

О роли кулоновских полей в формировании эмиттанса в фотопушках

© В.Я. Иванов, А.Е. Левичев

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: vivanov.48@mail.ru

Поступило в Редакцию 29 мая 2022 г.

В окончательной редакции 2 декабря 2022 г.

Принято к публикации 13 июля 2023 г.

Представлен теоретический анализ формирования продольного и поперечного эмиттанса пучков заряженных частиц в фотопушках под воздействием расталкивающих сил кулоновских полей. В численных расчетах проведено сравнение характеристик сгустков заряженных частиц с однородным и гауссовым распределением плотности заряда. Дано сравнение эффективности предложенной численно-аналитической модели с расчетами по программе Астра. Полученные численные и аналитические результаты могут быть полезны при проектировании фотоинжекторов для выбора оптимальных параметров, которые определяют основные характеристики фотопушек.

Ключевые слова: кулоновские поля, фотопушки, пучки, эмиттанс.

DOI: 10.21883/JTF.2023.09.56212.147-23

Введение

Современные ускорители требуют использования электронных пучков высокого качества. В таких проектах, как SKEKB [1,2], FCC [3] или Super C-Tau Factory [4] необходимо формировать сгустки частиц с зарядом 1–6.5 нС, энергетическим разбросом менее 1% и нормализованным поперечным эмиттансом менее 20 mm-mrad. Электронные пушки с термокатодом позволяют генерировать пучки с нужным током, но достижение малого эмиттанса и энергетического разброса представляет большие трудности. Например, при использовании ускоряющих структур S-диапазона длина сгустка должна составлять несколько миллиметров при энергетическом разбросе менее 1%. В проектах FCC или Super C-Tau Factory требуется энергетический разброс не более 0.1%, поэтому длина сгустка должна быть менее 1 mm. При этих требованиях использование пушек с термокатодом и с высокой компрессией пучка представляет значительную проблему.

ВЧ пушки с металлическим или полупроводниковым фотокатодом в этом отношении представляются более перспективными. Такие фотокатоды позволяют генерировать сгустки частиц длиной, равной длительности лазерного импульса, т.е. менее 1 ps. Эти пушки обеспечивают высокий темп ускорения, в результате чего частицы обладают релятивистскими энергиями на небольшом расстоянии от катода. Все это позволяет достичь малой величины поперечного эмиттанса. Недостаток фотопушек с металлическим фотокатодом состоит в малой величине квантового выхода, но достижения последних лет привели к улучшению ситуации с этим параметром, что связано, в частности, с переходом на полупроводниковые катоды.

Несмотря на успехи в конструировании фотопушек, имеется немало проблем, которые следует разрешить. Одной из них является высокий заряд сгустка, который затрудняет получение пучка с малым эмиттансом. С 1985 г., когда в лаборатории Лос-Аламоса была сконструирована первая фотопушка, такие источники пучков становятся все более популярными. Фотопушки способны генерировать пучки с малым поперечным эмиттансом [5–9]. Кроме того, они позволяют получить высокую плотность тока в сравнении с традиционными термоионными пушками, достичь высокой яркости пучка [10]. Это становится возможным, поскольку иницированный лазерным импульсом сгусток заряженных частиц сразу оказывается в поле резонатора с высоким градиентом ускорения, который непосредственно примыкает к фотокатоду. От таких источников требуется формирование сгустков с зарядом в несколько нС при малом эмиттансе в несколько mm-mrad. Эти требования в определенной степени противоречивы, в связи с чем представляется актуальным детальное изучение основных параметров пушки для формирования эмиттанса. В книге Т. Рао и Д. Дауэлла [11] обсуждаются теоретические основы, методы численного моделирования и технологии создания обычных и сверхпроводящих фотоинжекторов. В диссертации Дж. Хана [12] и статье [13] рассматриваются проблемы темновых токов и эффекты мультипактора в фотопушках. Статья Дж. Хана и др. [14] посвящена изучению влияния вторичной эмиссии в области фотокатода на качество пучка. Аналитическая теория фотопушек Л. Серафини и Дж. Розенцвейга [15] рассматривает динамику контура пучка и эмиттанса в параксиальном приближении.

Проблема использования адекватных математических методов и компьютерных программ была поставлена в

работе [16] в 2005 г. Там на модельных задачах проводилось сравнение доступных на то время программ: коммерческого кода MAGIC, пакета программ В. Иванова MAXWELL-T и программы Parmela, разработанной в национальной лаборатории Лос-Аламос. Первые две программы решают систему уравнений Максвелла для расчета электромагнитных полей и используют метод частиц-в-ячейке для расчета динамики частиц. Они показали на модельных задачах соответствие результатов расчета поперечного эмиттанса сгустков с точностью 1–2%, в то время как результаты программы Parmela, широко используемой для расчета динамики пучков в ускорителях, показали отличие порядка 10%. Было установлено, что причина такого значительного отличия заключается в том, что в этой программе не учитывается азимутальная компонента собственного магнитного поля релятивистского пучка, поэтому использование этой программы для расчета фотопушек с малым эмиттансом не рекомендуется. В дальнейшем на основе этих расчетов была создана фотопушка, используемая в мощном рентгеновском лазере на свободных электронах в Стенфордском центре линейных ускорителей [17].

Процесс проектирования фотопушек можно разделить на два этапа. На первом производится выбор оптимальных режимов работы, т. е. согласование параметров высокочастотного поля резонаторов, квазистационарного кулоновского поля сгустков, параметров лазерного импульса, сопровождающего стационарного внешнего магнитного поля и т. д. Для этого можно использовать упрощенные численно-аналитические модели, например, описанные в работах К. Кима [6] и Л. Серафини [15], которые позволяют получать численные решения за несколько секунд машинного времени. Только после решения оптимизационных задач можно проводить расчеты с использованием более мощных и более точных методов и программ, позволяющие исследовать тонкие физические эффекты. Такими универсальными программами являются, например, CST Microwave Studio, GdFidl и др. Расчеты по этим программам могут длиться несколько часов. Причина в том, что универсальные программы, как правило, не учитывают специфику физических процессов в фотопушках. Эти недостатки были устранены в разработках МИФИ, где была создана серия двумерных и трехмерных программ с общим названием BEAMDULAC. Каждая из версий этой программы ориентирована на расчет конкретной постановки задач и позволяет моделировать динамику электронных, ионных пучков и смеси частиц с разными зарядами и массами. В основе алгоритмов этих программ лежит использование методов быстрого преобразования Фурье для расчета квазистатических кулоновских полей сгустков и метода облако-в-ячейке для расчета динамики частиц [18–20].

