Аналитическое и численное моделирование продольного изгиба в пластическом режиме однородной консоли с симметричным сечением

© В.В. Чистяков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: v.chistyakov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 12 мая 2023 г.
В окончательной редакции 9 сентября 2023 г.
Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Представлен метод численно-аналитического моделирования при помощи Maple 18 существенного продольного изгиба однородной консоли с симметричным сечением. Исследован режим пластических деформаций в материале, обладающем достаточно высоким модулем Юнга, но низким так называемым условным пределом текучести. Рассмотрены профили из низкоуглеродистой стали, титана, полиэтилена. Найдены и сравнены с эйлеровскими величины критических нагрузок, формы изгиба консоли. Установлена квазиидентичность последних при одинаковых величинах наклона вблизи свободного конца. Метод может быть применен в робототехнике, строительной механике, медицинском протезировании и т. д.

Ключевые слова: продольный изгиб, пластические деформации, условный предел текучести, критическая нагрузка, Maple.

DOI: 10.61011/JTF.2023.12.56801.f207-23

Проблема Эйлера потери устойчивости стержня/колонны/консоли при продольной нагрузке в области неупругих деформаций материала актуальна во многих отраслях, таких, как спорт (прыжки с шестом), строительство (мосты и сооружения из ферм), робототехника, медицинское протезирование и др. Поэтому, начиная с работы Ф.Р. Шенли [1], она привлекает большое число исследователей — от инженеров, занимающихся прочностью конструкций, до чистых математиков, изучающих бифуркации, а также нанотехнологов, синтезирующих материалы на основе углеродных нанотрубок [2].

Для ряда металлов с высоким так называемым условным пределом текучести (УПТ) пластический режим актуален в случае коротких консолей, когда необходимо учитывать возникающие деформации сдвига, выводящие задачу из разряда одномерных [3–5]. Однако для все более широко использующихся полимеров с высоким модулем Юнга, но низким УПТ (тефлон [6], полиэтилен высокой плотности ПЭВП и др.), учет пластического характера может быть сделан в рамках гипотезы плоских сечений (ГПС), что и является темой настоящей работы.

Автор стремился максимально упростить вычислительную часть задачи за счет аналитических преобразований и применения модельных представлений, существенно сокращающих эту часть. К таковым относятся:

а) кубическая формула для диаграммы сжатия (strain-stress diagram) материала с наличием УПТ и зоны упрочнения (densification zone);

б) симметричность сечения консоли.

Рассматривается однородная консоль AB свободной длины (l_0) и сечения (S), симметричного по отношению к оси x изгиба. Нижний конец A жестко защемлен, в то время как к верхнему B приложена распределенная по сечению сжимающая нагрузка F (рис. 1, a).

В соответствии с ГПС относительная деформация в слое сечения с внутренней координатой η (рис. 1, b) определяется выражением $\varepsilon_\eta = \varepsilon_{ax} + \frac{\eta}{\rho}$, где $\rho(z)$ и ε_{ax} — суть радиус кривизны оси и ее относительная деформация в сечении с вертикальной координатой z.

Тогда в предположении кубической диаграммы сжатия (см. далее) напряжение может быть представлено рядом

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon_{ax}) + \frac{d\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon}\frac{\eta}{\rho} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon^2}\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon^3}\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^3,$$

и изгибающий момент в сечении z определится как

$$M_z(z) = \oiint \sigma_z \eta dS = \frac{d\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon}\frac{J_x^{(II)}}{d\varepsilon} + \frac{1}{3!}\frac{d^3\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon^3}\frac{J_x^{(IV)}}{\rho^3}$$

с $J_x^{(II)}$ и $J_x^{(IV)}$ — моментами площади II и IV порядков (слагаемое с $J_x^{(III)} = 0$ исчезает).

