

05

## Влияние парных столкновений носителей зарядов на электрическую проводимость тонкого проводящего слоя

© Э.В. Завитаев,<sup>1</sup> О.В. Русаков,<sup>2</sup> Е.П. Чухлеб<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 141005 Мытищи, Московская обл., Россия

<sup>2</sup> Государственный гуманитарно-технологический университет, 142611 Орехово-Зуево, Московская обл., Россия

<sup>3</sup> Центр дополнительного образования „Малая академия наук Импульс“, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия  
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru

Поступило в Редакцию 5 июля 2023 г.

В окончательной редакции 29 августа 2023 г.

Принято к публикации 3 сентября 2023 г.

Впервые аналитически решена задача о влиянии парных столкновений носителей зарядов на электрическую проводимость тонкого проводящего слоя. Допустимые значения толщины слоя ограничены размерами, при которых не проявляются квантовые и скин-эффекты, однако отношение толщины слоя к длине свободного пробега электронов может быть произвольным. В качестве граничных условий задачи приняты условия зеркально-диффузного отражения носителей зарядов от поверхностей слоя. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

**Ключевые слова:** тонкий слой, локальная проводимость, интегральная проводимость.

DOI: 10.61011/JTF.2023.11.56487.169-23

### Введение

Интенсивное развитие новых технологий в микроэлектронике предполагает более глубокое теоретическое описание влияния механизмов рассеяния носителей зарядов на электромагнитные свойства малых проводящих объектов [1].

Кроме объемного и поверхностного рассеяния электронов (дырок), значительный вклад в электрическую проводимость таких объектов вносят парные столкновения носителей зарядов [2,3], причем общие физические соображения позволяют высказать предположение об ограничении их характерной скорости.

Заметим, что при комнатной температуре во многих типичных полупроводниках и металлах значения средней длины пробега носителей зарядов существенно превосходят длину волны де Бройля. Таким образом, ситуация, когда можно пренебречь квантовыми размерными эффектами, но необходимо учитывать классические размерные эффекты, реализуется на практике [4].

В работе [1] решена задача о статической проводимости тонкой металлической пленки в перпендикулярном магнитном поле с учетом диффузных и зеркально-диффузных граничных условий отражения носителей заряда.

В работе [5] впервые построена модель зависимости локальной электрической проводимости тонкого металлического слоя от частоты внешнего электрического поля, а в работах [6–8] была построена кинетическая теория электропроводности и постоянной Холла тонкой

проводящей пленки с учетом различных коэффициентов зеркальности ее поверхностей.

В настоящей работе впервые рассмотрено влияние парных столкновений носителей зарядов на электрическую проводимость тонкого проводящего слоя без учета скин-эффекта из предположения, что толщина слоя мала по сравнению с характерной глубиной скин-слоя [9].

### 1. Постановка задачи

Рассматривается тонкий проводящий слой толщиной  $b$ , длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $S$ , к которому приложено переменное напряжение частоты  $\omega$ . Электрическое поле параллельно слою и направлено вдоль координатной оси  $Z$ , ось  $X$  перпендикулярна слою. Напряженность поля  $\mathbf{E}$  может быть выражена в зависимости от времени  $t$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Исходя из того, что неравновесная функция Ферми-Дирака для электронов (дырок)  $f(x, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(x, \mathbf{v})$  удовлетворяет уравнению Больцмана [10], имеем

$$v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + ev_z E \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - i\omega f_1 = -\frac{f_1}{\tau}, \quad (2)$$

где  $e$  — заряд электрона (дырки),  $v_z, v_x$  — соответствующие проекции вектора их скорости на координатные оси,  $\tau$  — время релаксации электрона (дырки),  $\varepsilon = mv^2/2$  — кинетическая энергия электрона (дырки),

$v$  — модуль вектора скорости электрона (дырки)  $\mathbf{v}$ ,  $m$  — эффективная масса электрона (дырки).

Здесь

$$f_0 = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT]}{\{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1\}^2 kT}, \quad (4)$$

где  $\mu$  — химический потенциал,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура.

Отметим, что в условиях термодинамического равновесия химический потенциал  $\mu$  определяется температурой  $T$ , эффективной массой  $m$  и равновесной концентрацией электронного (дырочного) газа  $n$ , т.е.  $\mu = \mu(T, m, n)$ . В зависимости от указанных параметров  $\mu$  для электронного (дырочного) газа может принимать значения в интервале  $\mu \in (-\infty, +\infty)$ .

Плотность высокочастотного тока  $\mathbf{j}$ , вызванного приложенным напряжением, рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{j} = 2e \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3\mathbf{v}. \quad (5)$$

Концентрация электронов (дырок)  $n$ , определяемая с помощью распределения Ферми–Дирака:

$$n = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int f_0 d^3\mathbf{v}, \quad (6)$$

где  $h$  — постоянная Планка.

При низких температурах существенными оказываются парные столкновения носителей зарядов, для их учета запишем кинетическое уравнение (2) в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} -i\omega f_1 + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + ev_z E \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \\ = -\frac{1}{\tau} \left( f_1 - \frac{g_0 m}{\int f_0 d^3\mathbf{v}} v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int v_z f_1 d^3\mathbf{v} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $g_0$  — параметр ( $0 \leq g_0 \leq 1$ ), характеризующий интенсивность парных столкновений носителей зарядов. Заметим, что при  $g_0 = 0$  столкновения не проявляются, а когда  $g_0 = 1$ , такие столкновения присутствуют в полном объеме.