В настоящей работе мы рассмотрим более ограниченную физическую модель, использующую численно-аналитический подход. В случае малого заряда сгустка

определяющим фактором формирования поперечного эмиттанса является ускоряющее поле ВЧ-резонатора, что позволяет проводить анализ динамики эмиттанса в параксиальном приближении аналитически. Для сгустка с зарядом в несколько пС доминирующим становится кулоновское поле сгустка. В этом случае аналитическая техника может использоваться только в ультрарелятивистской области энергий при дополнительных предположениях относительно формы сгустка, его размеров и распределения плотности заряда, а на стадии его ускорения от фотокатода необходимо использовать численные модели для расчета динамики пучка.

Вообще говоря, конечные значения продольного и поперечного эмиттансов сгустков, формируемых при воздействии высокочастотного поля резонаторов и кулоновских полей, не являются простой суммой отдельных вкладов, как это имеет место в алгоритмах программы АСТРА. Наша цель состоит в получении количественных критериев зависимости эмиттанса под расталкивающим действием только кулоновских полей для последующего сравнения с влиянием ВЧ полей на эмиттанс пучка.

1. Учет кулоновских полей заряженного сгустка

Расталкивающее действие кулоновских полей сгустка электронов обычно рассматривается в системе координат, движущейся вместе с центром сгустка. В этом случае предполагается, что сгусток моноэнергетичен, т. е. все частицы сгустка движутся с одной и той же скоростью v , определяемой высокочастотным полем с амплитудой E_z . В этой системе компоненты электромагнитного поля — чисто электростатические (E'_x, E'_y, E'_z) . Обратный переход к лабораторной системе приводит к появлению собственного магнитного поля пучка, которое с помощью поправочного релятивистского фактора прямо связано с электростатическим полем в движущейся системе координат. После анализа динамики можно перейти к лабораторной системе с помощью обратного преобразования Лоренца

$$E_x = \gamma E'_x, \quad B_y = \gamma \frac{v}{c^2} E'_x, \quad E_z = E'_z.$$

В дальнейших вычислениях для простоты мы будем опускать символы штриха, относящиеся к движущейся системе. Зависимость $\gamma(z)$ релятивистского фактора от продольной координаты возьмем из анализа продольной динамики сгустка, которая является предметом отдельной публикации.

Потенциал $\varphi(u)$ сгустка определяется интегрированием его плотности заряда $\rho(s)$ по объему сгустка V :

$$\varphi(u) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(s)}{R_{us}} dV, \quad s \in V, \quad (1)$$

где R_{us} — расстояние между точкой наблюдения u и точкой источника поля s , ϵ_0 — диэлектрическая постоянная вакуума.

1.1. Цилиндрический сгусток с однородным распределением заряда

Если полагать, что распределение заряда сгустка однородное, плотность заряда ρ можно вынести за знак интеграла, заменив ее полным зарядом, деленным на объем сгустка Q/V . Далее нужно сделать предположение о форме сгустка. Для однородного распределения объемного заряда можно рассматривать сгустки разной формы, в том числе и произвольные трехмерные. Рассмотрим однородно заряженный цилиндр радиуса R_b длиной L_b , центр которого расположен в начале координат. Объем сгустка $V = \pi R_b^2 L_b$. Интегрируя по азимутальной переменной цилиндрической системы координат (r, z, θ) , получим выражение для потенциала (см. [21])

$$\varphi_b(r, z) = \frac{Q}{\pi V \epsilon_0} \int_0^{R_b} r' dr' \int_{-L_b/2}^{+L_b/2} dz' \frac{K(t)}{A},$$

$$A^2 = (r + r')^2 + (z - z')^2. \quad (2)$$

Здесь $K(t)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, $t = 2 \frac{\sqrt{rr'}}{A}$. Дифференцированием потенциала получим компоненты электрического поля

$$E_{r,b}(r, z) = \frac{Q}{2\pi r V \epsilon_0} \int_0^{R_b} r' dr' \int_{-L_b/2}^{+L_b/2} dz' \times \frac{1}{A} \left[K(t) - E(t) \frac{(r')^2 - r^2 + (z - z')^2}{(r - r')^2 + (z - z')^2} \right] dz', \quad (3)$$

$$E_{z,b}(r, z) = \frac{Q}{\pi V \epsilon_0} \int_0^{R_b} r' dr' \int_{-L_b/2}^{+L_b/2} dz' \frac{(z - z') E(t)}{A [(r - r')^2 + (z - z')^2]}. \quad (4)$$

Здесь $E(t)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. Оба интеграла можно аппроксимировать полиномами (см. [22]):

$$E(t) = a_i \eta^i + b_i \eta^i \ln(\eta), \quad \eta = \sqrt{1 - t^2},$$

$$K(t) = c_i \eta^i + d_i \eta^i \ln(\eta).$$

Для вычисления интегралов с точностью до десяти верных знаков достаточно полиномов 4-й степени.

На самом деле потенциал и электрическое поле зависят от времени. Эта зависимость определяется тем, что сгусток летит вдоль оси z со скоростью v , поэтому пределы интегрирования после перехода к лабораторной системе следует заменить на $L_b + vt$. Если сгусток не полностью вышел из катода, то длина сгустка L_b не будет постоянной в начальные моменты времени, но

поле его в каждый момент времени будет вычисляться по тем же формулам (2)–(4). В приведенных ниже расчетах при этом в начальные моменты времени амплитуда полей будет плавно возрастать от начального значения, соответствующего полям при отсутствии сгустка, до максимальных значений, представленных ниже на рисунках.