Подставляя $1/\rho = y'_{zz}/(1+y_z'^2)^{\frac{3}{2}}$, получим уравнение изгиба

$$\frac{d\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon}\frac{J_x^{(II)} y''_{zz}}{(1+y_z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{6}\frac{d^3\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon^3}\frac{J_x^{(IV)}(y_{zz})'^3}{(1+y_z'^2)^{\frac{9}{2}}} = -(F_y + M_A), \quad (1)$$

где $M_A = -Fb$ — момент заделки A, а величина b — смещение верхнего конца B. Заменами $\nu = y = b$, $\nu' = p$

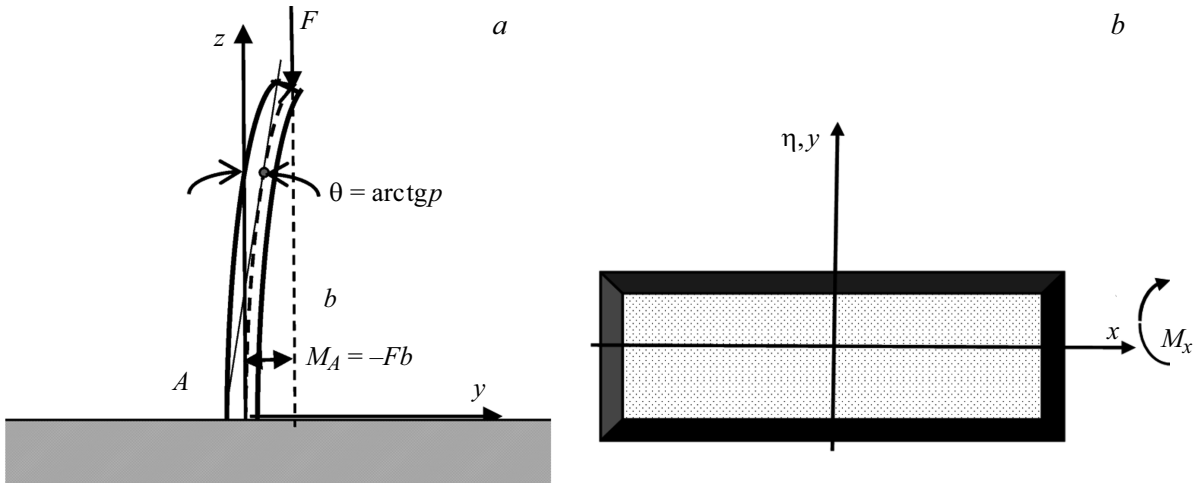

Рис. 1. *a* — консоль с закрепленным нижним концом A и нагруженным верхним B и симметричным сечением (b) с нулевыми нечетными моментами $J_x^{(2n+1)} = 0$.

$\left(p\nu'_{zz} = p\frac{dp}{d\nu} = \nu\frac{dp^2}{d\nu^2}\right)$ и $\nu^2 \equiv w$, $p^2 \equiv s$ получаем

$$\begin{cases} \frac{dw}{ds} = -\frac{J_x^{(II)}}{F(1+s)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{d\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\sigma(\varepsilon_{ax})}{d\varepsilon^3}\right)\frac{J_x^{(IV)}w}{F(1+\varepsilon)^{\frac{9}{2}}\left(\frac{dw}{ds}\right)^2}, \\ w(0) = b^2, \quad w(p_f^2) = 0, \quad p_f = \frac{dy(z_B)}{dz}, \\ \sigma_{ax}(p) = \frac{F\cos\theta}{S} = \frac{F}{S(1+s)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \tag{2}$$

Простая кубическая формула для диаграммы сжатия

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{3E\mu}{2}\varepsilon^2 + \frac{E\mu}{2t}\varepsilon^3, \qquad \mu = \frac{Et - \sigma_f}{Et^2},$$
$$\sigma_f - \text{УПТ}, \qquad t = \varepsilon(\sigma_f), \tag{3}$$

производные от которой

$$\frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = E - 3E\mu\varepsilon + \frac{3E\mu}{2t}\varepsilon^2, \quad \frac{d^3\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon^3} = \frac{3\mu E}{t} \tag{4}$$

и обратная к ней (тоже кубическая, но без зоны упрочнения)

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + \frac{3\mu\sigma^2}{2E^2} + \frac{\mu(9\mu t - 1)\sigma^3}{2E^3 t} \tag{5}$$

хорошо описывают сжатие тефлона, ПЭВП, стали (рис. 2) и др. материалов.

