следующий вид:

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где \bar{n} — среднее число тепловых фотонов, которое определяется стандартной формулой Бозе–Эйнштейна:

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1}.$$

Здесь k_B — постоянная Больцмана, T — температура резонатора.

Найдем вначале временную эволюцию рассматриваемой системы для фоковских начальных состояний поля n ($n = 0, 1, 2, \dots$), а затем обобщим полученное решение на случай теплового поля. Нами решено нестационарное уравнение Шредингера для начальных состояний (2)–(3):

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}_I |\Psi_n(t)\rangle, \quad (5)$$

где $|\Psi_n(t)\rangle$ — волновая функция, описывающая состояние системы, которая включает кубиты и моду поля резонатора, в произвольный момент времени t . При этом решение уравнения (5) необходимо искать отдельно для различных чисел фотонов в моде n .

Запишем явный вид волновой функции для начального состояния кубитов (2) и числа фотонов в моде $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n=0}(t)\rangle = & X_1(t)|+, +, -, 0\rangle + X_2(t)|+, -, +, 0\rangle \\
 & + X_3(t)|+, -, -, 1\rangle + Z_1(t)|-, +, +, 0\rangle \\
 & + Z_2(t)|-, +, -, 1\rangle + Z_3(t)|-, -, +, 1\rangle \\
 & + Z_4(t)|-, -, -, 2\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В случае начального числа фотонов в моде $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n \geq 1}(n, t)\rangle = & B_1(n, t)|+, +, +, n-1\rangle \\
 & + B_2(n, t)|+, +, -, n\rangle + B_3(n, t)|+, -, +, n\rangle \\
 & + B_4(n, t)|+, -, -, n+1\rangle + G_1(n, t)|-, +, +, n\rangle \\
 & + G_2(n, t)|-, +, -, n+1\rangle + G_3(n, t)|-, -, +, n+1\rangle \\
 & + G_4(n, t)|-, -, -, n+2\rangle.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя волновые функции (6)–(7) и гамильтониан взаимодействия (1) в нестационарное уравнение Шредингера (5), получаем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}
 i\dot{X}_1(t) = \gamma X_3(t), \\
 i\dot{X}_2(t) = \gamma X_3(t), \\
 i\dot{X}_3(t) = \gamma (X_1(t) + X_2(t)),
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 i\dot{B}_1(n, t) = \gamma \sqrt{n} (B_3(n, t) + B_2(n, t)), \\
 i\dot{B}_2(n, t) = \gamma (\sqrt{n+1} B_4(n, t) + \sqrt{n} B_1(n, t)), \\
 i\dot{B}_3(n, t) = \gamma (\sqrt{n+1} B_4(n, t) + \sqrt{n} B_1(n, t)), \\
 i\dot{B}_4(n, t) = \gamma \sqrt{n+1} (B_3(n, t) + B_2(n, t)),
 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}
 i\dot{G}_1(n, t) = \gamma \sqrt{n+1} (G_3(n, t) + G_2(n, t)), \\
 i\dot{G}_2(n, t) = \gamma (\sqrt{n+2} G_4(n, t) + \sqrt{n+1} G_1(n, t)), \\
 i\dot{G}_3(n, t) = \gamma (\sqrt{n+2} G_4(n, t) + \sqrt{n+1} G_1(n, t)), \\
 i\dot{G}_4(n, t) = \gamma \sqrt{n+2} (G_3(n, t) + G_2(n, t)).
 \end{cases} \tag{9}$$

Решая системы дифференциальных уравнений (8),(9) с учетом начальных условий

$$X_1(0) = \cos \theta, \quad X_2(0) = \sin \theta \sin \varphi, \quad X_3(0) = 0;$$

$$B_2(0) = \cos \theta, \quad B_3(0) = \sin \theta \sin \varphi, \quad B_1(0) = B_4(0) = 0;$$

$$G_1(0) = \sin \theta \cos \varphi, \quad G_2(0) = G_3(0) = G_4(0) = 0$$

и учитывая, что $G_i(n, t) \rightarrow Z_i(t)$ при числе фотонов в моде $n = 0$, получаем аналитические выражения для всех временных коэффициентов:

$$X_1(t) = \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta - \sin^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$X_2(t) = \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \sin \varphi - \sin^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta,$$

$$X_3(t) = -\frac{i \sin(\sqrt{2}\gamma t)(\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{2}},$$

$$B_1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})(\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{4n+2}},$$

$$\begin{aligned}
 B_2(n, t) = & \frac{1}{2} \left[(1 + \cos(\gamma t \sqrt{4n+2})) \cos \theta \right. \\
 & \left. + (\cos(\gamma t \sqrt{4n+2}) - 1) \sin \theta \sin \varphi \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_3(n, t) = & \frac{1}{2} \left[(\cos(\gamma t \sqrt{4n+2}) - 1) \cos \theta \right. \\
 & \left. + (1 + \cos(\gamma t \sqrt{4n+2})) \sin \theta \sin \varphi \right], \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$B_4(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \sin(\gamma t \sqrt{4n+2})(\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{4n+2}},$$

$$G_1(n, t) = \frac{[2 + n + (n+1) \cos(\gamma t \sqrt{4n+6})] \cos \varphi \sin \theta}{2n+3},$$

$$G_2(n, t) = G_3(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \cos \varphi \sin \theta \sin(\gamma t \sqrt{4n+6})}{\sqrt{4n+6}},$$

$$G_4(n, t) = -\frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \cos \varphi \sin \theta \sin^2 \left(\gamma t \sqrt{\frac{3}{2} + n} \right)}{2n+3}.$$