Радиальная компонента электрического поля будет суммой высокочастотного поля E_r и поля сгустка $E_{r,b}$. Вычисление азимутальной компоненты собственного магнитного поля релятивистского сгустка получим аналогичным образом. Эта компонента связана с радиальной силой, которая частично компенсирует силу кулоновского расталкивания, поскольку дает вклад в силу Лоренца $[v \times B]$ противоположного к расталкивающей силе знака. В лабораторной системе она имеет вид

$$B_{\theta,b}(u) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[j_z(s) \times R_{us}]}{R_{us}^3} dV, \quad s \in V, \quad (5)$$

где μ_0 — магнитная постоянная вакуума, j_z — плотность тока сгустка, V — объем, занятый токами сгустка.

Поскольку внешнее магнитное поле является стационарным, в лабораторной системе координат его следует просто добавить к рассчитанным полям сгустка при вычислении эмиттанта.

Выражения (2)–(4) для потенциала и компонент электрического поля могут быть легко обобщены на случай произвольного распределения заряда и произвольной формы сгустка. Для этого необходимо внести распределение плотности заряда под знак интеграла и заменить пределы интегрирования по переменным r и z , чтобы они изменялись внутри объема сгустка.

Максимальное влияние кулоновских полей на динамику частиц следует ожидать вблизи фотокатода, где электрическое поле сгустка вносит значительный вклад в поперечное движение. Для того чтобы учесть влияние электродов на самосогласованное электрическое поле, необходимо решить краевую задачу для уравнения Пуассона с граничными условиями на всех электродах. На самом деле строгий учет граничных условий необходим только когда расстояние от центра сгустка до границы сравнимо с размерами самого сгустка. На больших расстояниях достаточно считать полное поле суммой полей электродов и сгустка в пространстве, свободном от зарядов. В нашем случае будем использовать простую модель с плоским катодом. Тогда радиальная компонента полного электрического поля E_{rs} на катоде должна быть равна нулю. Это условие автоматически выполняется, если учесть поле зеркально отраженного сгустка с противоположным знаком заряда по другую сторону от катода $E_{rs} = E_{r,b}(r, z) - E_{r,b}(r, -z)$. По мере удаления сгустка от катода радиальное поле будет возрастать, а поле зеркально отраженного сгустка убывать. Наиболее трудной для анализа динамики формирования эмиттанта является область ускорения сгустка от фотокатода до области релятивистских энергий. При формировании

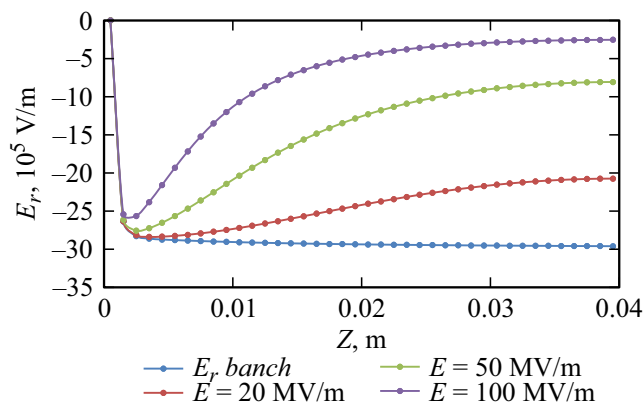


Рис. 1. Радиальная компонента суммарного поля $E_{r,s}$ для цилиндрического сгустка диаметром 2.5 мм, длиной 1 мм, с однородно распределенным зарядом 1.5 нС без учета собственного магнитного поля (голубая линия (в онлайн версии)) и с учетом этого поля для различных значений ускоряющего поля E в лабораторной системе координат.

сгустка лазерным импульсом эта область не слишком протяженна, но в ней эффект кулоновских полей можно исследовать только численно [17]. В наших дальнейших расчетах мы приведем данные для кулоновских полей в лабораторной системе, где поперечные компоненты силы Лоренца уменьшаются по отношению к движущейся системе координат с учетом коэффициента $1/\gamma^2(z)$, обусловленного компенсирующим влиянием собственного магнитного поля пучка на радиальную силу.

Достоинства представленной приближенной модели в том, что она не требует использования таких сложных программ, как GPT [23] или Astra [24], которые решают задачи методом макрочастиц, а ограничивается вычислением простых интегралов, и в то же время позволяет проводить вычисления полей и эмиттанса пучка с приемлемой для практики точностью.

В рассматриваемой модели сделан ряд предположений. Единое прямое и обратное преобразования Лоренца возможны лишь для моноэнергетического пучка с одинаковыми для всех частиц скоростями. Такое возможно, если характерный размер сгустка много меньше длины волны высокочастотного поля, которое определяет динамику частиц. Поскольку в прикатодной части частицы эффективно ускоряются, работа с предложенной моделью для сгустка, частично выходящего из фотокатода, возможна, если вышедший сгусток разбит по оси z на фрагменты, для которых частицы можно считать моноэнергетичными с требуемой точностью. Поля для каждого из таких фрагментов следует считать отдельно и затем суммировать.

Анализ данных, представленных на рис. 1, показывает, что при высоких градиентах ускоряющих полей влияние кулоновских полей на динамику формирования поперечного эмиттанса значителен только в нерелятивистской

области движения пучка, что имеет место в первом резонаторе, прилегающем к фотокатоду.

Видно, что радиальная компонента суммарного поля строго равна нулю на катоде, монотонно возрастает по мере удаления сгустка от катода, достигает максимума и затем монотонно убывает из-за вклада магнитного поля сгустка.

1.2. Цилиндрический сгусток с гауссовым распределением

Рассмотрим также случай сгустка с гауссовым распределением объемного заряда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M}{\sigma}\right)^2\right], \quad (6)$$

где σ — полуширина распределения, а M — среднее значение распределения.

Задавая характерные размеры сгустка σ_r и σ_z , в формулах (1)–(3) заменим величину Q/V на плотность заряда $\rho(r, z)$, внеся ее под знак интеграла. Поскольку 99% площади распределения (6) находится в диапазоне координат $z(-3\sigma, 3\sigma)$, для сравнения с предыдущими результатами длину сгустка следует увеличить в 6 раз, а его радиус — в 3 раза. В нашем случае среднее значение $M_r = 0$, а M_z соответствует координате z центра сгустка. Распределение кулоновских полей для этого случая представлено на рис. 2.