Подстановка (5) в (4) дает в третьем приближении по величине σ:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}(\sigma) = E - 3\mu\sigma + \left(\frac{3\mu}{2Et} - \frac{9\mu^2}{2E}\right)\sigma^2 + \left(\frac{6\mu^2}{E^2 t} - \frac{27\mu^3}{2E^2}\right)\sigma^3.$$

Переход к переменным $w = \nu^2$ νs $s = p^2$ преобразует уравнение к виду

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{J_x^{(II)}}{F(1+s)^{3/2}} + \frac{eJ_x^{(II)}\mu}{S(1+s)} - \frac{J_x^{(II)}\left(\frac{3\mu}{2Et} - \frac{9\mu^2}{2E}\right)}{S^2(1+s)^{5/2}}F$$
$$-\frac{J_x^{(II)}\left(\frac{6\mu^2}{E^2 t} - \frac{27\mu^3}{2E^2}\right)}{S^3(1+s)^3}F^2 - \frac{\mu E}{2t}\frac{J_x^{(IV)}w}{F(1+s)^{\frac{9}{2}}\left(\frac{dW}{ds}\right)^2}, \tag{6}$$

которое в нулевом приближении по малой величине $J_x^{(IV)}$ имеет решение

$$w_0(s) = \frac{2J_x^{(II)}}{F(1+s)^{1/2}} - \frac{3J_x^{(II)}\mu}{S(1+s)^2} + \frac{2J_x^{(II)}\left(\frac{3\mu}{2Et} - \frac{9\mu^2}{2E}\right)}{3S^2(1+s)^{5/2}}F$$
$$+\frac{J_x^{(II)}\left(\frac{6\mu^2}{E^2 t} - \frac{27\mu^3}{2E^2}\right)}{S^3(1+s)^3}F^2 - \left(\frac{2J_x^{(II)}}{F(1+p_f^2)^{1/2}} - \frac{3J_x^{(II)}\mu}{S(1+p_f^2)}\right.$$
$$\left.+\frac{2J_x^{(II)}\left(\frac{3\mu}{2Et} - \frac{9\mu^2}{2E}\right)}{3S^2(1+p_f^2)^{5/2}}F + \frac{J_x^{(II)}\left(\frac{6\mu^2}{E^2 t} - \frac{27\mu^3}{2E^2}\right)}{2S^3(1+p_f^2)^3}F^2\right). \tag{7}$$

Поперечная координата определится как

$$y(p) = \nu_0(p) + b = b - \sqrt{w_0(p^2)},$$

продольная — $z(p) = \int\limits_0^p \frac{d\nu_0(p')}{p'}$, и элемент длины оси — $dl(p) = \frac{d\nu_0(p)\sqrt{1+p^2}}{p} = -\frac{dw_0}{ds}\sqrt{\frac{1+p^2}{w_0}}$. Восстановленный элемент длины $dl_{res}(p) = \frac{dl(p)}{1-\varepsilon(p)} \approx \frac{dw_0}{dp^2}\sqrt{\frac{1+p^2}{w_0}}\big(1 + \varepsilon(p) + \varepsilon^2(p) + \varepsilon^3(p)\big)$: сама восстановленная длина оси (l_0)

$$-\int\limits_0^{p_f}\frac{dw_0}{dp^2}\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{w_0}}(1+\varepsilon(p)) + \varepsilon^2(p) + \varepsilon^3(p))dp$$
$$= L(F, p_f) = l_0. \tag{8}$$

Это соотношение и определяет зависимость конечного наклона от силы $p_f(F)$ (рис. 3, *a*). Для консолей из пластиков типа ПЭВП при показателях гибкости $\lambda = l_0\sqrt{\frac{S}{J^{(II)}}} \sim 10 - 15$ возникающие нормальные напряжения близки к $\sigma_f = 26$ MPa. Имеет место примерно 40%-ное падение критической нагрузки