Подставив в уравнение (7) функцию

$$f_1(x, \mathbf{v}) = g(x, \mathbf{v}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp(-i\omega t),$$

получим

$$vg + v_x \frac{\partial g}{\partial x} + ev_z E_0 = \frac{g_0 m}{\tau \int f_0 d^3\mathbf{v}} v_z \int v_z g \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3\mathbf{v}, \quad (8)$$

где  $v = 1/\tau - i\omega$ .

## 2. Функция распределения

Решение уравнения (8) проведем с помощью моментного метода [10]:

$$g = a_1(x)v_z + a_2(x)v_z \text{sign}(v_x). \quad (9)$$

С учетом (9) уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} v(a_1 v_z + a_2 v_z \text{sign}(v_x)) + v_x v_z \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ + v_x v_z \text{sign}(v_x) \frac{\partial a_2}{\partial x} + ev_z E_0 = \frac{g_0 m}{\tau \int f_0 d^3\mathbf{v}} v_z \\ \times \int v_z (a_1 v_z + a_2 v_z \text{sign}(v_x)) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (3) интеграл

$$\int f_0 d^3\mathbf{v} = 4\pi \int v^2 f_0 dv = 4\pi \int \frac{v^2 dv}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1}. \quad (11)$$

Введем относительные переменные

$$u = \frac{\varepsilon}{kT}, \quad u_\mu = \frac{\mu}{kT}, \quad (12)$$

откуда

$$u = \frac{\varepsilon}{kT} = \frac{mv^2}{2kT} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2kTu}{m}}, \quad dv = \sqrt{\frac{kT}{2m}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Тогда для (11) получим

$$\int f_0 d^3\mathbf{v} = 2\pi \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} I_0, \quad (13)$$

где

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{\exp(u - u_\mu) + 1}. \quad (14)$$

С учетом (13) выражение (6) примет вид

$$n = 2 \left(\frac{m}{h}\right)^3 \int f_0 d^3\mathbf{v} = 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} I_0. \quad (15)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части уравнения (10), удобно перейти к цилиндрической системе координат  $(v_\perp, \varphi, v_z)$  в пространстве скоростей:

$$v_x = v_\perp \cos \varphi, \quad v_\perp^2 + v_z^2 = v_L^2, \quad (16)$$

где  $v_L = \gamma^{1/2} \cdot v_C$  — квазипредельная скорость носителей заряда ( $\gamma$  — коэффициент пропорциональности, который будет введен позднее), а  $v_C$  — характерная скорость носителей заряда, которая вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} mv_C^2 &= \frac{5}{3} \int v^2 f_0 \frac{2d^3(mv)}{h^3} = \\ &= 16\pi \frac{5}{3} \frac{k^2 T^2}{h^3} \sqrt{2mkT} \int \frac{u^{3/2} du}{\exp(u - u_\mu) + 1}. \end{aligned}$$

После применения (15) имеем

$$v_C^2 = \frac{5}{3} \frac{2kT}{mI_0} \int \frac{u^{3/2} du}{\exp(u - u_\mu) + 1}$$

или в безразмерной форме

$$\tilde{v}_C = \sqrt{\frac{m}{2kT}} v_C = I_0^{-1/2} \left( \frac{5}{3} \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{\exp(u - u_\mu) + 1} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Для случая сильно вырожденного фермиевского газа ( $u_\mu \gg 1$ ) при  $T \rightarrow 0$ ,  $v_C \rightarrow v_F$ , где  $v_F$  — фермиевская скорость, определяемая выражением (17) для функции Ферми  $f_0$  ( $T \rightarrow 0$ ). В другом предельном случае невырожденного фермиевского газа ( $u_\mu < 0$ ) при  $T \rightarrow \infty$ ,  $v_C \rightarrow \sqrt{5kT/m}$ , т.е. имеет порядок средней тепловой скорости носителей заряда [7].

Заметим, что при расчете влияния на проводимость проводящего объекта только объемного и поверхностного рассеяния носителей зарядов можно считать верхнюю границу интегрирования по безразмерной кинетической энергии формально равной  $u \rightarrow +\infty$  [11]. Однако в реальности, исходя из физических соображений, такое квазиограничение существует, поскольку при некотором значении скорости носителей заряда  $v_L$  доля электронов с безразмерными скоростями, превышающими данную, и их вклад в проводимость ничтожно малы при произвольном значении безразмерного химического потенциала. Поэтому при учете влияния на проводимость парных столкновений целесообразно ввести такое квазиограничение.

Учитывая (4) и связи (16), для интеграла столкновений в уравнении (10) имеем

$$\begin{aligned} & \int v_z (a_1 v_z + a_2 v_z \text{sign}(v_x)) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3 \mathbf{v} = \\ & = - \int v_z^2 (a_1 + a_2 \text{sign}(v_x)) \\ & \times \frac{\exp[(m(v_\perp^2 + v_z^2) - 2\mu)/2kT]}{\{\exp[(m(v_\perp^2 + v_z^2) - 2\mu)/2kT] + 1\}^2 kT} v_\perp dv_z d\varphi dv_\perp. \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерному виду полученного выражения, учитывая (12), и введем переменные

$$\begin{aligned} u_C &= \tilde{v}_C^2 = \frac{mv_C^2}{2kT}, \quad u_L = \frac{mv_L^2}{2kT}, \quad u_z = \frac{mv_z^2}{2kT}, \\ u_\perp &= \frac{mv_\perp^2}{2kT}, \quad v_\perp \cos \varphi = \cos \varphi \sqrt{\frac{2kT u_\perp}{m}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Численное значение параметра  $\gamma$

$u_\mu$	$-\infty$	-10	-5	-3	-1	0	1	5	10	$\infty$
$\gamma$	6	5.6	5.4	5.2	5	4.8	4.4	2.5	1.8	1