Здесь уменьшение радиальной компоненты кулоновского поля на порядок величины меньше по отношению к случаю однородного распределения заряда. Это объясняется тем, что кривые на рис. 1, 2 соответствуют действию поля на крайние частицы, имеющие максимальный радиус. На них оказывает действие полный заряд Q . Для гауссового распределения это расстояние равно $3\sigma_r$, и радиальное поле

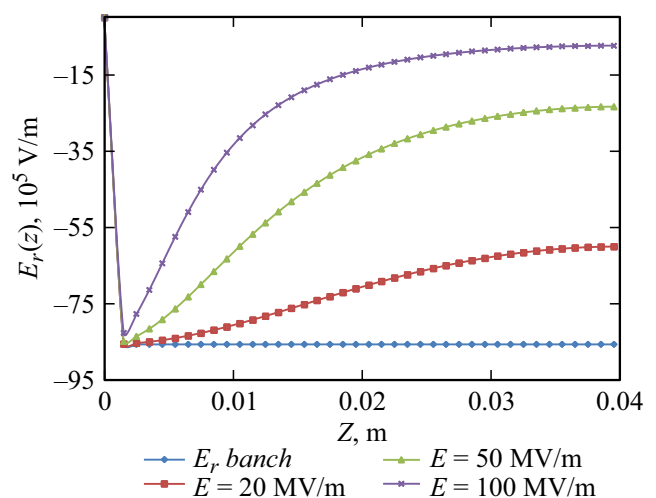


Рис. 2. Радиальное кулоновское поле сгустка с гауссовым распределением заряда величиной $Q = 1.5$ нС для различных значений ускоряющего поля E .

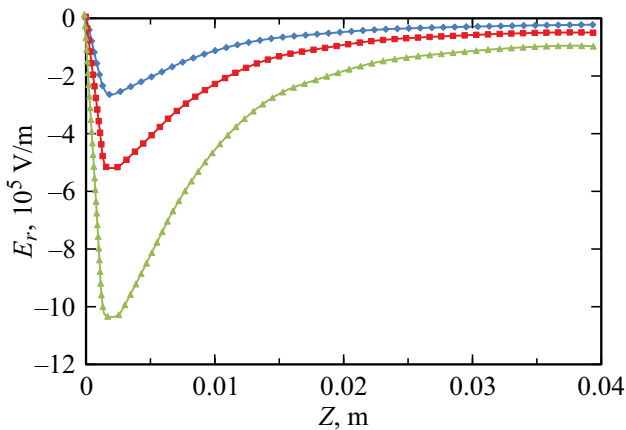


Рис. 3. Радиальная компонента кулоновского поля цилиндрического сгустка с однородным распределением заряда $Q = 1.5 \text{ nC}$ — голубая линия (в онлайн версии), 3 nC — красная линия (в онлайн версии), 6 nC — зеленая линия (в онлайн версии).

спадает, как обратный квадрат радиуса. Зависимость кулоновских полей от заряда цилиндрического сгустка для ускоряющего поля $E = 100 \text{ MV/m}$ показана на рис. 3.

1.3. Сгусток произвольной трехмерной формы

Поскольку лазер облучает поверхность фотокатода под некоторым углом к оси симметрии, и центр лазерного пятна на фотокатоде может отклоняться от этой оси, определяемой конфигурацией высокочастотного поля резонатора, генерируемый лазерным импульсом сгусток может иметь форму, отличную от осесимметричной. Поперечная динамика таких сгустков и ее влияние на формирование эмиттанта не исследовались ранее.

При определенных предположениях характеристики поля сгустка произвольной трехмерной формы могут быть вычислены аналитически. Такой результат для двумерных распределений в декартовых и цилиндрических координатах с билинейным распределением плотности заряда был получен в работе [25]. Дж. Кванг и др. опубликовали подобный результат для трехмерных пучков с кусочно-постоянной аппроксимацией плотности заряда [26]. Такая аппроксимация дает значительную погрешность при расчетах параметров поля, в особенности на границе сгустка, что совершенно недопустимо при расчетах эмиттанта пучка. Гораздо более точный алгоритм предложен в статье В. Иванова [27].

Рассмотрим неравномерную параллелепипедальную сетку в декартовых координатах $\{x_i\} \times \{y_j\} \times \{z_k\}$ с линейной аппроксимацией плотности заряда по каждой

переменной:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) = & \left\{ \left[(\rho_{i+1,j,k}(x-x_i) + \rho_{i,j,k}(x_{i+1}-x)) \right. \right. \\ & \times (y_{j+1}-y) + (\rho_{i+1,j,k}(x-x_i) + \rho_{i,j,k}(x_{i+1}-x)) \\ & \times (y-y_j) \left. \right] (z_{k+1}-z) + \left[(\rho_{i+1,j,k}(x-x_i) \right. \\ & + \rho_{i,j,k}(x_{i+1}-x))(y_{j+1}-y) + (\rho_{i+1,j,k}(x-x_i) \\ & + \rho_{i,j,k}(x_{i+1}-x))(y-y_j) \left. \right] (z-z_k) \left. \right\} / [(x_{i+1}-x_i) \\ & \times (y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы вычислить потенциал в точке (x_0, y_0, z_0) :

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{\rho(x, y, z)}{R} dx dy dz, \quad (8)$$

необходимо вычислить четыре момента плотности заряда

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint \frac{x}{R} dx dy dz, \quad J_2 = \iiint \frac{xy}{R} dx dy dz, \\ J_3 &= \iiint \frac{xyz}{R} dx dy dz, \quad J_4 = \iiint \frac{1}{R} dx dy dz, \end{aligned} \quad (9)$$

где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Остальные интегралы получаются циклической заменой переменных x, y, z .