Проведем аналогичные вычисления для другого начального перепутанного состояния W-типа (3). Запишем явный вид волновой функции в последующие моменты времени для начального состояния (3) в случае числа фотонов в моде $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n=0}(t)\rangle = & \sin \theta \cos \varphi |+, -, -, 0\rangle + Y_1(t) |-, +, -, 0\rangle \\
 & + Y_2(t) |-, -, +, 0\rangle + Y_3(t) |-, -, -, 1\rangle.
 \end{aligned} \tag{11}$$

В случае числа фотонов в моде $n = 1$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n=1}(t)\rangle = & X_1(t) |+, +, -, 0\rangle + X_2(t) |+, -, +, 0\rangle \\
 & + X_3(t) |+, -, -, 1\rangle + Z_1(t) |-, +, +, 0\rangle \\
 & + Z_2(t) |-, +, -, 1\rangle + Z_3(t) |-, -, +, 1\rangle \\
 & + Z_4(t) |-, -, -, 2\rangle.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В случае числа фотонов в моде $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{n \geq 2}(n, t)\rangle = & B_1(n, t) |+, +, +, n-2\rangle \\
 & + B_2(n, t) |+, +, -, n-1\rangle + B_3(n, t) |+, -, +, n-1\rangle \\
 & + B_4(n, t) |+, -, -, n\rangle + G_1(n, t) |-, +, +, n-1\rangle \\
 & + G_2(n, t) |-, +, -, n\rangle + G_3(n, t) |-, -, +, n\rangle \\
 & + G_4(n, t) |-, -, -, n+1\rangle.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя волновые функции (11)–(13) и гамильтониан взаимодействия (1) в нестационарное уравнение Шредингера (5), получаем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot{Y}_1(t) = \gamma Y_3(t), \\ i\dot{Y}_2(t) = \gamma Y_3(t), \\ i\dot{Y}_3(t) = \gamma (Y_1(t) + Y_2(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{B}_1(n, t) = \gamma \sqrt{n-1} (B_3(n, t) + B_2(n, t)), \\ i\dot{B}_2(n, t) = \gamma (\sqrt{n} B_4(n, t) + \sqrt{n-1} B_1(n, t)), \\ i\dot{B}_3(n, t) = \gamma (\sqrt{n} B_4(n, t) + \sqrt{n-1} B_1(n, t)), \\ i\dot{B}_4(n, t) = \gamma \sqrt{n} (B_3(n, t) + B_2(n, t)). \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} i\dot{X}_1(t) = \gamma X_3(t), \\ i\dot{X}_2(t) = \gamma X_3(t), \\ i\dot{X}_3(t) = \gamma (X_1(t) + X_2(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{G}_1(n, t) = \gamma \sqrt{n} (G_3(n, t) + G_2(n, t)), \\ i\dot{G}_2(n, t) = \gamma (\sqrt{n+1} G_4(n, t) + \sqrt{n} G_1(n, t)), \\ i\dot{G}_3(n, t) = \gamma (\sqrt{n+1} G_4(n, t) + \sqrt{n} G_1(n, t)), \\ i\dot{G}_4(n, t) = \gamma \sqrt{n+1} (G_3(n, t) + G_2(n, t)). \end{cases} \quad (15)$$

Решая системы дифференциальных уравнений (14), (15) с учетом начальных условий

$$Y_1(0) = \sin \theta \sin \varphi, \quad Y_2(0) = \cos \theta, \quad Y_3(0) = 0;$$

$$X_3(0) = \sin \theta \cos \varphi, \quad X_1(0) = X_2(0) = 0;$$

$$B_4(0) = \sin \theta \cos \varphi, \quad B_1(0) = B_2(0) = B_3(0) = 0;$$

$$G_2(0) = \sin \theta \sin \varphi, \quad G_3(0) = \cos \theta, \quad G_1(0) = G_4(0) = 0$$

и учитывая, что $G_i(n, t) \rightarrow Z_i(t)$ при числе фотонов в моде $n = 1$, получаем аналитические выражения для всех временных коэффициентов:

$$Y_1(t) = \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \sin \varphi - \sin^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta,$$

$$Y_2(t) = \cos^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \cos \theta - \sin^2 \left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}} \right) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$Y_3(t) = -\frac{i \sin(\sqrt{2}\gamma t) (\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{2}},$$

$$X_1(t) = X_2(t) = -\frac{i \cos \varphi \sin(\sqrt{2}\gamma t) \sin \theta}{\sqrt{2}},$$

$$X_3(t) = \cos(\sqrt{2}\gamma t) \cos \varphi \sin \theta,$$

$$B_1(n, t) = -\frac{2\sqrt{n-1}\sqrt{n} \cos \varphi \sin \theta \sin^2 \left(\gamma t \sqrt{n - \frac{1}{2}} \right)}{2n - 1},$$