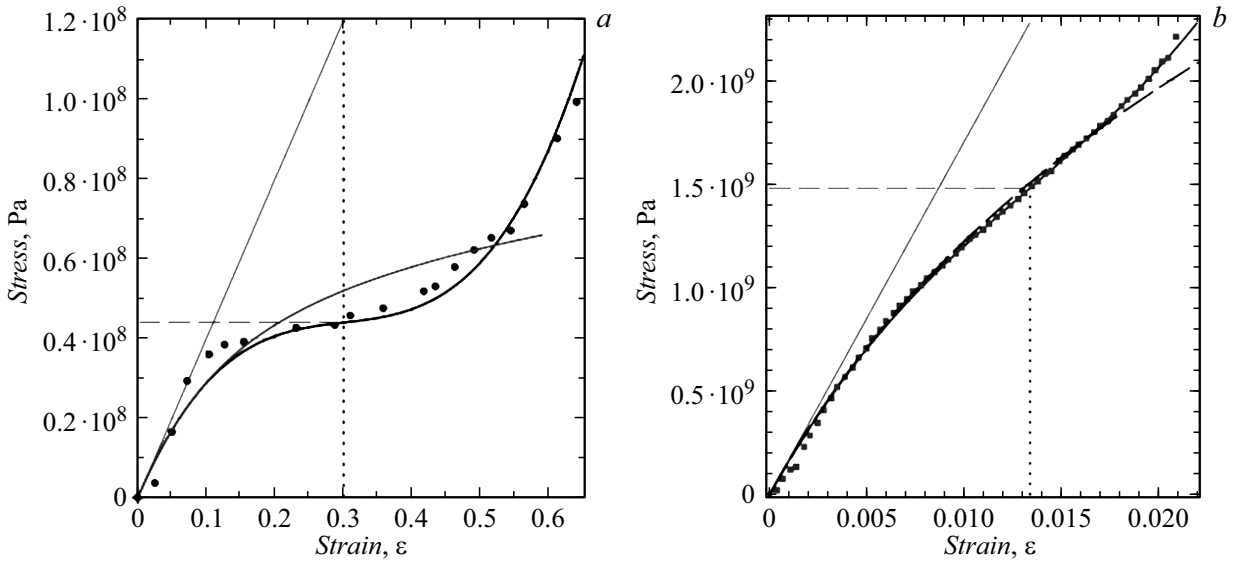

Рис. 2. Диаграммы сжатия: *a* — Al/PTFE: эксперимент [6] (кружки), кубическая модель $\sigma(\varepsilon)$ (3) с параметрами $E = 400$ MPa, $\sigma_f = 44$ MPa, $t = 0.3$, $E_{\text{tang}} = 55.8$ MPa (сплошная черная кривая), закон Гука (непрерывная узкая серая прямая), обратная диаграмма $\varepsilon(\sigma)$ (непрерывная широкая серая кривая), деформация текучести (черные точки), напряжение текучести (серые штрихи); *b* — стали: ромбы — экспериментальные точки, сплошная черная кривая — модель $\sigma(\varepsilon)$ (3) с параметрами $E = 170$ GPa, $\sigma_f = 1.48$ GPa, $t = 0.0134$, сплошная серая прямая — закон Гука, штриховая черная кривая — обратная зависимость $\varepsilon(\sigma)$ (5), серые штрихи — напряжение σ_f, черные точки — деформация t.