После замены $\tilde{x} = x_0 - x$, $\tilde{y} = y_0 - y$, $\tilde{z} = z_0 - z$ и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ все интегралы вычисляются аналитически

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{y}{4} [yz + (x^2 + y^2) \ln|z+r|] + \frac{z^3}{6} \ln|y+r| \\ &+ \frac{x^2}{2} \left[z \ln|y+r| + y \ln|z+r| - z + x \tan^{-1}\left(\frac{z}{x}\right) \right. \\ &- \left. x \tan^{-1}\left(\frac{zy}{xr}\right) \right] + \frac{1}{36} \left\{ 6x^2z - 2x^3 + 6x^3 \left[\tan^{-1}\left(\frac{z}{x}\right) \right. \right. \\ &- \left. \left. \tan^{-1}\left(\frac{zy}{xr}\right) \right] - 3y(y^2 + 3x^2 \ln|z+r|) \right\}, \\ J_2 &= \frac{zr^3}{12} + \frac{3}{24} (x^2 + y^2) [zr + (x^2 + y^2) \ln|z+r|], \\ J_3 &= \frac{r^5}{15}, \\ J_4 &= xy \ln|z+r| + yz \ln|x+r| + zx \ln|y+r| \\ &- \frac{1}{2} \left[x \tan^{-1}\left(\frac{zy}{xr}\right) + y \tan^{-1}\left(\frac{zx}{yr}\right) + z \tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) \right]. \end{aligned}$$

Для вычисления градиентов поля следует продифференцировать полученные интегралы по соответствующей координате точки наблюдения. Таким образом,

например, для компоненты поля E_z получаем следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
 J_{1z} &= \iint \frac{xdy}{r} \\
 &= -z \tan^{-1}\left(\frac{xy}{zr}\right) + y \ln|x+r| + x \ln|y+r|, \\
 J_{2z} &= \iint \frac{xdxdy}{r} = \frac{1}{2}[yr + (x^2 + y^2) \ln|y+r|], \\
 J_{3z} &= \iint \frac{zdxdy}{r} = zJ_{1z}, \quad J_{4z} = \iint \frac{xydxdy}{r} = \frac{r^{3/2}}{3}, \\
 J_{5z} &= \iint \frac{xzdxdy}{r} = zJ_{2z}, \quad J_{6z} = \iint \frac{xyzdxdy}{r} = \frac{z}{3}r^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Остальные интегралы получаются циклической заменой переменных x, y, z . Особое внимание следует обратить на проблему вычисления сингулярностей на границе пучка [17], поскольку неаккуратный учет сингулярностей приводит к значительной погрешности вычисления контура пучка, как это имеет место, например, для кусочно-постоянной аппроксимации объемного заряда. Эффективная аналитическая модель расчета трехмерных кулоновских полей в фотопушках представлена впервые.

2. Формирование эмиттанса пучка

В дальнейшем рассмотрении мы будем придерживаться идей, изложенных в работе К.-Дж. Кима [6]. Введем масштабирующий коэффициент $A = \sigma_r/\sigma_z$ для сгустка с характерными размерами σ_r, σ_z , позволяющий отделить тонкий диск с $A > 1$ от длинного сигарообразного сгустка с $A < 1$. Нормализованный эмиттанс определяется формулой

$$\epsilon_s = \sqrt{\langle s^2 \rangle \langle p_s^2 \rangle - \langle sp_s \rangle^2}, \quad (10)$$

где индекс $s = r$ соответствует поперечному эмиттансу, а $s = z$ — продольному.

Вводя безразмерный параметр

$$\tau = \frac{eE_0}{2mc^2k} \quad (11)$$

и нормализованное поле пространственного заряда E_{sc} , с помощью формулы

$$E_{sc}(x, y, z_0) = \frac{n_0}{4\pi\epsilon_0} \tilde{E}(x, y, z_0), \quad (12)$$

можно получить выражение для эмиттанса в виде [6]

$$\epsilon_s = \frac{\pi}{4\tau k \sin(\varphi_0)} \frac{I}{I_a} \mu_s(A). \quad (13)$$

Здесь k — волновой вектор, φ_0 — начальная фаза сгустка, z_0 — аксиальная координата центра сгустка, n_0 — линейная плотность заряда сгустка в аксиальном

направлении, I — амплитуда тока сгустка, I_a — альфвеновский ток, а безразмерная функция

$$\mu_s(A) = \sqrt{\langle s \rangle^2 \langle \tilde{E}_s \rangle^2 - \langle s \tilde{E}_s \rangle^2} \quad (14)$$

отражает зависимость эмиттанса от формы сгустка и его поля.

Для гауссова распределения

$$\rho(x, y, z_0) = \rho_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma_x^2} + \frac{z_0^2}{\sigma_z^2}\right)\right], \quad (15)$$

где ρ_0 — плотность заряда в центре сгустка, безразмерная функция формы μ_s представляется интегралами

$$\begin{aligned}
 \mu_r^2(A) &= \int_0^\infty d\xi_1 \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{[(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) + 2 + \xi_1 + \xi_2]^2} \right. \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(1 + A^2\xi_1)(1 + A^2\xi_2) + 2 + A^2\xi_1 + A^2\xi_2}} d\xi_2 \\
 &\quad \left. - \left[\int_0^\infty d\xi \frac{1}{(2 + \xi)^2 \sqrt{2 + \xi A^2}} \right]^2 \right\}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_z^2(A) &= \int_0^\infty d\xi_1 \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{(A^2 + \xi_1)(A^2 + \xi_2) + 2A^4 + (\xi_1 + \xi_2)A^2} \right. \\
 &\quad \times \frac{1}{[(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) + 2 + \xi_1 + \xi_2]^{3/2}} d\xi_2 \\
 &\quad \left. - \left[\int_0^\infty d\xi \frac{1}{(2A^2 + \xi)^2 (2 + \xi)^{3/2}} \right]^2 \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Функция формы — это универсальная характеристика, которая определяет зависимость эмиттанса от формы сгустка для конкретного распределения плотности заряда сгустка. Эта функция будет различной для различных типов распределения плотности. Для цилиндрического сгустка радиуса R , длины L с однородным распределением заряда $\langle r^2 \rangle = R^2/4$, нормализованные поля определяются формулами