Тогда интеграл столкновений носителей зарядов

$$\begin{aligned} & \int v_z (a_1 v_z + a_2 v_z \text{sign}(v_x)) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d^3 \mathbf{v} = \\ & = - \frac{2\sqrt{2}}{m} \left( \frac{kT}{m} \right)^{3/2} \int_0^{u_L} \int_0^{u_L - u_z} \int_0^{2\pi} \frac{u_\perp - u_z}{0} [a_1 + a_2 \text{sign}(\cos \varphi)] \\ & \times \frac{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) \sqrt{u_z}}{\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) + 1\}^2} du_z d\varphi du_\perp = \\ & = - \frac{2\pi a_1}{m} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \\ & \times \int_0^{u_L} \left( \int_0^{u_L - u_z} \frac{d\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu)\}}{\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) + 1\}^2} \right) \sqrt{u_z} du_z = \\ & = - \frac{2\pi a_1}{m} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} I_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{u_L} \int_0^{u_L - u_z} \frac{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) \sqrt{u_z}}{\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) + 1\}^2} du_z du_\perp = \\ & = \int_0^{u_L} \frac{\sqrt{u_z} du_z}{\exp(u_z - u_\mu) + 1} - \frac{2u_L^{3/2}}{3(\exp(u_L - u_\mu) + 1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

При проведении дальнейших вычислений безразмерную квазипредельную энергию носителей заряда  $u_L$  удобно выражать через их характерную безразмерную энергию  $u_C$  в виде  $u_L = \gamma u_C$ , где коэффициент пропорциональности  $\gamma$  может быть отдельно определен численными методами для каждого значения безразмерного химического потенциала  $u_\mu$ . Значения  $\gamma$  приводятся в таблице.

С учетом (13) и (19) уравнение (10) примет вид

$$\begin{aligned} & \left( v + \frac{g_0 I_1}{\tau I_0} \right) a_1 v_z + v a_2 v_z \text{sign}(v_x) + v_x v_z \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ & + v_x v_z \text{sign}(v_x) \frac{\partial a_2}{\partial x} + e v_z E_0 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Последовательно умножая равенство (21) сначала на проекцию скорости электронов  $v_z$ , а затем на  $v_z \text{sign}(v_x)$ , и интегрируя по всему пространству скоростей, получим

два уравнения

$$\begin{cases} \frac{4}{5} \left( \nu + \frac{g_0 I_1}{\tau I_0} \right) a_1 + \frac{\nu_L}{4} \frac{\partial a_2}{\partial x} = -\frac{4}{5} e E_0, \\ a_2 = -\frac{5 \nu_L}{16 \nu} \frac{\partial a_1}{\partial x}, \end{cases} \quad (22)$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} - \lambda^2 a_1 = \lambda^2 \frac{e E_0}{\nu \beta^2}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 + g_0 I_1 / (\nu \tau I_0)} = |\nu \tau = 1 - i \omega \tau = 1 - i \Omega \tau \nu_C / b \\ &= 1 - i \Omega / \Delta = \chi / \Delta = \sqrt{1 + g_0 I_1 \Delta / (I_0 \chi)}, \end{aligned}$$

$\lambda = 16 \nu \beta / 5 \nu_L$ ,  $\chi = \Delta - i \Omega$  — безразмерная комплексная частота рассеяния носителей зарядов.

Моментный коэффициент  $a_1(x)$  найдем, решая неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (23):

$$a_1(x) = A_0 + C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x), \quad (24)$$

где  $A_0 = -e E_0 / \nu \beta^2$ ;  $C_1, C_2$  — константы интегрирования.

Тогда из второго уравнения системы (22) следует, что

$$a_2(x) = \beta C_2 \exp(-\lambda x) - \beta C_1 \exp(\lambda x). \quad (25)$$

Подставив (24) и (25) в (9), найдем общий вид решения уравнения (8), т. е.

$$\begin{aligned} g &= (A_0 + C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x)) v_z \\ &+ (\beta C_2 \exp(-\lambda x) - \beta C_1 \exp(\lambda x)) v_z \operatorname{sign}(v_x). \end{aligned} \quad (26)$$

Применим граничные условия на верхней и нижней границах проводящего слоя для нахождения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} g(v_x, x) = q_1 g(-v_x, x), & v_x < 0, \quad x = b, \\ g(v_x, x) = q_2 g(-v_x, x), & v_x > 0, \quad x = 0, \end{cases}$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — коэффициенты зеркальности его поверхностей.

С учетом (26) система граничных условий может быть представлена как

$$\begin{cases} A_0 + C_1 \exp(\lambda b) + C_2 \exp(-\lambda b) + \beta C_1 \exp(\lambda b) - \\ \beta C_2 \exp(-\lambda b) = q_1 [A_0 + C_1 \exp(\lambda b) + C_2 \exp(-\lambda b) + \\ \beta C_2 \exp(-\lambda b) - \beta C_1 \exp(\lambda b)], \\ A_0 + C_1 + C_2 + \beta C_2 - \beta C_1 = \\ q_2 [A_0 + C_1 + C_2 + \beta C_1 - \beta C_2]. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} D_1 = \frac{(1-q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)-\exp(-\lambda b)(1-q_2)(\beta q_1+q_1+\beta-1)}{\exp(-\lambda b)(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(\lambda b)(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}, \\ D_2 = \frac{(1-q_1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(\lambda b)(1-q_2)(1+\beta-q_1+\beta q_1)}{\exp(-\lambda b)(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(\lambda b)(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}, \end{cases} \quad (27)$$

где введены новые обозначения  $D_1 = C_1/A_0$ ,  $D_2 = C_2/A_0$ .