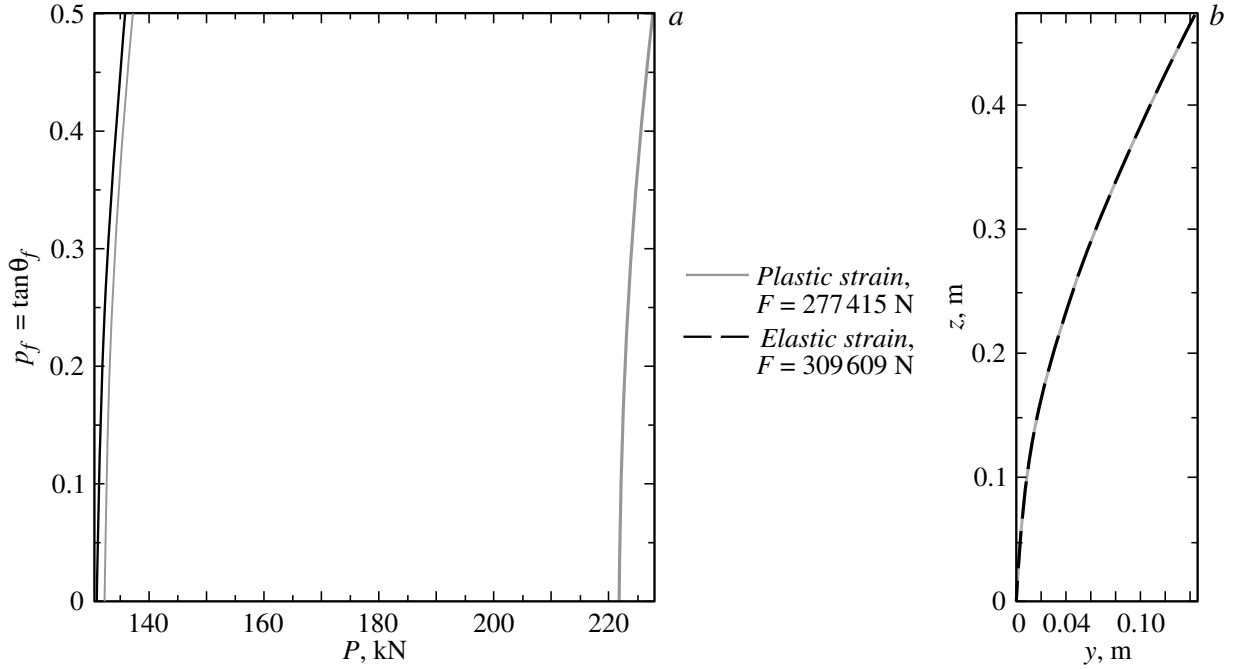

Рис. 3. *a* — зависимость для консоли из ПЭВП прямоугольно-трубчатого сечения (рис. 1) $S = 0.0102\,\text{m}^2$, $J^{(\text{II})} = 4.5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4$, $l_0 = 0.75$ m: серая широкая кривая — закон Гука с $E = 1.08$ GPa; черная кривая — диаграмма (*3*) с $t = 0.05$, $\sigma_f = 26$ MPa; серая узкая кривая — приближение касательного модуля; *b* — полная идентичность формы консоли (стальной двутавр № 10, $l_0 = 0.5$ m) при $p_f = 0.5$ для случая закона Гука (длинные черные штрихи, 309 kN) и диаграммы (*3*) (серая непрерывная кривая, 277 kN).

F_{cr} по сравнению с формулой Эйлера для упругого случая. Приближение касательного модуля [1] дает близкий результат по величине F_{cr} к вытекающей из кубической формулы 3), но чуть превосходящий.

Применяя формулы для координат y и z, получаем формы изгиба консоли заданной длины при заданном конечном наклоне p_f в рамках различных приближений, а именно для закона Гука и кубической диаграммы (3)

(рис. 3, b). Наблюдается почти идентичность формы изгиба при одной и той же величине p_f в рамках различных приближений.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] F.R. Shanley. J. Aeronautical Sci., **14** (5), 261 (1947).
[2] S. Gupta, S. Pramanik, S. Smita, S.K. Das, Sh. Saha. Wave Motion, **104** (1),102730 (2021).
DOI: 10.1016/j.wavemoti.2021.102730
[3] A. Afroz, T. Fukui, in book: *Bifurcation and Buckling Structures* (CRC Press, Boca Raton, 2021), p. 12.
DOI: 10.1201/9781003112365
[4] Sh. Fan, D. Dong, T. Zhu, J. Wang, W, Hou. J. Constructional Steel Research, **198** (2), 107516 (2022).
DOI: 10.1016/j.jcsr.2022.107516
[5] S.P. Timoshenko, J.M. Gere. *Theory of Elastic Stability* (McGraw-Hill book company, NY., USA, 1961)
[6] Ch. Chen, Z. Guo, E. Tang. Polymers, **15**, 702 (2023).
DOI: 10.3390/polym15030702