$$\tilde{E}_r(x, y, z) = \frac{2x}{\pi r R} \int_0^\pi \cos(\varphi) \log \frac{R_- - z_-}{R_+ - z_+} d\varphi, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_z(x, y, z) &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi d\varphi \left\{ R_- - R_+ \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{r^2 + z_+^2} - \sqrt{r^2 + z_-^2} + r \cos(\varphi) \right. \\
 &\quad \left. \times \log \frac{-r \cos(\varphi) + \sqrt{r^2 + z_+^2} (R - r \cos(\varphi) + R_-)}{-r \cos(\varphi) + \sqrt{r^2 + z_-^2} (R - r \cos(\varphi) + R_+)} \right\}, \\
 r^2 &= x^2 + y^2, \quad R_\pm^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi) + z_\pm^2, \\
 z_\pm &= z + L/2, \quad (19)
 \end{aligned}$$

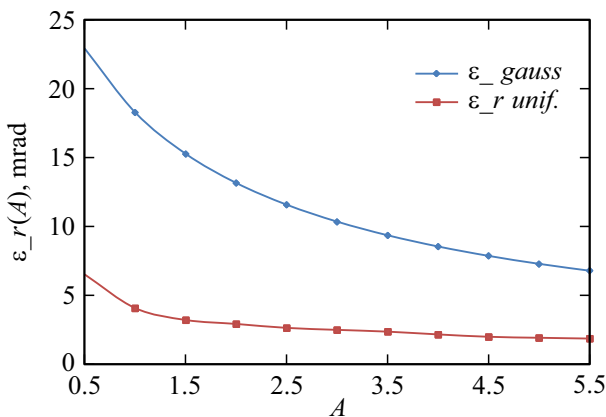


Рис. 4. Зависимость поперечного эмиттанта цилиндрического пучка от параметра $A = R/L$ для гауссового (голубая линия (в онлайн версии)) и однородного (красная линия (в онлайн версии)) распределений плотности заряда.

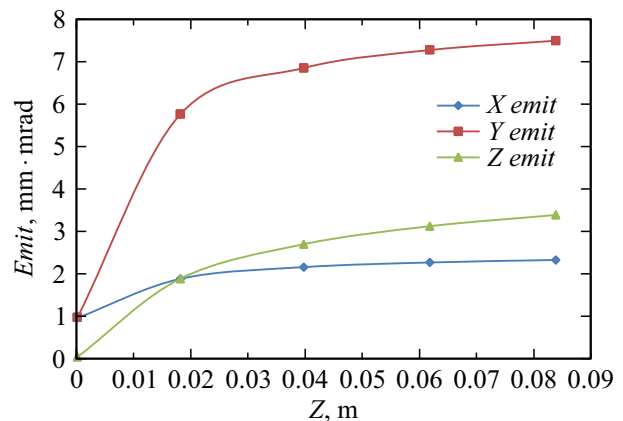


Рис. 6. Вертикальный, горизонтальный и продольный эмиттансы сгустка трехмерной формы.

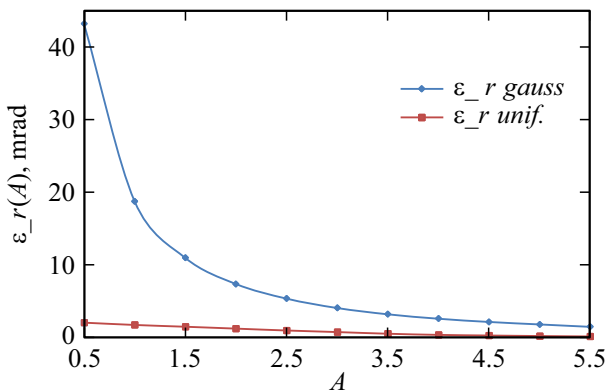


Рис. 5. Зависимость продольного эмиттанта цилиндрического пучка от параметра $A = R/L$ для гауссового (голубая линия (в онлайн версии)) и однородного (красная линия (в онлайн версии)) распределений плотности заряда.

а функция формы для расчета эмиттанта имеет вид

$$\mu_s(A) = \sqrt{\langle \tilde{E}_s^2 \rangle - \langle s \tilde{E}_s \rangle^2}. \quad (20)$$

Расчеты поперечного эмиттанта цилиндрического сгустка с гауссовым распределением заряда величиной $Q = 1.5 \text{ nC}$, радиусом $R = 1 \text{ mm}$ при ускоряющем поле амплитудой $E_0 = 70 \text{ MV/m}$ представлены на рис. 4. Аналогичные данные для продольного эмиттанта показаны на рис. 5. Результаты наших вычислений находятся в хорошем соответствии с данными публикаций [6,7].

В качестве примера трехмерной задачи рассмотрим сгусток в форме трехосного эллипсоида с гауссовым распределением плотности заряда вдоль осей $\sigma_x = 0.5 \text{ cm}$, $\sigma_y = 1 \text{ cm}$, $\sigma_z = 2 \text{ cm}$, начальным поперечным эмиттансом $1 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$. Продольный и поперечные эмиттансы представлены на рис. 6. Пространственный заряд аппроксимирован кубическими ячейками размером 0.25 mm . С учетом трех плоскостей симметрии по x , y и z пол-

ное число ячеек составило 12 000 элементов, которые представляли сгусток эллиптической формы.

3. Сравнение предложенной модели с другими подходами

Ограничение полуаналитической теории, предложенной К. Кимом [6], заключается в том, что она рассматривает только сгустки цилиндрической формы с однородным или гауссовым распределением заряда. Кроме того, эта модель не учитывает поле зеркально отраженных зарядов в окрестности эмиттера, поэтому нормализованные поля сгустков не удовлетворяют точным граничным условиям на поверхности катода. Предложенная нами модель свободна от этих недостатков.