$$B_2(n, t) = B_3(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \cos \varphi \sin \theta \sin(\gamma t \sqrt{4n-2})}{\sqrt{4n-2}},$$

$$B_4(n, t) = \frac{(n-1 + n \cos(\gamma t \sqrt{4n-2})) \cos \varphi \sin \theta}{2n-1},$$

$$G_1(n, t) = -\frac{i\sqrt{n} \sin(\gamma t \sqrt{4n+2}) (\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{4n+2}},$$

$$G_2(n, t) = \frac{1}{2} \left[(\cos(\gamma t \sqrt{4n+2}) - 1) \cos \theta + (1 + \cos(\gamma t \sqrt{4n+2})) \sin \theta \sin \varphi \right],$$

$$G_3(n, t) = \frac{1}{2} \left[(1 + \cos(\gamma t \sqrt{4n+2})) \cos \theta + (\cos(\gamma t \sqrt{4n+2}) - 1) \sin \theta \sin \varphi \right],$$

$$G_4(n, t) = -\frac{i\sqrt{n+1} \sin(\gamma t \sqrt{4n+2}) (\cos \theta + \sin \theta \sin \varphi)}{\sqrt{4n+2}}. \quad (16)$$

Для расчета любых известных критериев перепутывания систем трех кубитов нам необходимо рассчитать редуцированные двух- и трехкубитные матрицы плотности. В качестве первого шага для реализации этой цели необходимо вычислить матрицу плотности полной системы „три кубита + мода поля“. Зная явный вид временных волновых функций, мы можем построить матрицу плотности полной системы как:

$$\rho_{ABCF}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi_n(t)\rangle \langle \Psi_n(t)|, \quad (17)$$

которая для состояния (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{ABCF}(t) = & \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\Psi_{n \geq 1}(n, t)\rangle \langle \Psi_{n \geq 1}(n, t)| \\ & + p_0 |\Psi_{n=0}(t)\rangle \langle \Psi_{n=0}(t)|, \end{aligned} \quad (18)$$

а для состояния (3)

$$\begin{aligned} \rho_{ABCF}(t) = & \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\Psi_{n \geq 2}(n, t)\rangle \langle \Psi_{n \geq 2}(n, t)| \\ & + p_1 |\Psi_{n=1}(t)\rangle \langle \Psi_{n=1}(t)| + p_0 |\Psi_{n=0}(t)\rangle \langle \Psi_{n=0}(t)|. \end{aligned} \quad (19)$$

В настоящее время строгие количественные критерии перепутывания установлены только для двухкубитных систем. К ним относятся согласованность [25] и отрицательность [26,27]. В настоящей работе для оценки степени перепутывания мы будем рассчитывать отрицательности пар кубитов, входящих в трехкубитную систему.

Для вычисления критерия отрицательности пары кубитов i и j нам нужна будет двухкубитная матрица плотности $\rho_{ij}(t)$, которая определяется следующим образом:

$$\rho_{ij}(t) = Tr_k Tr_F \rho_{ABCF} \quad (i, j, k = A, B, C; i \neq j \neq k). \quad (20)$$

Как известно, отрицательность задается следующей формулой:

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l (\mu_{ij})_l^-, \quad (21)$$

где μ_{ij} — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{ij}^T(t)$, которая имеет для состояний (2),(3) следующий вид:

$$\rho_{ij}^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{ij} & 0 & 0 & (\rho_{23}^{ij})^* \\ 0 & \rho_{22}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{ij} & 0 \\ \rho_{23}^{ij} & 0 & 0 & \rho_{44}^{ij} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда формула для отрицательности (21) преобразуется в следующее выражение:

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44}^{ij} - \rho_{11}^{ij})^2 + 4\rho_{23}^{ij} - \rho_{11}^{ij} - \rho_{44}^{ij}}. \quad (23)$$

Для начального состояния (2) и кубитов A и B элементы матрицы плотности выражаются следующим образом:

$$\rho_{11}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(n, t)|^2 + |B_2(n, t)|^2] + p_0 |X_1(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_3(n, t)|^2 + |B_4(n, t)|^2] + p_0 [|X_2(t)|^2 + |X_3(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|G_1(n, t)|^2 + |G_2(n, t)|^2] + p_0 [|Z_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|G_3(n, t)|^2 + |G_4(n, t)|^2] + p_0 [|Z_3(t)|^2 + |Z_4(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_3(n, t)G_1^*(n, t) + B_4(n, t)G_2^*(n, t)] + p_0 [X_3(t)Z_2^*(t) + X_2(t)Z_1^*(t)].$$

Для начального состояния (2) и кубитов B и C элементы матрицы плотности выражаются следующим образом:

$$\rho_{11}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_1(n, t)|^2 + |G_1(n, t)|^2] + p_0 |Z_1(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_2(n, t)|^2 + |G_2(n, t)|^2] + p_0 [|X_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2],$$

$$\rho_{33}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_3(n, t)|^2 + |G_3(n, t)|^2] + p_0 [|X_2(t)|^2 + |Z_3(t)|^2],$$

$$\rho_{44}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [|B_4(n, t)|^2 + |G_4(n, t)|^2] + p_0 [|X_3(t)|^2 + |Z_4(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{BC}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n [B_2(n, t)B_3^*(n, t) + G_2(n, t)G_3^*(n, t)] + p_0 [X_1(t)X_2^*(t) + Z_2(t)Z_3^*(t)].$$