Далее запишем выражения (24) и (26) в следующем виде:

$$a_1(x) = A_0 (1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} g &= A_0 [(1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)) v_z \\ &+ (\beta D_2 \exp(-\lambda x) - \beta D_1 \exp(\lambda x)) v_z \operatorname{sign}(v_x)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Соотношения (29), (27) и (4) полностью определяют отклонение  $f_1(x, \mathbf{v})$  функции распределения от равновесной в случае зеркально-диффузного отражения носителей зарядов на верхней и нижней границе проводящего слоя с учетом их парных столкновений.

### 3. Расчет проводимости

Конкретизировав с помощью (29) и (4) вид функции  $f_1(x, \mathbf{v})$ , найдем проекцию плотности тока  $\mathbf{j}$  внутри слоя на координатную ось  $Z$ . Применяя формулу (5) и учитывая (1), (12), (18), имеем

$$\begin{aligned} j_z &= 2e \left( \frac{m}{h} \right)^3 \int v_z f_1 d^3 \mathbf{v} = -2e A_0 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \exp(-i \omega t) \\ &\times \int \frac{v_z^2 \exp[(\varepsilon - \mu)/kT]}{\{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1\}^2 kT} \\ &\times [1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x) + (\beta D_2 \exp(-\lambda x) \\ &- \beta D_1 \exp(\lambda x)) \operatorname{sign}(v_x)] d^3 \mathbf{v} = \\ &= \frac{4 \pi e^2 E}{m \nu \beta^2} \left( \frac{m}{h} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right)^3 [1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)] \\ &\times \int_0^{u_L} \int_0^{u_L - u_z} \frac{\sqrt{u_z} \exp(u_\perp + u_z - u_\mu)}{\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) + 1\}^2} du_z du_\perp = \\ &= -\frac{ne I_1}{m I_0} \exp(-i \omega t) a_1(x). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь интегралы  $I_0, I_1$  определены равенствами (14) и (20).

Выражение для локальной электрической проводимости слоя  $\sigma$  получим как следствие закона Ома в дифференциальной форме

$$\sigma = \frac{j_z}{E} = -\frac{ne I_1 a_1(x)}{m I_0 E_0}.$$

Учитывая (15), (17) и (28), имеем

$$\sigma = \frac{\sigma_0 I_1}{\chi \beta^2 \nu_C} (1 + D_1 \exp(\lambda x) + D_2 \exp(-\lambda x)), \quad (31)$$

где  $\lambda = 16 \nu \beta / 5 \nu_L = 16 \nu \tau \beta / 5 \tau \nu_L = 16 \beta \chi / 5 \Delta \tau \nu_L = 16 \beta \chi / (5 b \gamma^{1/2})$ ,  $\sigma_0 = 8 \pi e^2 b m k T / h^3$  — статическая удельная проводимость вещества.

Введя безразмерную координату внутри слоя  $\xi = x/b$ , запишем выражения для локальной проводимости (31) и коэффициентов  $D_1, D_2$  в безразмерной форме  $\sigma^* = \sigma/\sigma_0$ , где

$$\sigma^* = \frac{I_1}{\chi\beta^2\bar{v}_c} \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{\gamma}}\xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{\gamma}}\xi\right) \right), \quad (32)$$

$$D_1^* = \frac{\exp(-16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1-q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)-\exp(-16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}{\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}$$

$$D_2^* = \frac{\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1-q_1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(-16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(\beta q_1+q_1+\beta-1)(1-\beta-q_2-\beta q_2)-\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}{\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})(1+\beta-q_1+\beta q_1)(q_2-\beta q_2-\beta-1)}$$

Проинтегрировав выражение (30), с учетом (15), (17) и (28) определяем полный ток через поперечное сечение слоя

$$I = \int_0^b j_z dS = -\frac{neSI_1}{mbI_0} \exp(-i\omega t) \int_0^b a_1(x) dx = \sigma_0 \frac{ESI_1}{\chi\beta^2\bar{v}_c} \left( 1 + \frac{D_1}{\lambda b} (\exp(\lambda b) - 1) + \frac{D_2}{\lambda b} (1 - \exp(-\lambda b)) \right). \quad (33)$$

Формально из (33), воспользовавшись законом Ома в виде  $I = GU$ , где  $U$  — напряжение на концах слоя, получаем формулу для расчета интегральной проводимости проводящего слоя  $G$  (электрическое поле внутри слоя однородное, поэтому  $U = EL$ ,  $L$  — длина слоя):

$$G = \frac{G_0 I_1}{\chi\beta^2\bar{v}_c} \left( 1 + \frac{D_1}{\lambda b} (\exp(\lambda b) - 1) + \frac{D_2}{\lambda b} (1 - \exp(-\lambda b)) \right), \quad (34)$$

где  $G_0 = \sigma_0 S/L$ .

Заметим, что в частном случае формулы (31) и (34) определяют вклад в удельную и интегральную электрические проводимости электрон-электронных столкновений в металле [10] и в случае отсутствия поправки к закону Видемана-Франца, когда  $g_0 = 0$ , совпадают с результатами работы [5], в которой использовался другой математический подход к проблеме.

Запишем выражение (34) в безразмерном виде  $G^* = G/G_0$ , где

$$G^* = \frac{I_1}{\chi\beta^2\bar{v}_c} \left( 1 + \frac{5\sqrt{\gamma}D_1^*}{16\chi\beta} (\exp(16\chi\beta/5\sqrt{\gamma}) - 1) + \frac{5\sqrt{\gamma}D_2^*}{16\chi\beta} (1 - \exp(-16\chi\beta/5\sqrt{\gamma})) \right) \quad (35)$$

(безразмерные коэффициенты  $D_1^*$  и  $D_2^*$  определены выше).