Другой подход реализован в полностью численных алгоритмах пакетов Астра и CST Microwave Studio. Здесь пространственный заряд представлен макрочастицами, что делает возможным учет множества специальных физических явлений в формулировке задачи, зато требует использования десятков и сотен тысяч макрочастиц, чтобы получить гладкие распределения для поля и эмиттанта сгустков. Помимо этого, программа Астра требует ввода характеристик электрических и магнитных полей, рассчитанных другими программами. Кроме того, в таком подходе добавление внешних полей, в общем случае, не гарантирует самосогласованности полного поля, удовлетворяющего всем граничным условиям задачи, хотя учитывает поле зеркальных зарядов в окрестности катода. По определению, самосогласованным полем называется суммарное поле пучка и внешних источников (электродов, соленоидов, постоянных магнитов), удовлетворяющее граничным условиям задачи. Здесь под внешними полями понимаются поля, рассчитанные внешними программами, а под внутренними — поля пучков, рассчитываемые программой „Астра“. При задании режима эмиссии частиц (Cathode = T) программа обеспечивает выполнение условия равенства нулю

граничного условия первого рода для потенциала на катоде тем, что добавляет зеркально отраженные заряды противоположного знака слева от катода, т.е. делает то же самое, что и авторы в своем алгоритме. При этом корректно рассчитанные внешние поля, вводимые из внешних файлов, также должны давать нулевые значения на катоде, чтобы суммарный потенциал поля на катоде оставался равным нулю. Слова „в общем случае, не гарантирует самосогласованности полного поля“ означают, что при расчете динамики пучков программой „Астра“ сумма внешних полей и полей пучка будет удовлетворять условиям краевой задачи только в окрестности катода, но не на остальных электродах. Если остальные электроды расположены достаточно далеко от пучка, то нарушение граничных условий и их влияние на динамику пучка будет незначительным. Однако если пучок приближается достаточно близко к диафрагме, то такое влияние уже не будет малым.

Пакет CST Microwave Studio реализует методику решения начально-краевой задачи для системы уравнений Максвелла с методом частиц-в-ячейке, но аккуратный учет граничных условий для внешних и собственных полей частиц налагает весьма серьезные ограничения на объем вычислительных ресурсов — требуемой памяти и времени решения поставленной задачи. Результаты наших вычислений поперечного эмиттанса цилиндрического сгустка с начальным эмиттансом на катоде $0.5 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ и зарядом сгустка 1.5 nC для поля на катоде 70 MV/m находятся в хорошем соответствии с расчетами по программе Астра, но требуют на два порядка меньше времени счета и памяти компьютера.

Результаты вычислений поперечного эмиттанса для цилиндрического сгустка с однородным распределением плотности заряда, начальным эмиттансом на катоде $0.5 \text{ mm} \cdot \text{mrad}$ и полным зарядом 1.5 nC при напряженности поля на катоде 70 MV/m по предложенной модели

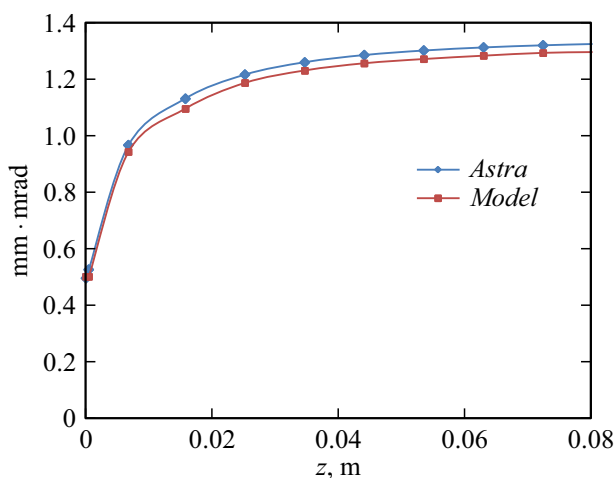


Рис. 7. Поперечный эмиттанс цилиндрического сгустка с однородным распределением плотности заряда, вычисленный по численно-аналитической модели и с помощью программы „Астра“.

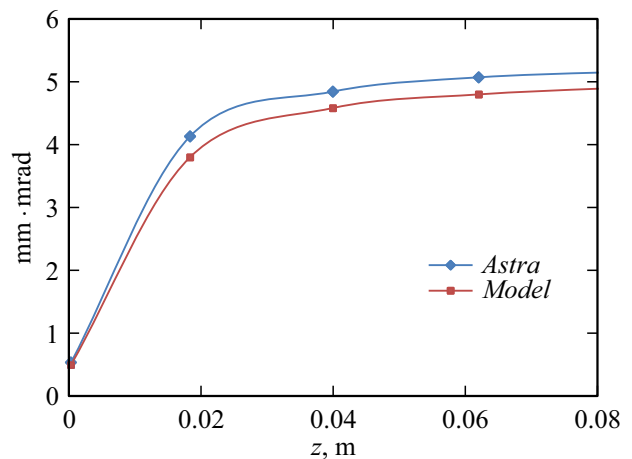


Рис. 8. Поперечный эмиттанс цилиндрического сгустка с гауссовым распределением плотности заряда, вычисленный по численно-аналитической модели и с помощью программы „Астра“.

представлены на рис. 7. Для аналогичных конфигураций с помощью программы Астра сгусток моделировался с помощью 50 тысяч макрочастиц; время расчета составило 19 min, в то время как вычисления по предложенной полуаналитической модели заняли 5 s. Сравнительный анализ той же задачи с гауссовым распределением плотности заряда показан на рис. 8.