Для начального состояния (3) и кубитов A и B элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(n, t)|^2 + |B_2(n, t)|^2] + p_1 |X_1(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(n, t)|^2 + |B_4(n, t)|^2] + p_1 [|X_2(t)|^2 + |X_3(t)|^2] + p_0 (\sin \theta \cos \varphi)^2,$$

$$\rho_{33}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|G_1(n, t)|^2 + |G_2(n, t)|^2] + p_1 [|Z_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2] + p_0 |Y_1(t)|^2,$$

$$\rho_{44}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|G_3(n, t)|^2 + |G_4(n, t)|^2] + p_1 [|Z_3(t)|^2 + |Z_4(t)|^2] + p_0 [|Y_2(t)|^2 + |Y_3(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{AB}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_4(n, t)G_2^*(n, t) + B_3(n, t)G_1^*(n, t)] + p_1 [X_2(t)Z_1^*(t) + X_3(t)Z_2^*(t)] + p_0 \sin \theta \cos \varphi Y_1^*(t).$$

Для начального состояния (3) и кубитов B и C элементы матрицы плотности выглядят следующим образом:

$$\rho_{11}^{BC}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_1(n, t)|^2 + |G_1(n, t)|^2] + p_1 |Z_1(t)|^2,$$

$$\rho_{22}^{BC}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_2(n, t)|^2 + |G_2(n, t)|^2] + p_1 [|X_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2] + p_0 |Y_1(t)|^2,$$

$$\rho_{33}^{BC}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_3(n, t)|^2 + |G_3(n, t)|^2] + p_1 [|X_2(t)|^2 + |Z_3(t)|^2] + p_0 |Y_2(t)|^2,$$

$$\rho_{44}^{BC}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [|B_4(n, t)|^2 + |G_4(n, t)|^2] + p_1 [|X_3(t)|^2 + |Z_4(t)|^2] + p_0 [(\sin \theta \cos \varphi)^2 + |Y_3(t)|^2],$$

$$\rho_{23}^{BC}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n [B_2(n, t)B_3^*(n, t) + G_2(n, t)G_3^*(n, t)] + p_1 [X_1(t)X_2^*(t) + Z_2(t)Z_3^*(t)] + p_0 Y_1(t)Y_2^*(t).$$

2. Результаты и обсуждение

Результаты компьютерного моделирования отрицательностей пар кубитов для начальных состояний кубитов (2) и (3) и различных параметров модели представлены на рис. 1–10.

На рис. 1 показана зависимость параметра перепутывания ε_{AB} кубитов A и B от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов (2) с $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. На рисунке хорошо видно, что на некоторых временах перепутывание резко исчезает и остается нулевым в течение конечного времени, прежде чем возродиться. Это означает наличие в системе эффекта мгновенной смерти перепутывания. На рисунке также видно, что с увеличением среднего числа тепловых фотонов максимальная степень перепутывания кубитов быстро уменьшается. Заметим, что исчезновение перепутывания свободного кубита и кубита в резонаторе при увеличении интенсивности теплового поля происходит в рассматриваемой трехкубитной модели значительно быстрее, чем в двухкубитной модели, в которой один из кубитов свободен, а второй заперт в тепловом резонаторе [28].

На рис. 2 представлена 3D-зависимость отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \theta)$ для тех же кубитов от приведенного времени γt и параметра θ для того же начального

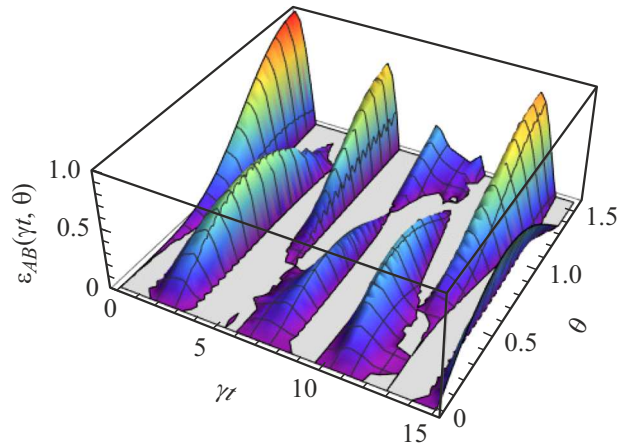


Рис. 2. 3D-график зависимости отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \theta)$ от приведенного времени γt и параметра θ для кубитов A и B в случае начального истинно перепутанного состояния (2) и фиксированных значений среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\varphi = \pi/4$.

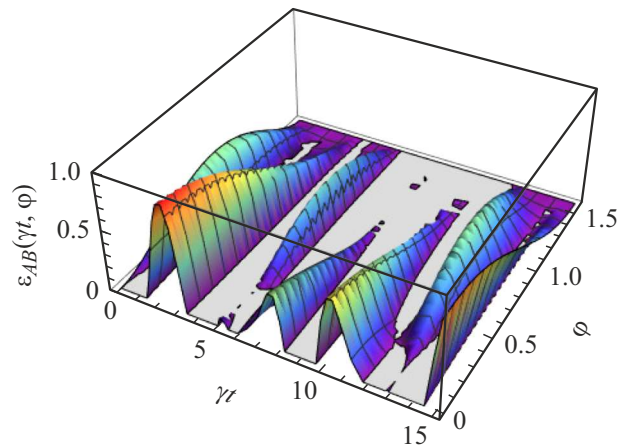


Рис. 3. 3D-график зависимости отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \varphi)$ от приведенного времени γt и параметра φ для кубитов A и B и начального истинно перепутанного состояния (2) с фиксированными значениями среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$.