## 4. Предельные случаи

### 4.1. Вырожденный электронный газ

Рассмотрим случай вырожденного электронного газа, когда  $\exp(U_\mu) \gg 1$  (металлический слой ( $v_L = v_C \rightarrow v_F$ ,

так как  $\gamma \rightarrow 1$ )). Тогда из (14) следует, что

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{\exp(u - u_\mu) + 1} \approx \int_0^\infty \sqrt{u} \theta(u_\mu - u) du = \frac{2}{3} u_\mu^{3/2},$$

где  $\theta(u_\mu - u)$  — функция Хэвисайда.

Соответственно концентрация электронного газа (15) с учетом (12)

$$n \approx 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{2}{3} u_\mu^{3/2} = 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \left(\frac{\mu}{kT}\right)^{3/2}.$$

Поскольку  $\mu = mv_F^2/2$ , получаем

$$n = 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \left(\frac{mv_F^2}{2kT}\right)^{3/2} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m}{h}\right)^3 v_F^3.$$

Изменим порядок интегрирования в (20) с учетом (12)

$$I_1 = \int_0^{u_c} \int_0^{u_c - u_\perp} \frac{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) \sqrt{u_z}}{\{\exp(u_\perp + u_z - u_\mu) + 1\}^2} du_\perp du_z \approx \int_0^{u_\mu} \int_0^{u_\mu - u_\perp} \delta(u_z - (u_\mu - u_\perp)) \sqrt{u_z} du_\perp du_z = \int_0^{u_\mu} \sqrt{u_\mu - u_\perp} du_\perp = \frac{2}{3} u_\mu^{3/2} = \frac{2\mu^{3/2}}{3(kT)^{3/2}}.$$

Тогда локальная проводимость (32)

$$\sigma \approx \frac{8\pi e^2 b m k T}{h^3 \chi \beta^2 \bar{v}_c} \frac{2\mu^{3/2}}{3(kT)^{3/2}} \times \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) \right).$$

С учетом (17) имеем

$$\sigma = \frac{8\pi m^2 v_F^2 e^2 b}{3h^3 \chi \beta^2} \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) \right) = \frac{ne^2 \tau}{m} \frac{\Delta}{\chi \beta^2} \times \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5}\xi\right) \right). \quad (36)$$

В этом пределе интегральная проводимость слоя (35) определяется выражением

$$G = \frac{ne^2 \tau S}{mL} \frac{\Delta}{\chi \beta^2} \left( 1 + \frac{5D_1^*}{16\chi\beta} (\exp(16\chi\beta/5) - 1) + \frac{5D_2^*}{16\chi\beta} (1 - \exp(-16\chi\beta/5)) \right).$$

### 4.2. Невырожденный электронный газ

Теперь рассмотрим случай невырожденного электронного газа, когда  $\exp(-U_\mu) \gg 1$  ( $\mu < 0$ ,  $v_C \rightarrow \sqrt{5kT/m}$ ,  $\gamma \rightarrow 6$ ). Из (14) следует, что

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} du}{\exp(u - u_\mu) + 1} \approx \int_0^\infty \sqrt{u} \exp(u_\mu - u) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(u_\mu).$$

Тогда концентрация электронного газа (15) с учетом (12)

$$n \approx 4\pi \left(\frac{m}{h}\right)^3 \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right).$$

Используя (20), можно записать

$$I_1 = \int_0^{u_L} \frac{\sqrt{u_z} du_z}{\exp(u_z - u_\mu) + 1} - \frac{2u_L^{3/2}}{3(\exp(u_L - u_\mu) + 1)} \approx \exp(u_\mu) \left( \int_0^{u_L} \sqrt{u_z} \exp(-u_z) du_z - \frac{2}{3} u_L^{3/2} \exp(-u_L) \right) = \left| \begin{array}{l} \int_0^{u_L} \sqrt{u_z} \exp(-u_z) du_z = \\ -\sqrt{u_z} \exp(-u_z) \Big|_0^{u_L} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{u_z}) \Big|_0^{u_L} \\ -\sqrt{u_L} \exp(-u_L) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{u_L}) \end{array} \right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(u_\mu) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{u_L}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{u_L} \exp(-u_L) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{3} u_L^{3/2} \exp(-u_L) \right),$$

где  $\operatorname{erf}(\sqrt{u_L})$  — функция ошибок.

Учитывая (18), для

$$u_C = \tilde{v}_C^2 = mv_C^2/2kT = |v_C \rightarrow \sqrt{5kT/m}| = 5/2,$$

$$u_L = \tilde{v}_L^2 = \frac{mv_L^2}{2kT} = |v_L = \sqrt{\gamma}v_C| = \frac{\gamma mv_C^2}{2kT} = \frac{5\gamma}{2} = 15,$$

имеем

$$I_1 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(u_\mu) \left( \operatorname{erf}(\sqrt{15}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{15} \exp(-15) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{3} (15)^{3/2} \exp(-15) \right) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(u_\mu).$$

Тогда, согласно (31), с учетом (12) и (18) имеем

$$\sigma \approx \frac{8\pi e^2 b m k T}{h^3 \chi \beta^2} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) \times \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) \right) = \frac{ne^2 b}{\chi \beta^2 \sqrt{5mkT}} \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) \right) = \frac{ne^2 \tau \Delta}{m \chi \beta^2} \left( 1 + D_1^* \exp\left(\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) + D_2^* \exp\left(-\frac{16\chi\beta}{5\sqrt{6}} \xi\right) \right).$$

В этом пределе интегральная проводимость слоя (35) определяется выражением

$$G = \frac{ne^2 \tau S}{mL} \frac{\Delta}{\chi \beta^2} \left( 1 + \frac{5\sqrt{6}D_1^*}{16\chi\beta} (\exp(16\chi\beta/5\sqrt{6}) - 1) + \frac{5\sqrt{6}D_2^*}{16\chi\beta} (1 - \exp(-16\chi\beta/5\sqrt{6})) \right).$$

### 5. Сравнение с экспериментом и обсуждение результатов

Изучение тонких проводящих слоев вызывает интерес с экспериментальной точки зрения. Это подтверждается большим количеством научных публикаций на эту тему [12–15].