Заключение

Проведенный теоретический анализ и численные расчеты дают ясное понимание роли кулоновских полей в формировании эмиттанса в фотопушках. Полученные результаты выявляют связь эмиттанса не только с геометрическими размерами и формой сгустка, но также с параметрами распределения плотности заряда в сгустке. Показано количественно, что величины продольного и поперечного эмиттансов минимальны для однородного распределения и значительно увеличиваются для гауссовых распределений в продольном (в 3–10 раз в зависимости от параметра A) и поперечном (примерно в три раза) направлениях. Для сгустка в форме тонкого диска рост поперечного эмиттанса может быть значительно больше роста его в продольном направлении. Эти результаты численного анализа могут служить основой для сравнения степени влияния высокочастотного поля резонаторов и кулоновских полей сгустков на полный эмиттанс пучка на выходе из фотопушки.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] T. Miura, M. Akemoto, D. Arakawa, Y. Arakida, A. Enomoto, S. Fukuda, Y. Funakoshi, K. Furukawa, T. Higo, H. Honma, R. Ichimiya, N. Iida, M. Ikeda, E. Kadokura, H. Kaji, K. Kakihara, T. Kamitani, H. Katagiri, M. Kurashina, S. Matsumoto, T. Matsumoto, H. Matsushita, S. Michizono, K. Mikawa, F. Miyahara, H. Nakajima, K. Nakao, T. Natsui, Y. Ogawa, Y. Ohnishi, S. Ohsawa, F. Qiu, M. Satoh, T. Shidara, A. Shirakawa, H. Sugimoto, T. Suwada, T. Takenaka, M. Tanaka, Y. Yano, K. Yokoyama, M. Yoshida, L. Zang, X. Zhou. *Upgrade Status of Injector LINAC for SuperKEKB*, in Proc. IPAC'14 (Dresden, Germany, 2014), p. 59–61.
- [2] Электронный ресурс. Режим доступа: <https://www-linac.kek.jp/linac-com/report/b2gm/linac-status-satoh-200622.pdf>
- [3] Электронный ресурс. Режим доступа: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1140/epjst/e2019-900045-4.pdf>
- [4] Электронный ресурс. Режим доступа: <https://ctd.inp.nsk.su/c-tau/>
- [5] D. Nguyen, J. Lewellen, L. Duffy. *RF Linac for High-Gain FEL. Photoinjectors*, US (Particle Accelerator School, June 16–20, 2014) https://uspas.fnal.gov/materials/14UNM/B_Photoinjectors.pdf
- [6] K.-J. Kim. NIM A, **275**, 201 (1989).
- [7] T. Natsui, M. Yoshida, X. Zhou, Y. Ogawa. *Quasi-traveling wave gun and beam commissioning for SuperKEKB*. Proc. IPAC2015 (Richmond, VA, USA), p. 1610–1612.
- [8] H. Bluem, A.M.M. Todd, M.D. Cole, J. Lewellen, L. Phlips, J. Preble, J. Rathke, T. Schultheiss. *Electron Injectors for Next Generation X-Ray Sources*, SPIE 49th Annual Mtg. (Denver, CO, 206 August, 2004)
- [9] D.H. Dowell, J.F. Schmerge. Phys. Rev. Special Topics Accelerators and Beams, **2**, 074201 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.12.074201
- [10] D. Filippetto, P. Musumeci, M. Zolotarev, G. Stupakov. Phys. Rev. Special Topics, Accelerators and Beams, **17**, 024201 (2014).
- [11] T. Rao, D.H. Dowell. *An Engineering Guide to Photoinjectors* (arXiv:1403.7539, 2013), 335 p.
- [12] J.-H. Han. *Dynamics of Electron Beam and Dark Current in Photocathode RF Guns* (Hamburg, 2005) [DESY-Thesis-2005-038].
- [13] J.-H. Han, K. Flöttmann, W. Harting. Phys. Rev. Special Topics Accelerators and Beams, **11**, 013501 (2008).
- [14] J.-H. Han, M. Krasilnikov, K. Flöttmann. Phys. Rev. Special Topics Accelerators and Beams, **8**, 033501 (2005).
- [15] L. Serafini, J.B. Rosenzweig. Phys. Rev. E, **55** (6), 7565 (1977).
- [16] E. Colby, V. Ivanov, Z. Li, C. Limborg. *Simulation Issues for RF Photoinjectors* (SLAC-PUB-11494, Sep 26, 2005), 10 p.
- [17] J.B. Rosenzweig, N. Majernik, R.R. Robles, G. Andonian, O. Camacho, A. Fukasawa, A. Kogar, G. Lawler, J. Miao, P. Musumeci, B. Naranjo, Y. Sakai, R. Candler, B. Pound, C. Pellegrini, C. Emma, A. Halavanau, J. Hastings, Z. Li, M. Nasr, S. Tantawi, P. Anisimov, B. Carlsten, F. Krawczyk, E. Simakov, L. Faillace, M. Ferrario, B. Spataro, S. Karkare, J. Maxson, Y. Ma, J. Wurtele, A. Murokh, A. Zholents, A. Cianchi, D. Cocco. *Ultra-Compact X-Ray Free-Electron Laser* (arXiv: 2003.06083v3 [physics.acc-ph] 14 Aug, 2020)
- [18] С.М. Полозов. *Нелинейная динамика пучков ионов и электронов в линейных ускорителях* (Канд. дисс. М., 2019), 363 с.
- [19] T.V. Bondarenko, E.S. Masunov, S.M. Polozov. Вопросы атомной науки и техники, **6** (88), 114 (2013).
- [20] S.M. Polozov, T.V. Bondarenko. *Beam dynamics simulation in two versions of new photogun for FCC-EE electron injector linac*. Proc. IPAC 2017 (Copenhagen, Denmark, 2017)
- [21] В.Я. Иванов. *Автоматизированное проектирование приборов электроники* (Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 1986), ч. 1.
- [22] C. Hastings, J. Hayward. *Approximation for Digital Computers* (Princeton, USA, 1955)
- [23] GPT: General Particle Tracer, Version 2.82, Pulsar Physics, <http://www.pulsar.nl/gpt/>
- [24] K. Flöttmann. ASTRA-Manual_V3 [Online]. Available: FTP: http://www.desy.de/Directory: mpyflo/Astra_dokumentation/File: ASTRA-Manual_V3.pdf
- [25] В.Я. Иванов. *Метод анализа трехмерных нестационарных задач для пучков заряженных частиц*. Тр. института математики (Наука, Новосибирск, 1989), с. 172–187.
- [26] J. Quang, S. Lidia, R. Ryne, C. Limborg-Deprey. Phys. Rev. Special Topics Accelerators and Beams, **9**, 44204 (2006).
- [27] V. Ivanov. Int. J. Modern Phys. A, **24** (5), 869 (2009).