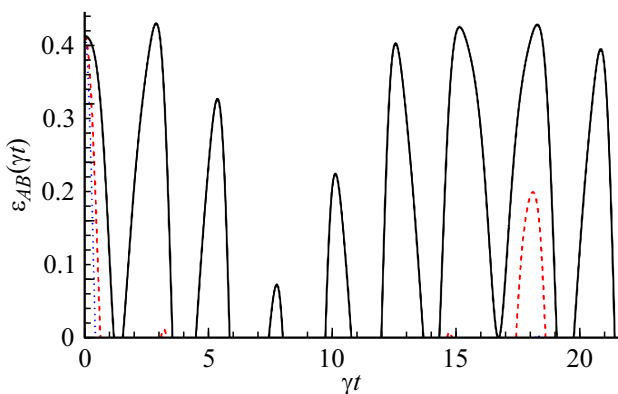


Рис. 1. График зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для кубитов A и B и начального истинно перепутанного состояния (2). Параметры $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Среднее число тепловых фотонов в моде: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

состояния (2) и фиксированных значений среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\varphi = \pi/4$. На рис. 3 представлена 3D-зависимость отрицательности для тех же кубитов $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \varphi)$ от приведенного времени γt и параметра φ для того же начального состояния (2) и фиксированных значений среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. На рис. 2 и 3 хорошо видно, что для выбранного начального состояния кубитов мгновенные смерть и рождение перепутывания имеют место для любых значений параметров θ и φ . Стоит также отметить, что длительность интервалов времени между мгновенной смертью и мгновенным рождением перепутывания сильно зависит от начальных параметров θ и φ .

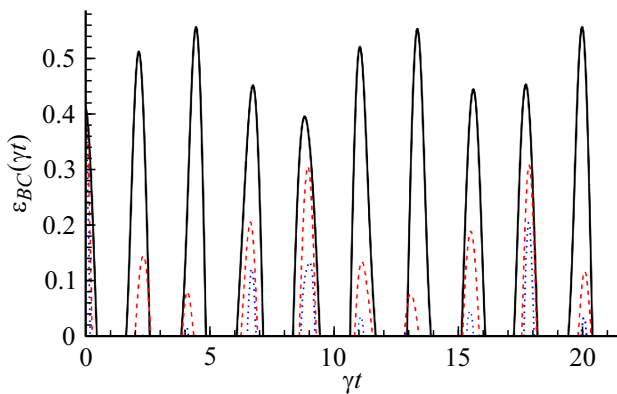


Рис. 4. График зависимости отрицательности $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для кубитов B и C и начального истинно перепутанного состояния (2). Параметры $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Среднее число тепловых фотонов: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

На графиках также видно, что максимальная степень перепутывания тем больше, чем меньше φ (рис. 3) и больше θ (рис. 2). Таким образом, продолжительность промежутка времени отсутствия перепутывания и максимальная степень перепутывания существенно зависят от начального состояния кубитов. На рис. 4 показана зависимость параметра перепутывания кубитов B и C от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов (2), параметров $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Хорошо видно, что для параметра перепутывания кубитов, находящихся внутри резонатора, также имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Однако, в отличие от кубитов A и B , кубиты B и C оказываются перепутанными даже в случае интенсивных тепловых полей резонатора. При этом длительность интервалов времени, в течение которого перепутывание отсутствует, уменьшается. Для сравнения на рис. 5 представлена временная зависимость отрицательности кубитов A и B (или A и C) для трех идентичных кубитов, запертых в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействующих с общим тепловым полем, для начального состояния вида (2) (соответствующие формулы для отрицательности пар кубитов приведены в нашей работе [7]). Сравнение рисунков показывает, что для рассматриваемой модели поведение отрицательности пары кубитов, запертых в резонаторе, аналогично поведению любой из пар кубитов в системе трех кубитов, находящихся в общем резонаторе.

На рис. 6 показана зависимость параметра перепутывания кубитов A и B от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов (3), $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. На рисунке видно, что для кубитов A и B и начального

состояния кубитов (3) в отличие от начального состояния (2) в случае малых интенсивностей теплового поля эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует. Такой результат согласуется с результатами работы [24], в которой изучалась динамика перепутывания кубитов в рамках рассматриваемой модели для начального состояния кубитов вида (3) и вакуумного состояния поля резонатора ($\bar{n} \rightarrow 0$). При этом эффект мгновенной смерти перепутывания возникает при увеличении интенсивности теплового шума резонатора. Видно, что промежутки времени, в течение которых перепутывание отсутствует для различных интенсивностей, существенно меньше, чем в случае начального состояния кубитов (2). На рис. 7 представлена 3D-зависимость отрицательности для тех же кубитов $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \theta)$ от приведенного времени γt и параметра θ для начального состояния (3) и фиксированных значений среднего числа тепловых фотонов