На рис. 1 приведено сравнение результатов аналитического расчета модуля удельной электрической проводимости тонкого металлического слоя (36) с учетом парных столкновений электронов (кривая 1) и без учета та-

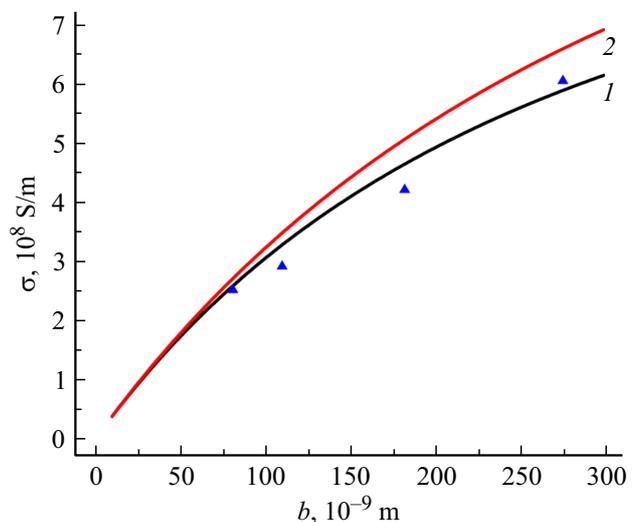


Рис. 1. Сравнение удельной электрической проводимости тонкого металлического слоя с экспериментальными данными.

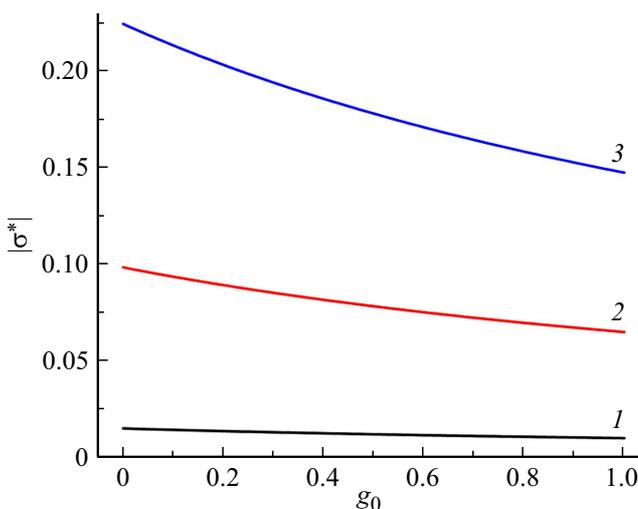
ких столкновений (кривая 2) с экспериментальными данными для золота в случае стационарного электрического поля ( $\Omega = 0$ ) при абсолютной температуре 4 К [13].

Данные эксперимента не содержат частоту объемных столкновений (длину свободного пробега) электронов в металлическом слое. Однако, сравнивая теоретический результат для удельной проводимости (кривая 1) с данными эксперимента, мы можем определить эту величину при заданной величине коэффициентов зеркальности металла  $q_1$  и  $q_2$ . Принимая для золота  $q_1 = q_2 = 0.35$ , получим для длины свободного пробега электронов  $\Lambda = 1450$  nm, а числовой параметр, характеризующий интенсивность парных столкновений носителей зарядов,  $g_0 = 0.3$ .

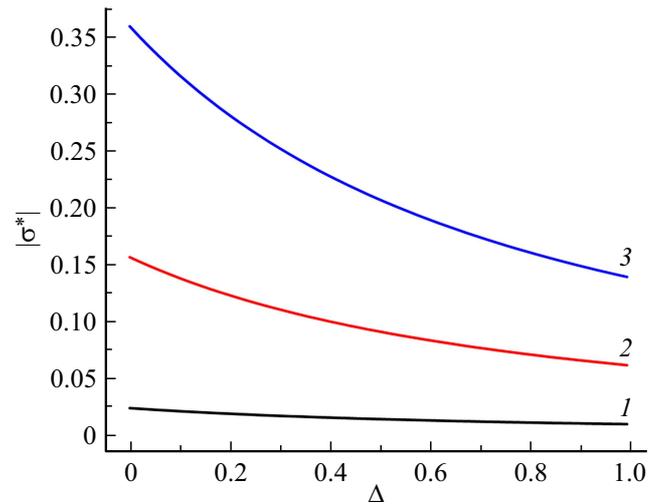
Сопоставление экспериментальных и теоретических данных (кривая 1) показывает, что расчет удельной проводимости тонкого металлического слоя, проведенный с использованием кинетического метода, согласуется с экспериментальными данными с точностью не хуже 89%, если учитывать парные столкновения носителей зарядов и влияние зеркальности поверхностей металлического слоя на отражение электронов.

Без учета таких столкновений (кривая 2), когда  $g_0 = 0$ , полученная теоретическая зависимость хуже согласуется с экспериментальными данными.

На рис. 2 приведены графики зависимости модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого проводящего слоя (32) от числового параметра  $g_0$  для случая, когда все кривые построены при одинаковых значениях безразмерной координаты внутри слоя  $\xi$ , безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $\Delta$ , безразмерной частоты электрического поля  $\Omega$  и коэффициентов зеркальности  $q_1$  и  $q_2$ . При этом безразмерный химический потенциал  $U_\mu$  принимает различные значения.