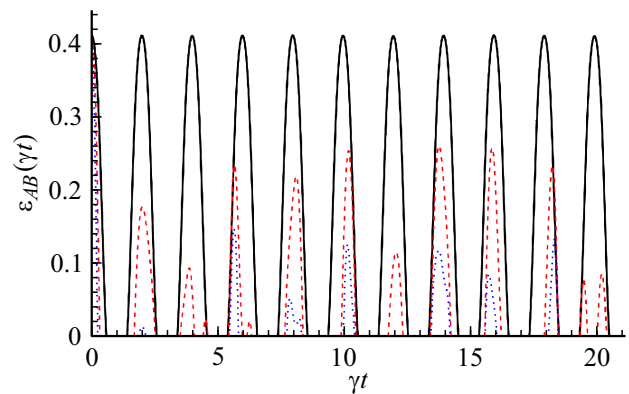


Рис. 5. График зависимости отрицательности $\varepsilon_{ij}(\gamma t)$ от приведенного времени γt в модели „три кубита в общем резонаторе“ для любой пары кубитов и начального истинно перепутанного состояния (2). Параметры $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Среднее число тепловых фотонов: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

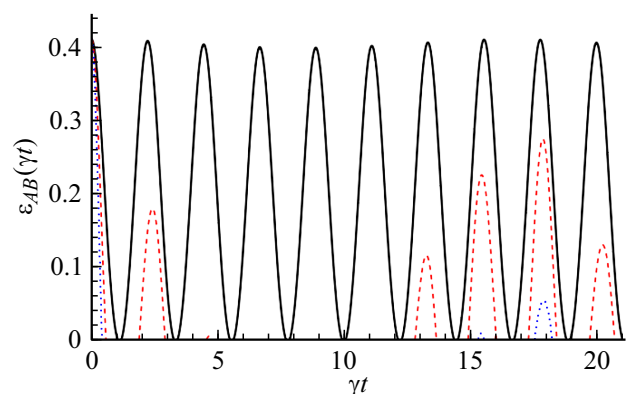


Рис. 6. График зависимости отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t)$ от приведенного времени γt для кубитов A и B и начального истинно перепутанного состояния (3). Параметры $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Среднее число фотонов: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

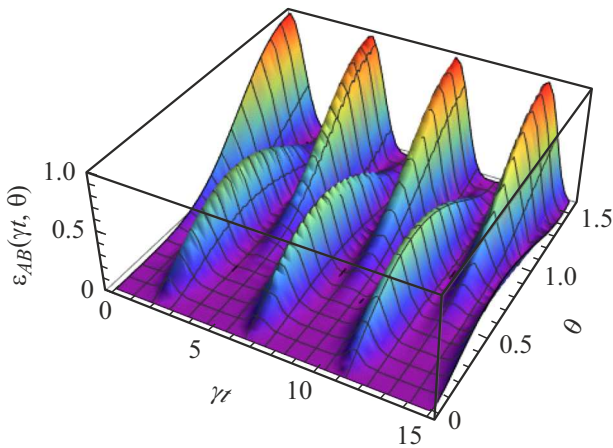


Рис. 7. 3D-график зависимости отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \theta)$ от приведенного времени γt и параметра θ для кубитов A и B и начального истинно перепутанного состояния (3) с фиксированным значением среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\varphi = \pi/4$.

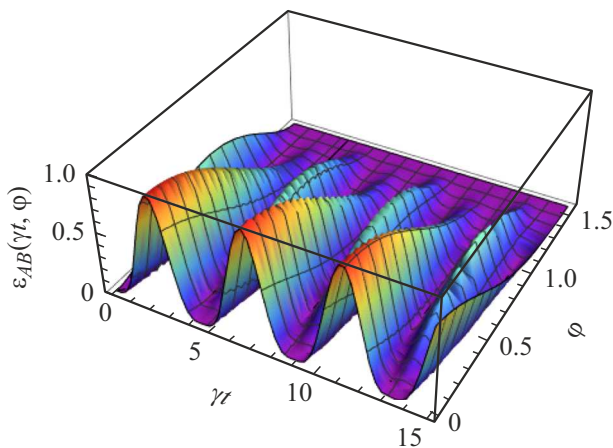


Рис. 8. 3D-график зависимости отрицательности $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \varphi)$ от приведенного времени γt и параметра φ для кубитов A и B и начального истинно перепутанного состояния (3) с фиксированными значениями среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$.

$\bar{n} = 0.001$ и параметра $\varphi = \pi/4$. На рис. 8 представлена 3D-зависимость отрицательности для тех же кубитов $\varepsilon_{AB}(\gamma t, \varphi)$ от приведенного времени γt и параметра φ для того же начального состояния (3) и фиксированных значений среднего числа тепловых фотонов $\bar{n} = 0.001$ и параметра $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. На рис. 7 и 8 хорошо видно, что для выбранного начального состояния кубитов в случае малых интенсивностей теплового поля резонатора эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует для любых значений параметров θ и φ , что принципиально отличает поведение параметра перепутывания выбранных кубитов в рассматриваемой ситуации от случая, когда кубиты изначально приготовлены в состоянии (2).

На рис. 9 показана зависимость параметра перепутывания кубитов B и C от безразмерного времени γt для истинно перепутанного начального состояния кубитов (3), фиксированных значений параметров $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ и различных значений среднего числа фотонов в моде резонатора. Для выбранного начального состояния кубитов в случае малых интенсивностей теплового поля для кубитов B и C эффект мгновенной смерти перепутывания также отсутствует для любых значений параметров φ, θ , как и для кубитов A и B . Эффект мгновенной смерти перепутывания в случае кубитов B и C возникает также только при увеличении интенсивности теплового шума резонатора. При этом, как и в случае кубитов A и B , промежутки времени, в течение которых перепутывание отсутствует, для различных интенсивностей поля существенно меньше, чем в случае начального состояния кубитов (2).

Наконец, для сравнения на рис. 10 представлена временная зависимость отрицательности кубитов A и B (или A и C) для трех идентичных кубитов, запертых в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействующих с общим тепловым полем, для начального состояния вида (3). Сравнение рис. 10 и 9 показывает наличие сходства в поведении отрицательности пары кубитов, запертых в резонаторе, и любой из пар кубитов в трехкубитной системе в общем резонаторе. Различие заключается в увеличении для последнего из рассматриваемых случаев максимальных значений отрицательности в области пиков и уменьшении времени, в течение которого отсутствует перепутывание, в случае интенсивных тепловых полей резонатора. Сравнивая поведение отрицательностей для двух начальных состояний кубитов W -типа, можно заметить, что для рассматриваемой модели начальное истинно перепутанное состояние (3) намного более устойчиво по отношению к разрушающему действию теплового поля для всех пар кубитов, нежели

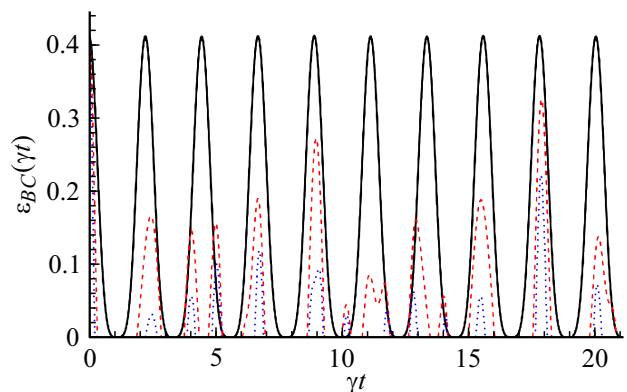


Рис. 9. График зависимости критерия отрицательности $\varepsilon_{BC}(\gamma t)$ от приведенного времени γt в модели (1) для второго B и третьего C кубитов начального истинно перепутанного состояния (3) для начальных параметров $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$ с изменением среднего числа тепловых фотонов: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

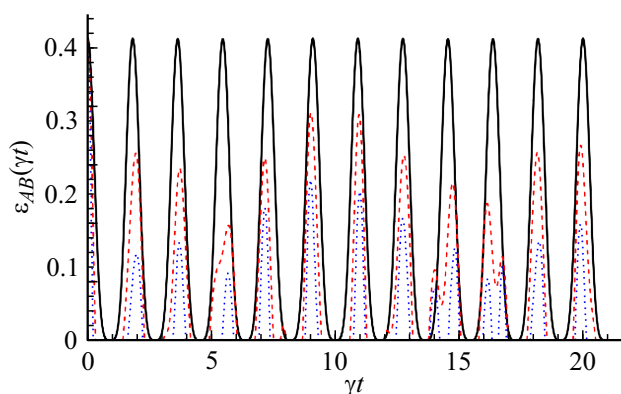


Рис. 10. График зависимости отрицательности $\varepsilon_{ij}(\gamma t)$ от приведенного времени γt в модели „три кубита в общем резонаторе“ для любой пары кубитов и начального истинно перепутанного состояния (3). Параметры $\varphi = \pi/4$, $\theta = \arccos[1/\sqrt{3}]$. Среднее число тепловых фотонов: $\bar{n} = 0.001$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия), $\bar{n} = 2.5$ (пунктирная линия).

начальное состояние (2), как и в случае в модели с тремя запертыми кубитами.

Заключение

В работе мы исследовали динамику системы трех идентичных кубитов, один из которых находится в свободном состоянии, а два других заперты в идеальном резонаторе и резонансно взаимодействуют с модой электромагнитного поля этого резонатора. Нами получено точное решение квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели для начальных истинно перепутанных состояний кубитов W-типа и теплового поля резонатора. На основе точного решения найдены аналитические выражения для отрицательностей пар кубитов: свободный кубит-запертый кубит и двух запертых кубитов. Расчеты проведены для двух истинно перепутанных нормализованных W-состояний вида (2) и (3), которые можно преобразовать одно в другое посредством преобразования локальных операций и классической связи (LOCC), и тепловых состояний электромагнитного поля резонатора для различных средних чисел фотонов. Показано, что тепловое поле резонатора не разрушает полностью начальное перепутывание кубитов даже для относительно высоких интенсивностей теплового шума резонатора. Установлено также, что для малых интенсивностей теплового поля резонатора эффект мгновенной смерти перепутывания возникает только в том случае, когда кубиты первоначально приготовлены в состоянии (2). Для состояния (3) в таких условиях эффект отсутствует. При увеличении интенсивности теплового поля резонатора мгновенная смерть перепутывания кубитов возникает как для начального состояния (2), так и для состояния (3). Расчеты также показали, что продолжительность промежутков

времени между мгновенной смертью и возобновлением перепутывания кубитов существенно зависит как от выбора типа W-состояния, так и от степени начального перепутывания кубитов, т. е. от выбора параметров θ и φ . Было показано, что начальное состояние кубитов (3) более устойчиво к воздействию теплового шума, чем начальное состояние (2). Это справедливо и для модели с тремя запертыми кубитами в резонаторе.