**Рис. 2.** Зависимость модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого проводящего слоя от числового параметра  $g_0$  ( $\Delta = 1$ ;  $\Omega = 0.1$ ;  $q_1 = q_2 = 0.1$ ;  $\xi = 0.5$ ),  $U_\mu$ : 1 —  $-3$ , 2 —  $-1$ , 3 —  $0$ .



**Рис. 3.** Зависимость модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого проводящего слоя от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов  $\Delta$  ( $\xi = 1$ ;  $\Omega = 0.1$ ;  $q_1 = q_2 = 0.1$ ;  $g_0 = 0.5$ ),  $U_\mu$ : 1 —  $-3$ , 2 —  $-1$ , 3 —  $0$ .

Из хода кривых на рисунке видно, что модуль безразмерной удельной электрической проводимости слоя (32) в значительной степени зависит от числового параметра  $g_0$ , который характеризует интенсивность парных столкновений носителей зарядов. Для любых значений  $g_0$  безразмерная удельная проводимость доминирует у слоев с большим химическим потенциалом.

На рис. 3 представлен график зависимости модуля безразмерной удельной электрической проводимости (32) от безразмерной обратной длины свободного пробега носителей зарядов  $\Delta$ . При этом безразмерный химический потенциал  $U_\mu$  по-прежнему варьируется для каждой кривой.

Анализируя ход кривых, можно сделать вывод о том, что выход данных зависимостей на асимптотические значения при определенных значениях  $\Delta$  определяется величиной параметра  $U_\mu$ .

На рис. 4 построен график зависимостей модуля безразмерной удельной электрической проводимости (32) от безразмерной координаты внутри слоя  $\xi$ . Безразмерный химический потенциал  $U_\mu$  принимает такие же значения как на рис. 3.

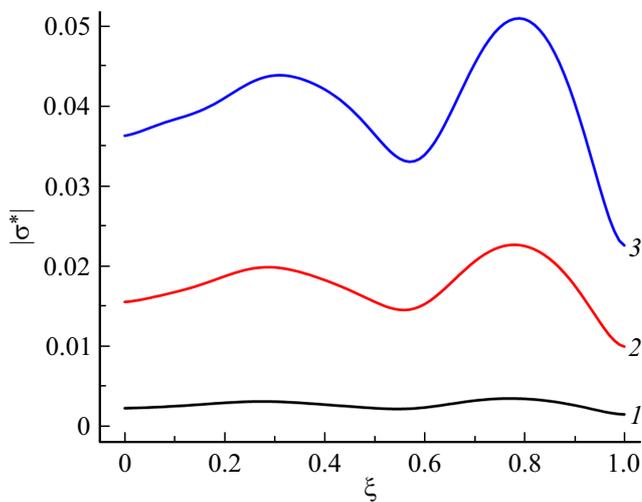
Из хода кривых на рис. 4 видно, что при разных коэффициентах зеркальности поверхностей слоя модуль безразмерной удельной электрической проводимости имеет осцилляции, амплитуда которых зависит от величины химического потенциала  $U_\mu$ . Такой нетривиальный характер поведения кривых по мере увеличения безразмерной частоты электрического поля  $\Omega$  связан, по-видимому, с проявлением резонансных эффектов, наблюдаемых при отражении носителей зарядов от нижней и верхней поверхностей проводящего слоя.

При построении графиков безразмерной интегральной электрической проводимости слоя (35) особое внимание

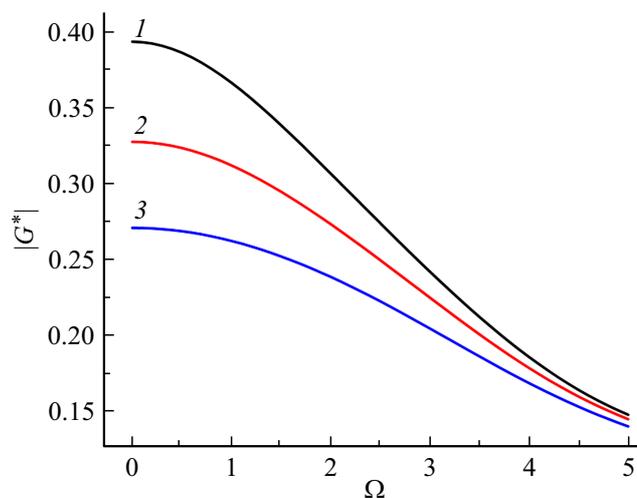
следует уделить зависимости ее модуля и аргумента от безразмерной частоты электрического поля  $\Omega$ , которые представлены на рис. 5 и 6. При этом числовой параметр  $g_0$  принимает различные значения.

Из хода кривых на рис. 5 видно, что наибольшее отличие величины модулей интегральной проводимости слоя, по мере возрастания интенсивности парных столкновений носителей зарядов, наблюдается в статическом случае, тогда как дальнейшее увеличение безразмерной частоты электрического поля приводит к слиянию данных зависимостей.

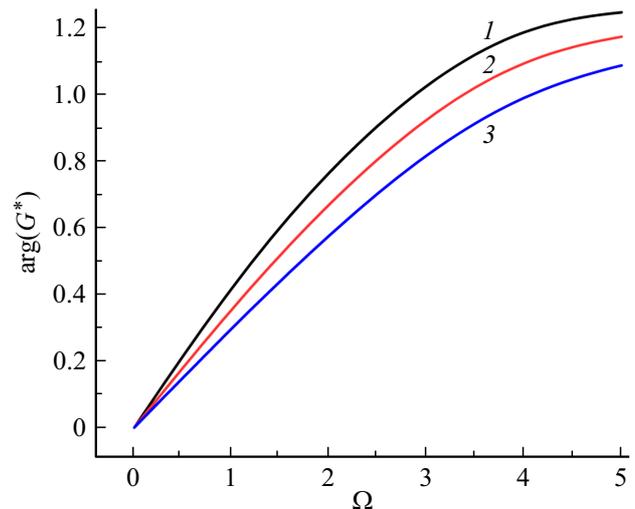
Как следует из рис. 6, все кривые аргумента безразмерной интегральной электрической проводимости, определяемые в аналогичных условиях, исходят из на-



**Рис. 4.** Зависимость модуля безразмерной удельной электрической проводимости тонкого проводящего слоя от безразмерной координаты внутри слоя  $\xi$  ( $\Delta = 1$ ;  $\Omega = 10$ ;  $q_1 = 0.1$ ;  $q_2 = 0.7$ ;  $g_0 = 0.5$ ),  $U_\mu$ : 1 —  $-3$ , 2 —  $-1$ , 3 —  $0$ .



**Рис. 5.** Зависимость модуля безразмерной интегральной электрической проводимости тонкого проводящего слоя от безразмерной частоты электрического поля  $\Omega$  ( $U_\mu = 1$ ;  $\Delta = 1$ ;  $q_1 = q_2 = 0.1$ ),  $g_0$ : 1 —  $0.1$ , 2 —  $0.5$ , 3 —  $1$ .



**Рис. 6.** Зависимость аргумента безразмерной интегральной электрической проводимости тонкого проводящего слоя от безразмерной частоты электрического поля  $\Omega$  ( $U_\mu = 1$ ;  $\Delta = 1$ ;  $q_1 = q_2 = 0.1$ ),  $g_0$ : 1 —  $0.1$ , 2 —  $0.5$ , 3 —  $1$ .

чала координат и монотонно возрастают с увеличением безразмерной частоты электрического поля.

## Заключение

Поскольку из полученных в работе результатов следует, что парные столкновения носителей зарядов оказывают значительное влияние на проводимость слоя, возникает необходимость применения рассмотренной теории к непосредственному расчету электрической проводимости таких объектов в практических и технических приложениях, например, при промышленном изготовлении интегральных схем.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] E.H. Sondheimer. Phys. Rev., **80**(3), 401 (1950). DOI: 10.1103/PhysRev.80.401
- [2] S. De Gennaro, A. Rettori. J. Phys. F: Met. Phys., **14**(12), 237 (1984). DOI: 10.1088/0305-4608/14/12/001
- [3] L. Wang, M. Yin, A. Khan, S. Muhtadi, F. Asif, E.S. Choi, T. Datta. Phys. Rev. Appl., **9**, 024006 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.9.024006
- [4] Дж. Займан. *Электроны и фононы* (ИЛ, М., 1962)
- [5] А.И. Уткин, Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **9**, 85 (2016). DOI: 10.7868/S0207352816090158 [A.I. Utkin, E.V. Zavitaev, A.A. Yushkanov. J. Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, **10**(5), 962 (2016). DOI: 10.1134/S1027451016050153]

- [6] О.В. Савенко. Вестник МГОУ. Серия: физика-математика, **4**, 43 (2016). DOI: 10.18384/2310-7251-2016-4-43-55
- [7] И.А. Кузнецова, Д.Н. Романов, О.В. Савенко, А.А. Юшканов. Микроэлектроника, **46** (4), 275 (2017). DOI: 10.7868/S0544126917040032 [I.A. Kuznetsova, D.N. Romanov, O.V. Savenko, A.A. Yushkanov. Russ. Microelectron., **46** (4), 252 (2017). DOI: 10.1134/S1063739717040059]
- [8] И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, А.А. Юшканов. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **11**, 52 (2017). DOI: 10.7868/s0207352817110063 [I.A. Kuznetsova, O.V. Savenko, A.A. Yushkanov. J. Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, **11** (6), 1159 (2017). DOI: 10.1134/S1027451017060143]
- [9] Э.В. Завитаев, О.В. Русаков, Е.П. Чухлеб. Микроэлектроника, **52** (1), 32 (2023). DOI: 10.31857/S0544126922700193 [E.V. Zavitaev, O.V. Rusakov, E.P. Chukhleba. Russ. Microelectron., **52** (1), 9 (2023). DOI: 10.1134/S1063739722700202]
- [10] Э.В. Завитаев, О.В. Русаков, Е.П. Чухлеб. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **8**, 36 (2022). DOI: 10.31857/S1028096022080180 [E.V. Zavitaev, O.V. Rusakov, E.P. Chukhleba. J. Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, **16** (4), 592 (2022). DOI: 10.1134/S1027451022040371]
- [11] А.И. Ансельм. *Введение в теорию полупроводников* (Наука, М., 1978)
- [12] R.C. Munoz, J.P. García, R. Henríquez, A.M. Moncada, A. Espinosa, M. Robles, G. Kremer, L. Moraga, S. Cancino, J.R. Morales, A. Ramírez, S. Oyarzún, M.A. Suárez, D. Chen, E. Zumelzu, C. Lizama. Phys. Rev. Lett., **96**, 206803 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.206803
- [13] R.C. Munoz, M.A. Suárez, S. Oyarzún, R. Henríquez, A. Espinosa, G. Kremer, L. Moraga, S. Cancino, R. Morales. Phys. Rev. B, **81** (16), 165408 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevB.81.165408
- [14] J.S. Chawla, F. Gstrein, K.P. O'Brien, J.S. Clarke, D. Gall. Phys. Rev. B, **84** (23), 235423 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevB.84.235423
- [15] L. Moraga, R. Henriquez, B. Solis. Physica B: Condensed Matter., **470–471**, 39 (2015). DOI: 10.1016/J.PHYSB.2015.04.034