Для двухкубитной системы, в которой один из кубитов свободен, а второй заперт в тепловом резонаторе, нами ранее было показано, что учет диполь-дипольного взаимодействия кубитов, расстройки, керровской нелинейности и ряда других механизмов позволяет исключить эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов, возникающий за счет взаимодействия с тепловым полем резонатора [19,28]. Исследование влияние указанных механизмов на эффект мгновенной смерти перепутывания для модели, рассмотренной в настоящей работе, будет предметом наших последующих исследований.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Y. You, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **85** (2), 623 (2013). DOI: 10.1103/RevModPhys.85.623
- [2] L.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **88** (1), 153 (2014). DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153
- [3] X. Gu, A.F. Kockum, A. Miranowicz, Y.X. Liu, F. Nori. *Phys. Reports*, **718–719**, 1 (2017). <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>
- [4] G. Wendin. *Reports Progress Phys.*, **80**, 106001 (2017). <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>
- [5] H.-L. Huang, D. Wu, D. Fan, X. Zhu. *Science China Information Sci.*, **63**, 180501 (2020). <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>
- [6] L. Pezzé, A. Smerzi, M.K. Oberthaler, R. Schmied, P. Treutle. *Rev. Modern Phys.*, **90**, 035005 (2018). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005>
- [7] A.R. Bagrov, E.K. Bashkurov. *IX Intern. Conf. Inform. Technol. Nanotechnol. (ITNT)*, 23240901 (2023). 10.1109/ITNT57377.2023.10139206.
- [8] W. Dur, J.I. Cirac. *Phys. Rev. A*, **61**, 042314 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>
- [9] W. Dur, J.I. Cirac, G. Vidal. *Phys. Rev. A*, **62**, 062314 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>
- [10] A. Acin, D. Bruß, M. Lewenstein, A. Sanpera. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 040401 (2000). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>
- [11] C. Sabin, G. Garcia-Alcaine. *Europ. Phys. J. D*, **48**, 435 (2008). <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>
- [12] S.M. Siti, Munirah Mohd, B. Idrus, H. Zainuddin, M. Mukhta. *Intern. J. Adv. Comp. Sci. Appl.*, **10** (7), 374 (2019). <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>
- [13] Y. Akbari-Kourbolagh. *Intern. J. Quan. Inform.*, **15**, 1750049 (2017). <https://doi.org/10.1142/S0219749917500496>

- [14] M. Neeley et al., *Nature*, **467**, 570 (2010).
<https://doi.org/10.1038/nature09418>
- [15] L. DiCarlo et al., *Nature*, **467**, 574 (2010).
<https://doi.org/10.1038/nature09416>
- [16] D.C. Cole, S.D. Erickson, P.-Y. Hou, A.C. Wilson, D. Leibfried, F. Reiter. *New J. Phys.*, **23**, 073001 (2021).
DOI: 10.1088/1367-2630/ac09c8
- [17] K. Takeda, A. Noiri, T.I. Nakajima, J. Yoneda, T. Kobayashi, S. Tarucha. *Nat. Nanotech.*, **16**, 965 (2021).
<https://doi.org/10.1038/s41565-021-00925-0>
- [18] Z. Dong, G. Zhang, A.-G. Wu, R.-B. Wu. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **68**, 2028 (2023).
DOI: 10.1109/ITNT57377.2023.10139206
- [19] Е.К Башкиров. *ЖТФ*, **93** (4), 431 (2023).
DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55028.280-22
- [20] T. Yu, J.H. Eberly. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 140104 (2004).
DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.140404
- [21] M.P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S.P. Walborn, P.H. Souto Ribeiro, L. Davidovich. *Science*, **316**, 579 (2007). DOI: 10.1126/science.1139892
- [22] M. Ge, L.-F. Zhu, L. Qui. *Commun. Theor. Phys.*, **49**, 1443 (2008). DOI: 10.1088/0253-6102/49/6/20
- [23] F. Han, Y.-J. Xia. *Int. J. Quant. Inform.*, **7** (7), 1337 (2009).
<https://doi.org/10.1142/S0219749909005821>
- [24] L.-N. Jiang, J.-L. Zhang, J. Ma, S.-Y. Yu, Q. Han, B. Li. *Int. J. Theor. Phys.*, **53**, 942 (2014).
DOI: 10.1007/s10773-013-1885-8
- [25] W.K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 22458 (1998).
<http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>
- [26] A. Peres. *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 1413 (1996).
<http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>
- [27] R. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki. *Phys. Lett. A*, **223** 333. [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2)
- [28] E.K. Bashkirov. *Int. J. Theor. Phys.*, **57**, 3761 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>